FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INGRESO 2020- Primer Semestre

INTRODUCCIÓN A LAS CIENCIAS FORMALES (MATEMÁTICA)

Unidad 4

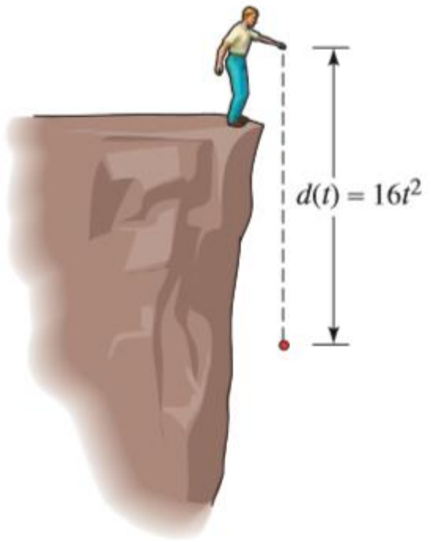
Parte 1

Función

El concepto de función es la columna vertebral de la matemática. Complementado con el lenguaje conjuntista, adquiere un poder muy grande para describir el comportamiento de muchos fenómenos de la realidad.

Ejemplo 1:

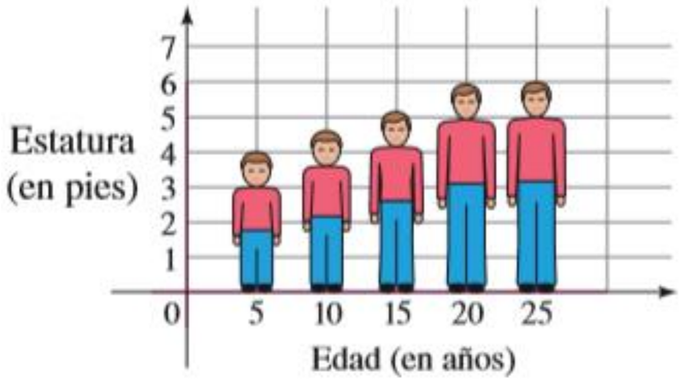
Descripción general: la piedra cae.



Función: en t segundos la piedra cae $16t^2$ pies.

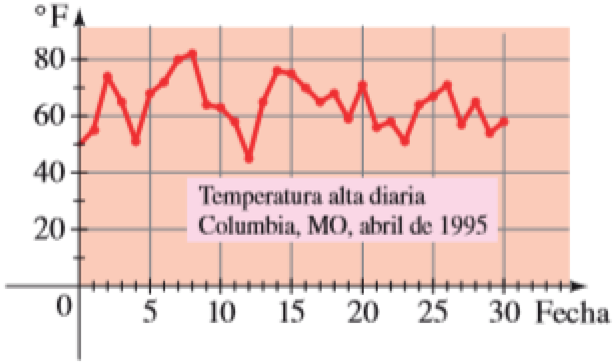
Función

Ejemplo 2:



La estatura es una función de la edad.

Ejemplo 3:



La temperatura es una función
de la fecha.

Ejemplo 4:

w (onzas)	Franqueo (dólares)
$0 < w$ 1	0.37
$1 < w$ 2	0.60
$2 < w$ 3	0.83
$3 < w$ 4	1.06
$4 < w$ 5	1.29
$5 < w$ 6	1.52

El franqueo es una función del peso.

Función

Se usa el término ***función*** para describir la dependencia de una cantidad respecto de otra

Ejemplo

- la estatura depende de la edad,
- la temperatura depende de la época del año,
- el costo de enviar por correo un paquete depende de su peso

Decimos que:

- La altura es una función de la edad.
- La temperatura es una función de la época del año.
- El costo de enviar por correo un paquete es una función del peso.

Definición de función

- Una función es una regla

$\Downarrow$ se requiere asignarle un nombre

Se emplearán letras como $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$, . . .

Ejemplo

Se puede usar la letra $\boldsymbol{f}$ para representar la regla "el cuadrado de un número"

Cuando se escribe $f(2)$, se entiende

"aplicar la regla *f* al número 2". Al aplicar la regla se obtiene $f(2) = 2^2 = 4$

Definición de función

Una *función* $f(x)$ es una regla que asigna a cada elemento x en un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, en un conjunto B.

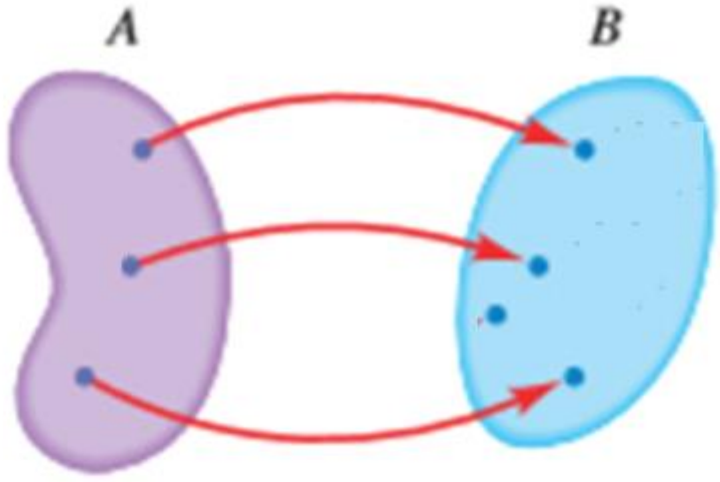
- Los conjuntos *A* y *B* son conjuntos de números reales
- El símbolo $f(x)$ se lee "f de x" o "f en x"
- Se llama el valor de f en x, o la imagen de x bajo f.
- El conjunto A se llama ***dominio*** de la función.
- El ***rango*** de f es el conjunto de los valores posibles en B cuando x varía a través del dominio

$$rango\ (f) = \{f(x) \in B : x \in A\}$$

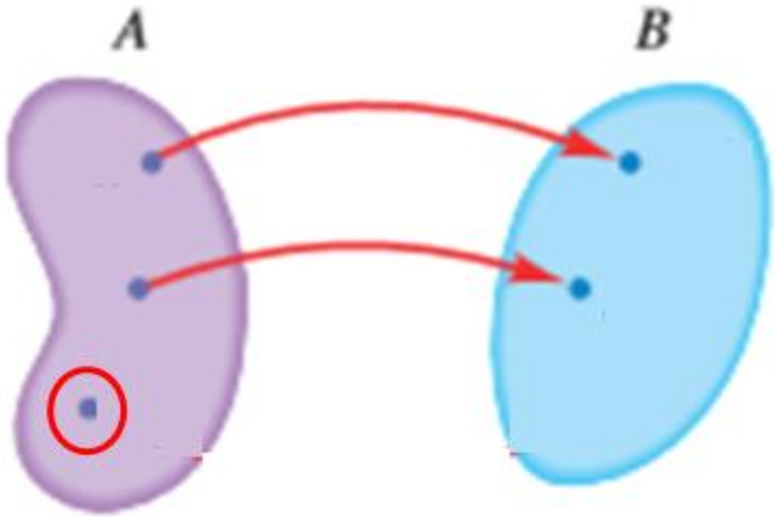
Definición de función

"a cada elemento x en un conjunto A"

Significa : "a todos" → **EXISTENCIA**



Es función

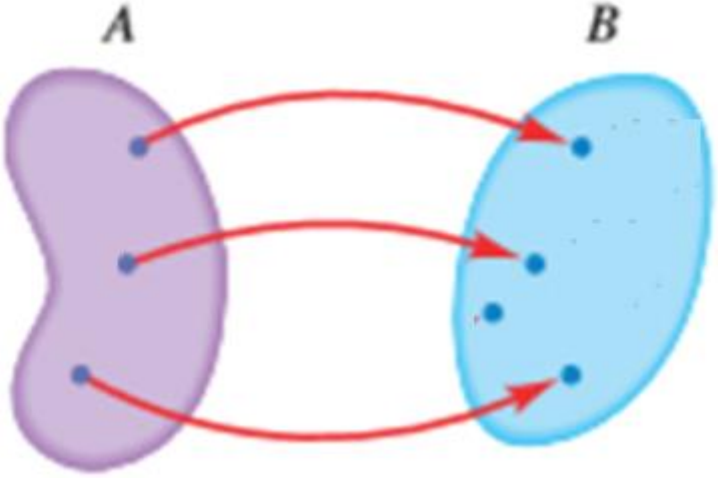


No es función

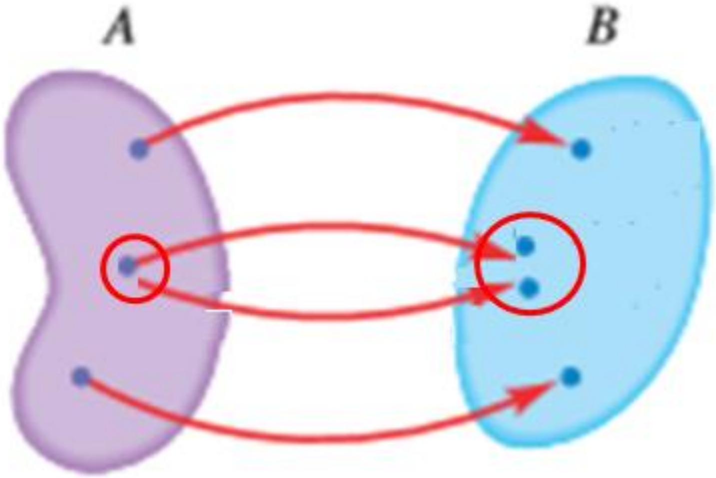
Definición de función

"exactamente un elemento, $f(x)$, en B"

Significa : "parte una sola flecha de cada x" → **UNICIDAD**



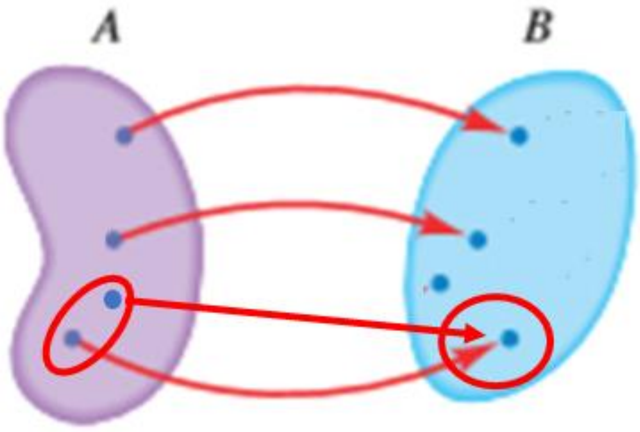
Es función



No es función

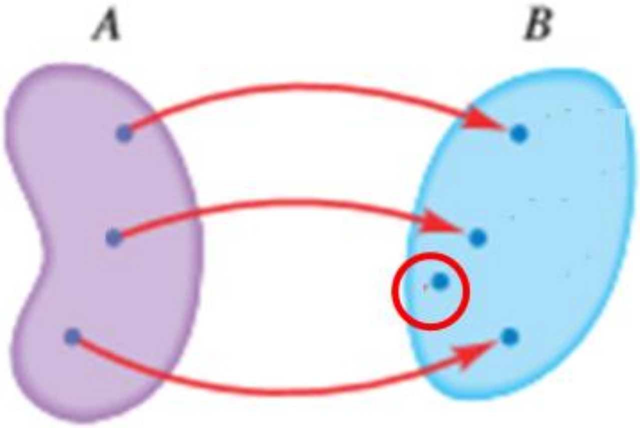
Definición de función

A dos elementos del conjunto dominio, les puede corresponder el mismo elemento.



Es función

En el Rango o conjunto Imagen, pueden haber elementos a los que no les llega ninguna fleha, o sea, no existe en el dominio, ningún elemento con el cual ponerlo en correspondencia



Es función

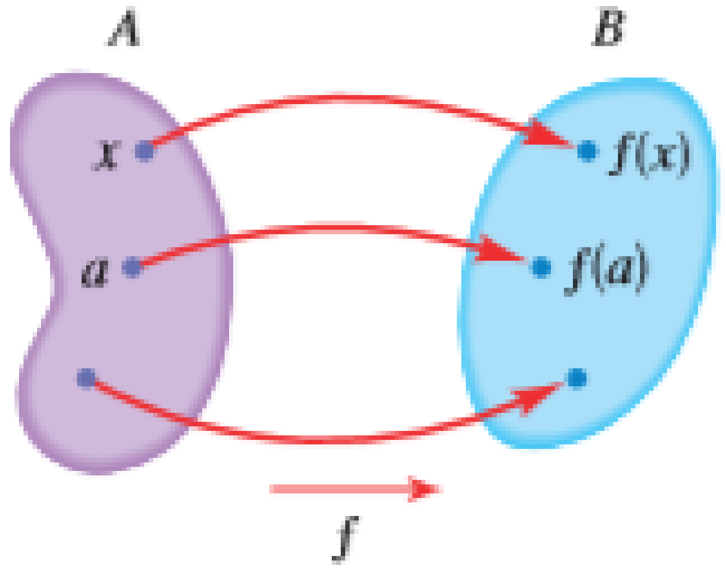
Definición de función

- El símbolo x que representa un número arbitrario en el dominio de una función f se llama ***variable independiente.***

- El símbolo que representa un número en el rango de f se llama ***variable dependiente***

Representación simbólica

$$y = f(x)$$



Ejemplos de función

Ejemplo

La función cuadrática asigna a cada número real x su cuadrado x^2.

Se define por

$$f(x) = x^2$$

a) Evaluar $f(3)$, $f(-2)$, y $f(\sqrt{5})$

b) Hallar el dominio y el rango de f

Solución

a) Los valores de f se hallan al sustituir x en $f(x) = x^2$

$$f(3) = 3^2 \quad f(-2) = (-2)^2 = 4 \quad f(\sqrt{5}) = \sqrt{5}^2 = 5$$

b) El dominio de f es el conjunto de todos los números que pueden ser elevados al cuadrado; esto es, $\mathbb{R}$, el conjunto de todos los números reales.

El rango de f consiste en los valores de $f(x)$, es decir, los números de la forma x^2. Puesto que $x^2 \geq 0$ para todos los números reales x, se puede ver que el rango de f es $\{y \mid y \geq 0\} = [0, \infty)$

Ejercicio 1:

Dadas las siguientes expresiones funcionales en forma coloquial, escriba la correspondiente expresión analítica.

1. Un número real, elevado al cubo, disminuido en 8.
2. Un número real, elevado al cuadrado multiplicado por 5.
3. La raíz cuadrada de un número elevado al cubo.

Sea x un número real, entonces:

1. x elevado al cubo, disminuido en 8 se representa: $x^3 - 8$
2. x elevado al cuadrado multiplicado por 5 se representa: $5 \cdot x^2$
3. La raíz cuadrada de un número x elevado al cubo se representa: $(\sqrt{x})^3$

TRABAJO PRÁCTICO N° 4

Ejercicio 3:

3. Evalúe la función en los valores indicados:

a. $f(x) = 2x + 1$ en $x = 1; x = -2; x = \frac{1}{2}; x = a; x = -a; x = a + b$

b. $g(x) = x^2 + 2x$ en $x = 0; x = 3; x = -3; x = a; x = -x; x = \frac{1}{a}$

c. $h(x) = \frac{1 - x}{1 + x}$ en $x = 2; x = -2; x = \frac{1}{2}; x = a; x = a - 1; x = -1$

d. $j(x) = \begin{cases} x \text{ si } x < 0 \\ x + 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$ en $x = -2; x = -1; x = 0; x = 1; x = 2$

e. $k(x) = \begin{cases} 5 \text{ si } x \leq 2 \\ 2x - 3 \text{ si } x > 2 \end{cases}$ en $x = -3; x = 0; x = 2; x = 3; x = 5$

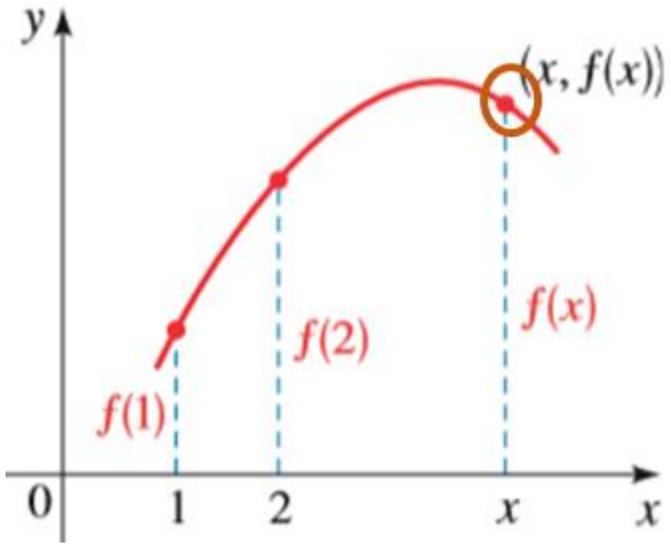
f. $l(x) = \begin{cases} x^2 + 2x \text{ si } x \leq 1 \\ x \text{ si } -1 < x \leq 1 \\ -1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$ en $x = -4; x = -\frac{3}{2}; x = -1; x = 0; x = 25$

Gráfica de una Función

Si f es una función con dominio A, entonces la gráfica de f es el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) | \ x \in A\}$$

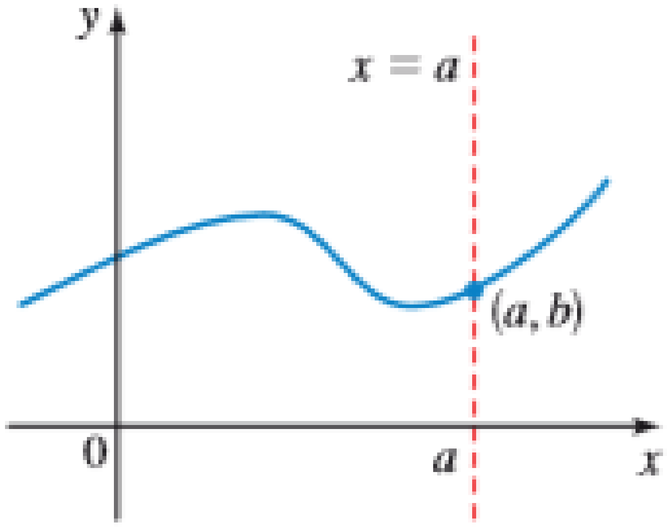
En otras palabras, la gráfica de f es el conjunto de los puntos (x, y) tales que $y = f(x)$; es decir, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.



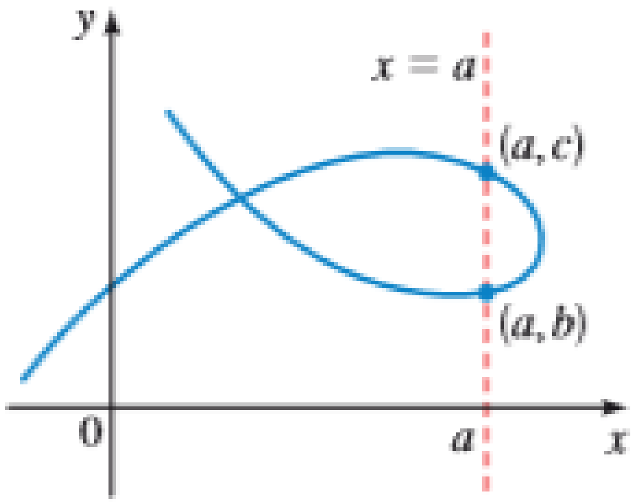
Prueba de la línea vertical

Prueba de la línea vertical

Una curva en el plano coordenado es la gráfica de una función **si y sólo si** ninguna línea vertical corta la curva más de una vez.



Gráfica de una función

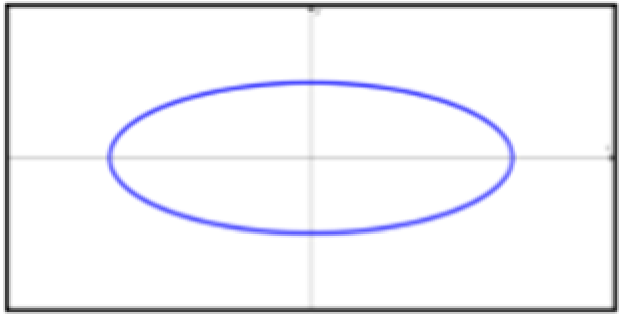


No es una gráfica de una función

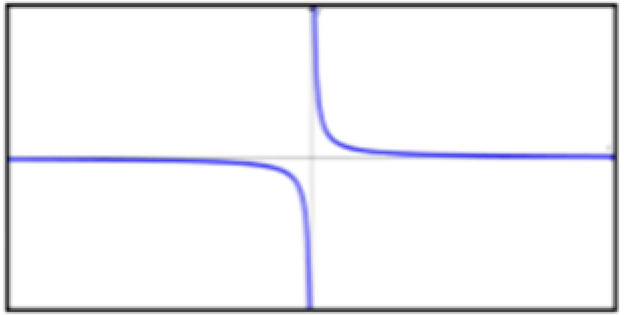
Ejercicio 2:

Determine si la curva representada en cada caso es la gráfica de una función de *x*. Justifique su respuesta.

a)

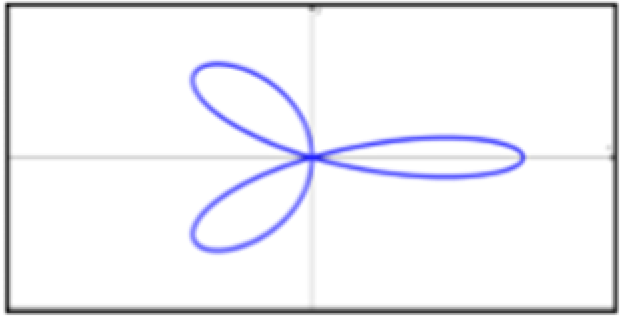


b)

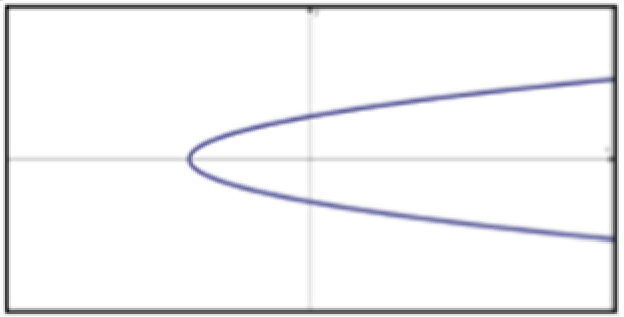


c)

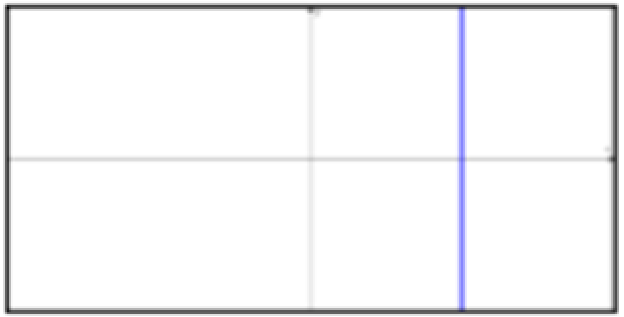
d)



e)



f)



DOMINIO

Llamamos **dominio** (o campo de existencia) de la función al conjunto de todos los valores x para los cuales $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ está definida (sea, es un numero real). Se le suele simbolizar $\boldsymbol{D}; \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{Dom}; \boldsymbol{Dom}(\boldsymbol{f})$

Ejemplo:

El dominio de la función $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$

La solución será un numero real solo si $x^2 - 4 \neq 0$ resolviendo $x = \pm 2$.

Por tanto el dominio es ***Dom=*** $\mathbb{R} - \{2\,;-2\}$

NOTA:

Cuando no se especifica el dominio de la función, siempre se supondrá que es el mayor conjunto de números reales para los que la regla de la función tenga sentido y dé como valores, números reales. Este se llama **dominio natural** de la función.

Dominio de una función

Ejemplo 4

Halle el dominio de cada función..

a) $f(x) = \frac{1}{x^2-x}$ b) $g(x) = \sqrt{9-x^2}$ c) $h(t) = \frac{t}{\sqrt{t+1}}$

Solución de (a)

a) La función no está definida cuando el denominador es 0. Puesto que

$$f(x) = \frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x(x-1)} \implies [x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; o \; x = 1]$$

Así, debemos eliminar estos valores el dominio de f

En modo conjuntista $\boldsymbol{Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0 \; y \; x \neq 1\}}$

En modo de intervalo $\boldsymbol{Dom(f) = (-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1, \infty)}$

Dominio de una función

Solución de (b)

b) $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

No se puede sacar la raíz cuadrada de una cantidad negativa, así que se debe tener

$$9 - x^2 \geq 0.$$

Con los métodos conocidos para resolver inecuaciones , se puede resolver esta desigualdad.

Vemos que la solución de la desigualdad anterior es: $-3 \leq x \leq 3$.

Así, el dominio de g es

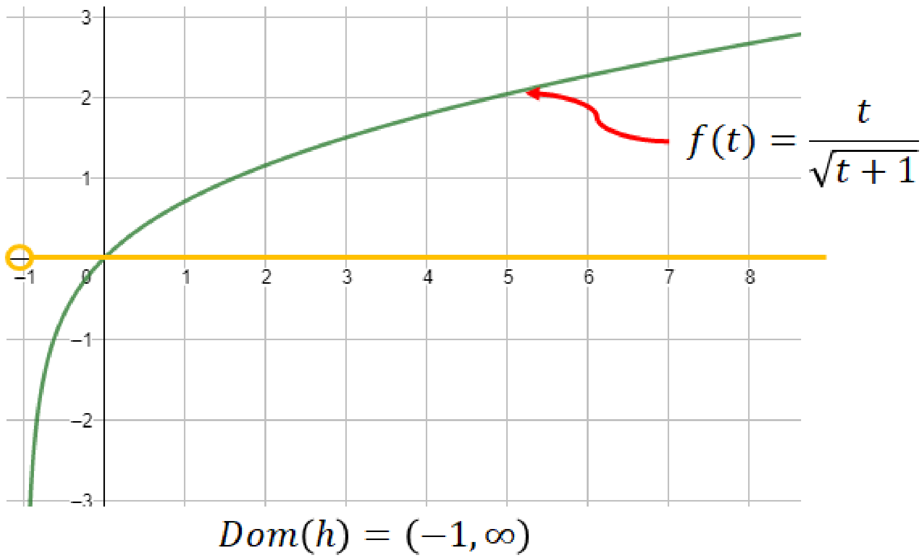
$$Don(g) = \{x| - 3 \leq x \leq 3\} = [-3,3]$$

Dominio de una función

Solución de (c)

No se puede sacar la raíz cuadrada de un número negativo, y tampoco se puede dividir entre cero, así que se debe tener$t + 1 > 0$, es decir, $t \succ 1$.

Por lo tanto, el dominio de h es $\longrightarrow$ $Don(h) = \{t|t \succ 1\} = (-1, \infty)$



Dominio de una función

Conclusión

- Hemos visto tres situaciones bien características de dominios.

Podemos sintetizar así:

1. Los denominadores no pueden ser 0: casos (a) y (c)

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x} \qquad h(t) = \frac{t}{\sqrt{t+1}}$$

2. Los radicando de raíces de índice par, no pueden ser negativos: casos (b) y (c)

$$g(x) = \sqrt{9 - x^2} \qquad h(t) = \frac{t}{\sqrt{t+1}}$$

IMAGEN

Es el conjunto formado por los elementos $\boldsymbol{f(x)}$ del conjunto de llegada $(\boldsymbol{B})$ que son imágenes de elementos del conjunto de partida $\boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{Dom(f)}$. Y se simboliza como $\boldsymbol{I}$; $\boldsymbol{Imag}$; $\boldsymbol{Ima(f)}$.

Ejemplo:

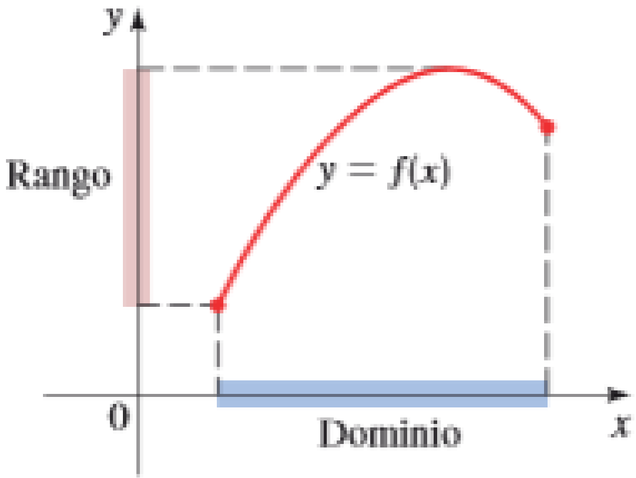
Sea la función $f(x) = \sqrt{1-x}$ encontrar su imagen

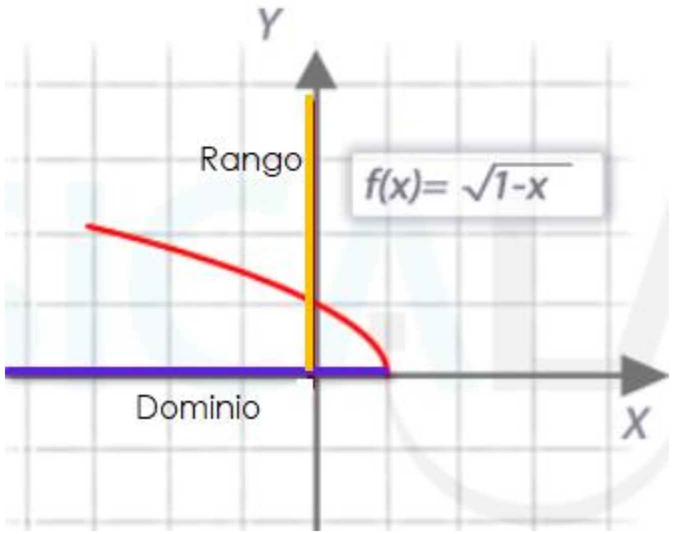
La solución será un conjunto de números reales que toma la función $\boldsymbol{f(x)}$, para cada valor del dominio $\boldsymbol{Dom} = (-\infty; \mathbf{1}]$

La imagen de $\boldsymbol{f(x)}$ será $\boldsymbol{Imag} = [\mathbf{0}; \infty)$

Rango e Imagen en la gráfica de f

La gráfica de una función ayuda a ilustrar el dominio y el rango de la función en el $eje\ x$ y el $eje\ y$ como se muestra:





Ejemplo anterior $f(x) = \sqrt{1 - x}$

Caracterización de una Función

Cuando analizamos una función debemos encontrar:

1. Ceros de una Función
2. Indeterminaciones
3. Ordenada al origen
4. Intervalos de Crecimiento y Decrecimiento
5. Conjunto o Intervalos de positividad y negatividad
6. Paridad de una función

1. Ceros de una Función

Los **ceros** de una función son aquellos valores del dominio cuya imagen es cero.

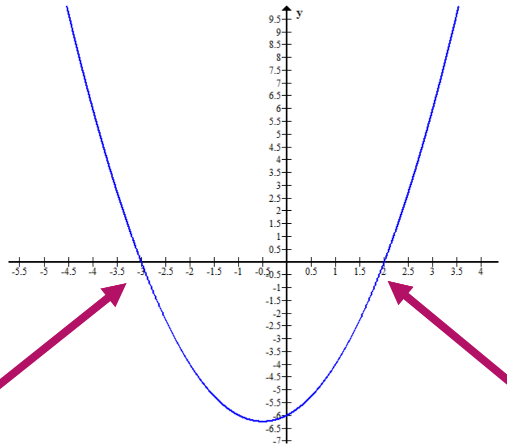
- Gráficamente los ceros son aquellos puntos de la gráfica de la función que intersecan al eje $\boldsymbol{x}$.

Ejemplo:

$$f(x) = x^2 + x - 6$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{-1 \mp \sqrt{1^2 - 4 * 1 * (-6)}}{2} =$$



$x_2 = -3$ $\qquad$ $x_1 = 2$

2. Indeterminaciones

Solo se producen en funciones del tipo : $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

En donde Q(x) puede ser un polinomio o simplemente una expresión algebraica.

Se llama **indeterminación** a los valores que no puede tomar el dominio porque anulan el denominador.

Ejemplo:

Dada: $f(x) = \frac{1}{x-3}$

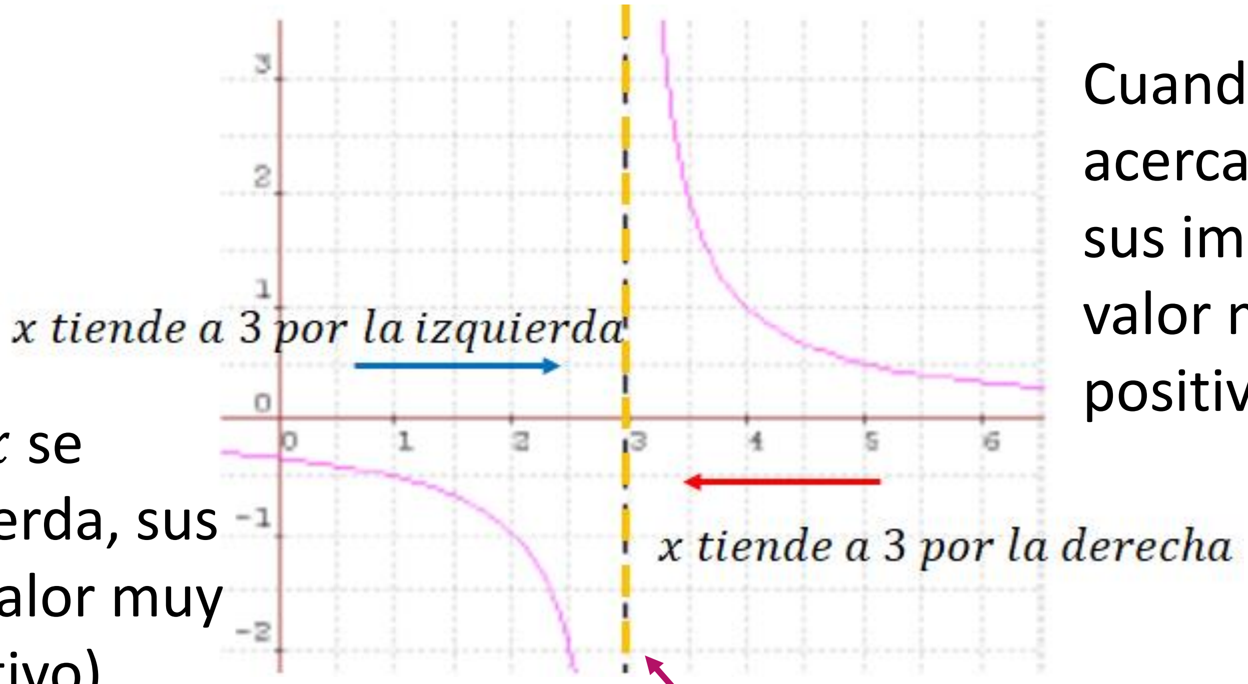
Analizamos en donde se anula el denominador:

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$\therefore x = 3 \; es \; una \; indeterminación \; de \; f(x)$$

Gráficamente: Para $\boldsymbol{x = 3}$ la función no está definida.

Cuando los valores de x se acercan a 3 por la derecha, sus imágenes tiende a un valor muy grande (infinito positivo).



Cuando los valores de x se acercan a 3 por la izquierda, sus imágenes tiende a un valor muy pequeño (infinito negativo).

La recta definida por $\boldsymbol{x = 3}$ es una Asíntota Vertical.

Importante: Debe tenerse en cuenta que el valor de x, para ser una indeterminación, no debe anular simultáneamente al numerador y denominador.

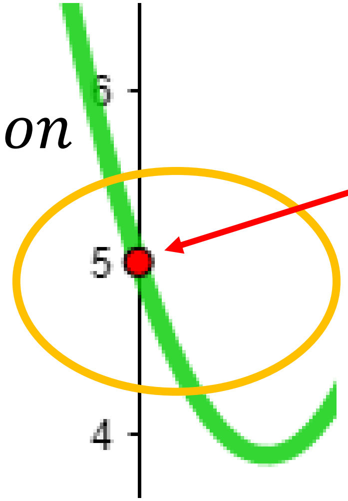
3. Ordenada al origen

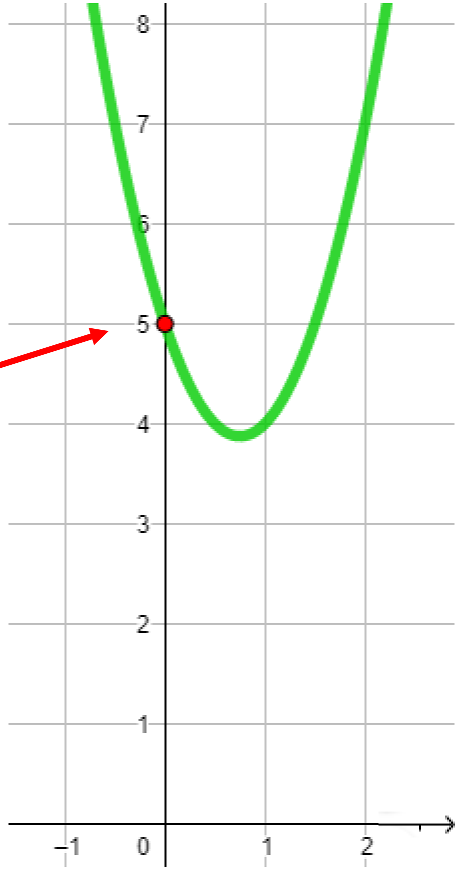
Se entiende por **ordenada al origen** al valor que toma la función $\boldsymbol{f(x)}$ cuando la variable independiente es $\mathbf{0}$. Gráficamente representa la intersección de la función con el eje $\boldsymbol{y}$.

Ejemplo:

$f(x) = 2x^2 - 3x + 5$; para $\mathrm{x} = \mathbf{0}$ tenemos $f(0) = 2 \cdot (\mathbf{0})^2 - 3 \cdot (\mathbf{0}) + 5 = 5$

$\therefore$ *la ordenada al origen de dicha funcion es* $\boldsymbol{y = 5}$





Ceros y Ordenada al Origen

Encuentre la intersección con el $ejes\ x$ y con el eje y de la gráfica de

$$y = x^3 - 4x$$

1. Para hallar intersecciones con el $eje\ x$, nos hacemos la siguiente pregunta: ¿Cuánto vale x, cuando $y\ vale\ 0$?

Sea $y = 0$, despejemos x de la ecuación.

$\mathbf{0} = x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$ Esto sólo es posible si $\boldsymbol{x = 0}$ o $x^2 - 4 = 0$

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow |x| = 2 \Rightarrow \boldsymbol{x = \pm 2}$ ⟹ Los ceros son: $\boldsymbol{x = 0}$; $\boldsymbol{x} = -2$; $\boldsymbol{x = 2}$

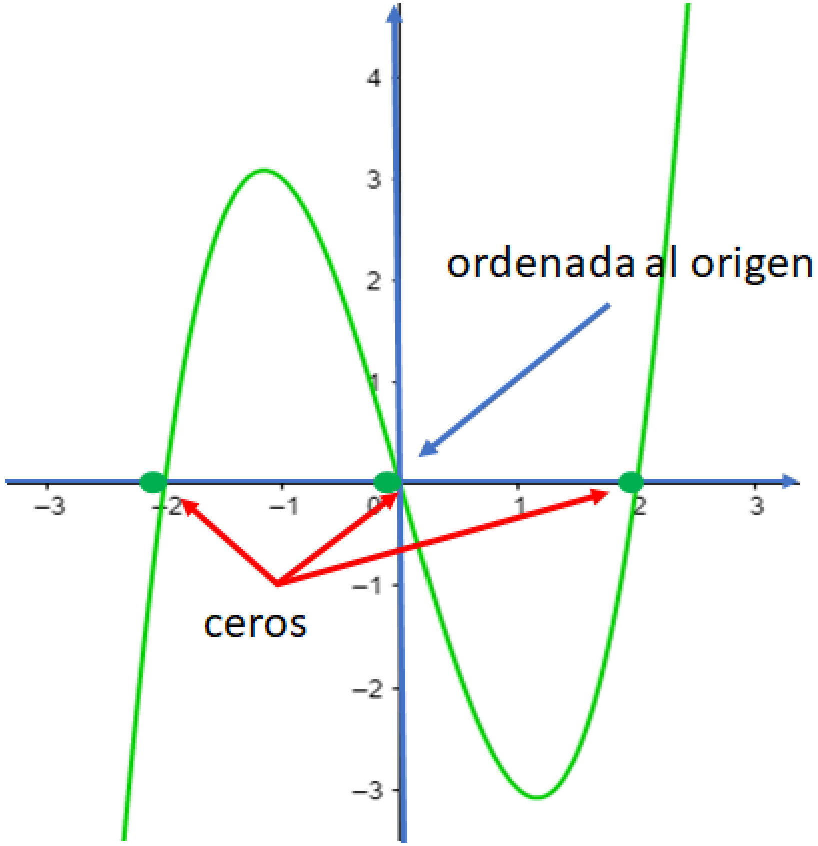
2. Para hallar intersecciones con el $eje\ y$, nos hacemos la siguiente pregunta: ¿Cuánto vale y , cuando $x\ vale\ 0$?

Sea $x = 0$ y despejemos y de la ecuación.

$y = x^3 - 4x \Rightarrow y = (\mathbf{0})^3 - 4 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ ⟹ La Ordenada al Origen es: $\boldsymbol{y = 0}$

Ceros y Ordenada al Origen

$$y = x^3 - 4x$$



4. Intervalos de Crecimiento y Decrecimiento

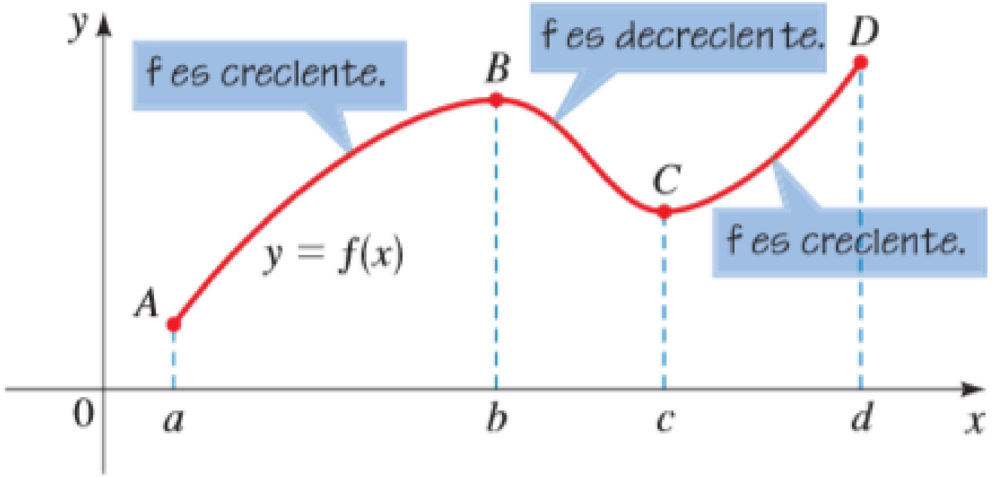
Sea f una función diremos que:

- El o los **intervalos de crecimiento** de una función es un subconjunto ***I*** del dominio para el cual vale que:

$$\forall\, x \in I \text{ } vale\ que\ si\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- El o los **intervalos de decrecimiento** de una función es un subconjunto ***I*** del dominio para el cual vale que:

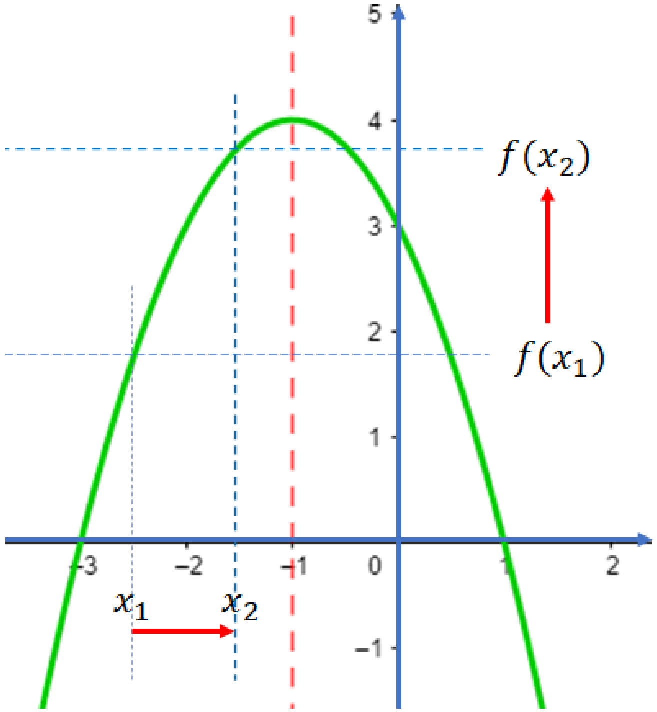
$$\forall\, x \in I \text{ } vale\ que\ si\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

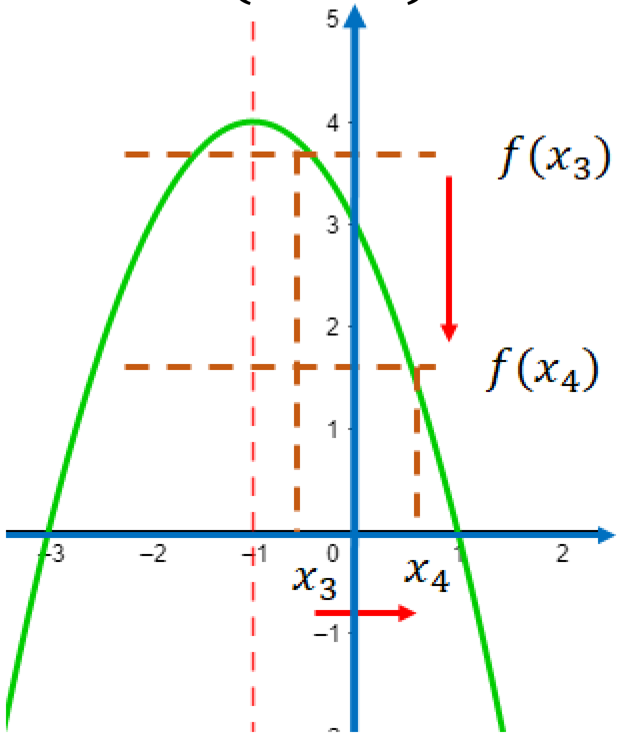


4. Intervalos de Crecimiento y Decrecimiento

Analicemos este ejemplo $y = -x^2 - 2x + 3$

El Vértice de la parábola esta en $P = (-1,4)$





En el intervalo $(-\infty, -1)$ observamos que

Cuando $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$

En el intervalo $(-1, \infty)$ observamos que

Cuando $x_3 < x_4$, $f(x_3) > f(x_4)$

5. Conjuntos de positividad y negatividad

Los Conjuntos de Positividad y Negatividad son Intervalos del dominio de la función; y representan los valores de x para los cuales la función $\boldsymbol{f(x)}$ toma valores positivos o negativos.

- El **Conjunto de Positividad ($\boldsymbol{C+}$)** de una función es el subconjunto del dominio cuyas imágenes son números positivos.

$$x/\ x \in Dom(f)\ y\ f(x) > 0$$

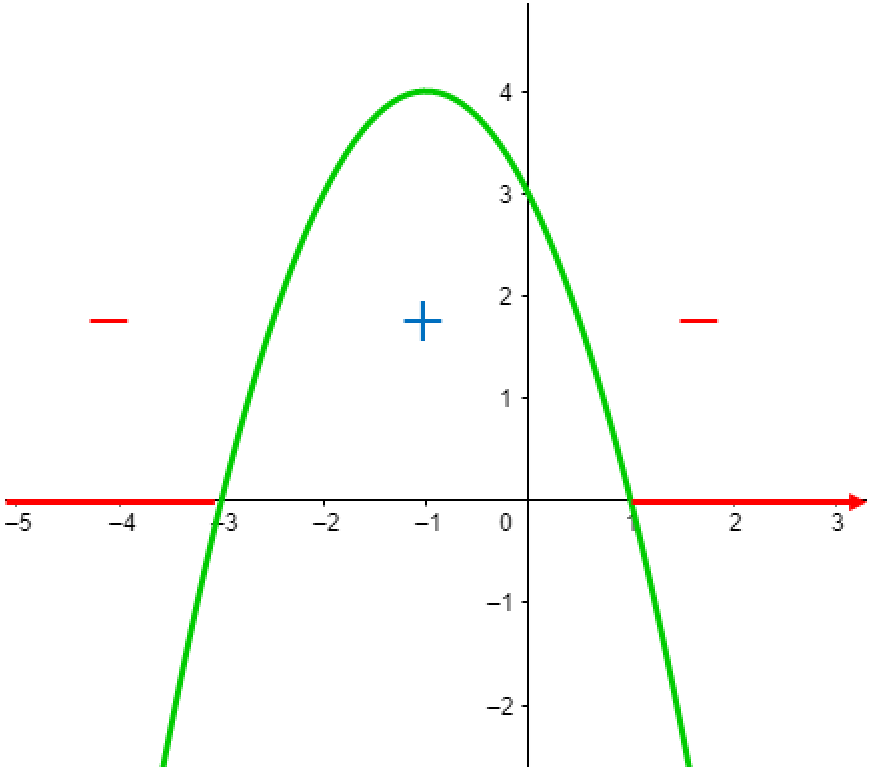
- El **Conjunto de Negatividad ($\boldsymbol{C-}$)** de una función es el subconjunto del dominio cuyas imágenes son números negativos.

$$x/x \in Dom(f)\ y\ f(x) < 0$$

Como calcular los conjuntos de positividad y negatividad:

Sea la función $f(x) = -x^2 - 2x + 3$

Gráficamente:



$C^+ = (-3; 1) \quad y \quad C^- = (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$

Analíticamente:

$x_1 = -3 \quad y \quad x_2 = 1$

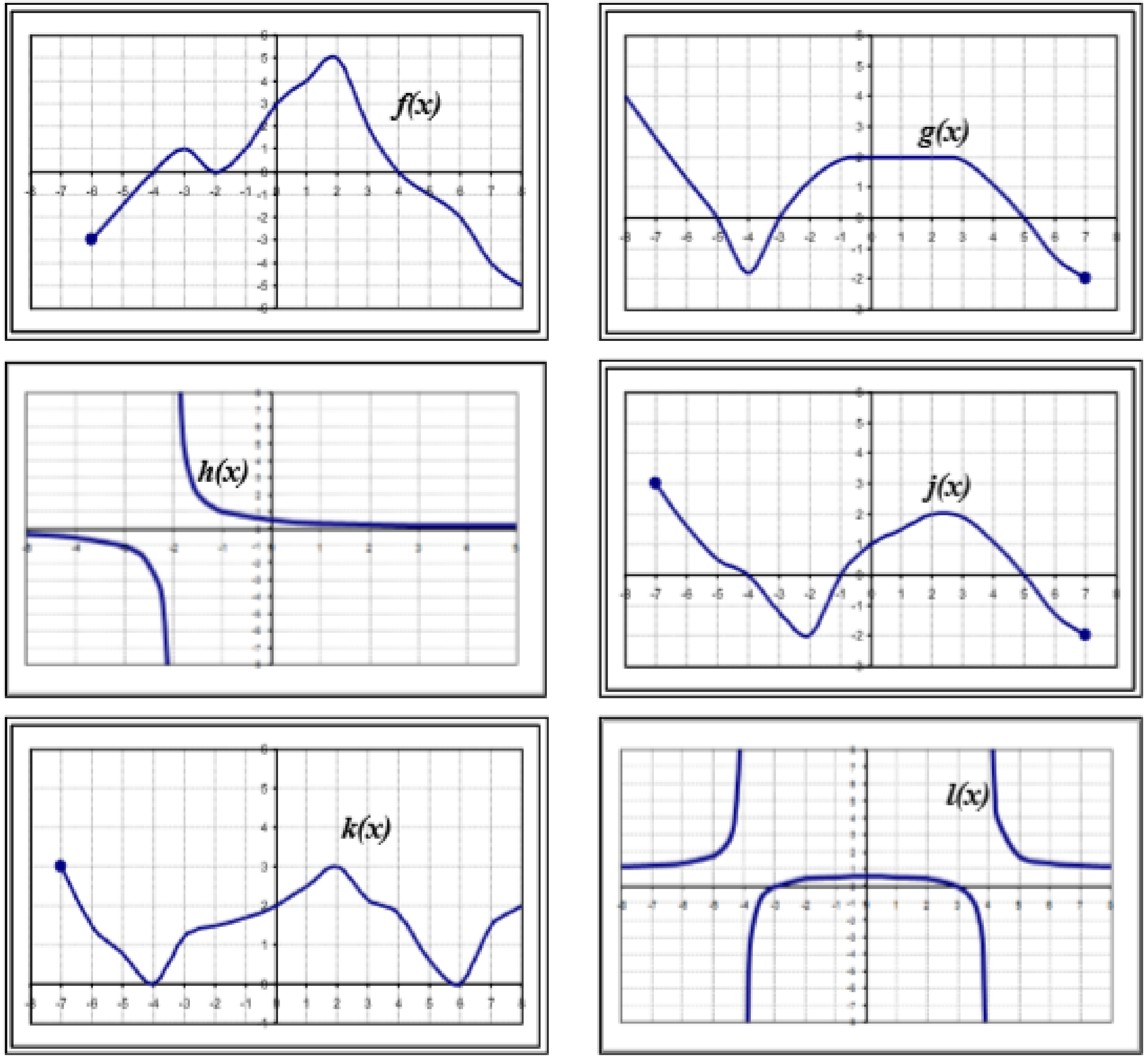
$(-\infty; -3)$	$(-3; 1)$	$(1; \infty)$
$-$	$+$	$-$

$\mathbf{(-\infty; -3)} \quad \mathbf{(-3; 1)} \quad \mathbf{(1; \infty)}$

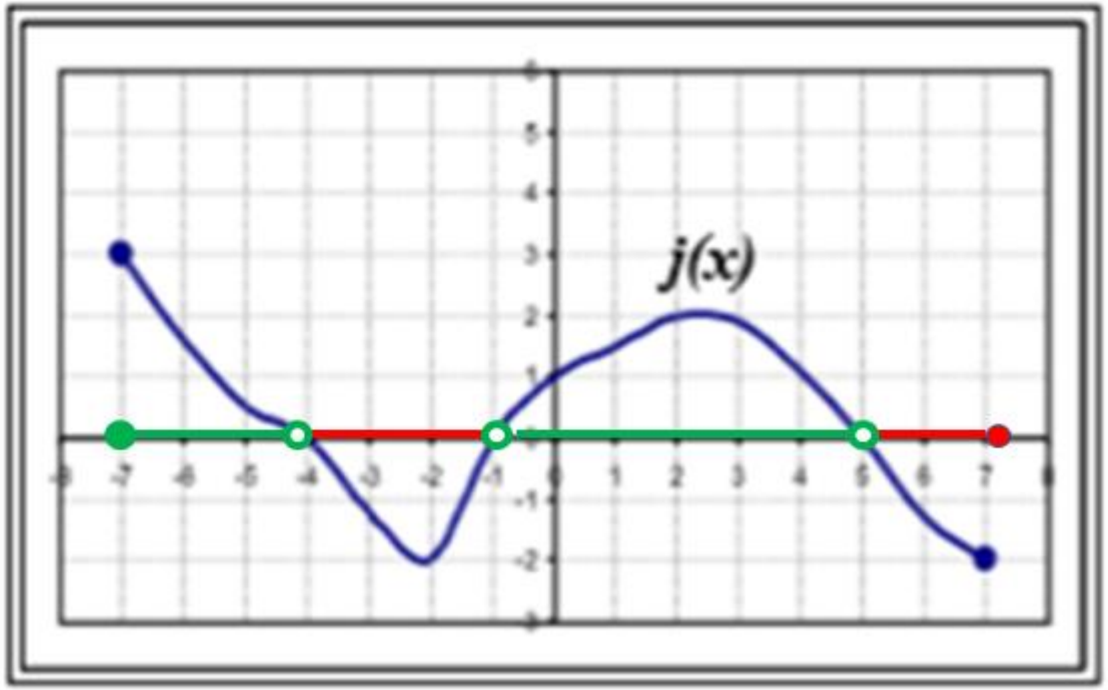
$\boldsymbol{C^+ = (-3; 1)} \quad y \quad \boldsymbol{C^- = (-\infty; -3) \cup (1; \infty)}$

Ejercicio 4:

Dadas las siguientes funciones representadas gráficamente, identifique para cada una de ellas: dominio, imagen, ceros, ordenada al origen, indeterminaciones, conjuntos de negatividad y positividad, intervalos de crecimiento y decrecimiento.



Ejercicio N° 4

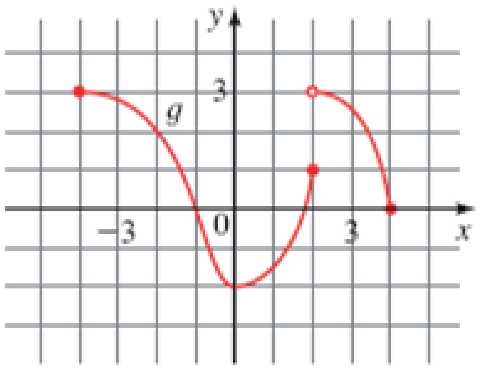


$C^{+} = (-7;-4) \cup (-1,5)$

$C^{-} = (-4;-1) \cup (5;7)$

TRABAJO PRÁCTICO N° 4

Ejercicio 5: Dada la representación gráfica de la función



a. Determine: $g(-4)$, $g(-2)$, $g(0)$, $g(2)$ y $g(4)$
b. Determine los valores de *x* para los cuales se cumple: $g(x) = 3$, $g(x) = 2$, $g(x) = 0$ y $g(x) = -2$
c. Halle el dominio y el rango de $g(x)$

a. Encuentre los ceros y la ordenada al origen.
b. Identifique intervalos de crecimiento y decrecimiento.

TRABAJO PRÁCTICO N° 4

Ejercicio 6: Dadas las siguientes funciones expresadas a través de su forma algebraica, identifique para cada una de ellas: dominio, ceros, ordenada al origen, indeterminaciones, conjuntos de negatividad y positividad.

a) $f(x)=3x-5$

b) $g(x)=x^2-2x$

c) $h(x)=\dfrac{3x}{x-1}$

d) $j(x)=\dfrac{x^2-1}{x+4}$

e) $k(x)=\dfrac{3x-2}{x^2-4x-5}$

f) $l(x)=\sqrt{2x-5}$

g) $m(x)=\dfrac{\sqrt{3x+2}}{x-1}$

h) $n(x)=\dfrac{4x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

i) $ñ(x)=\dfrac{4x^2-25}{\sqrt{x^2-1}}$

Ejercicio N° 6

Ejercicio 6: Dadas las siguientes funciones expresadas a través de su forma algebraica, identifique para cada una de ellas: dominio, ceros, ordenada al origen, indeterminaciones, conjuntos de negatividad y positividad.

Ejemplo de la solución (i)

i) $\tilde{n}(x) = \frac{4x^2-25}{\sqrt{x^2-1}}$

Condición de existencia: $x^2 - 1 > 0$

Dominio: $x^2 - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 > 1 \quad \Rightarrow |x| > 1 \quad \Rightarrow \boldsymbol{x < -1 \text{ o } x > 1}$

$\boldsymbol{Dom}(\tilde{n}) = (-\infty, -\mathbf{1}) \cup (\mathbf{1}, \infty)$

Ceros: ¿Cuánto vale x, cuando $y = 0$?

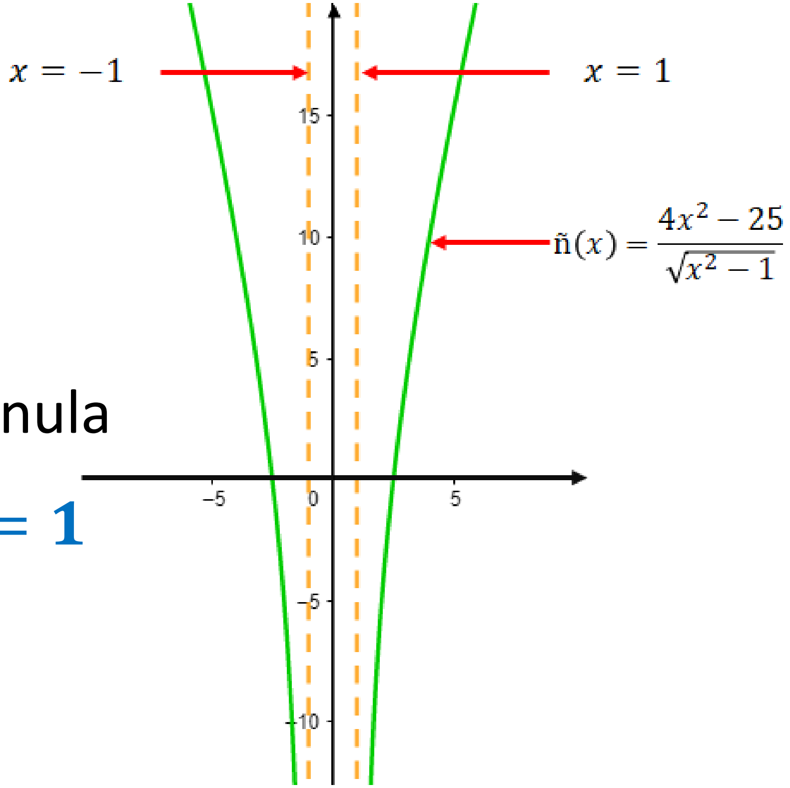
$0 = \frac{4x^2-25}{\sqrt{x^2-1}}$; sólo puede ser 0 el numerados

$$4x^2 - 25 = 0$$
$$4x^2 = 25$$
$$x^2 = \frac{25}{4}$$
$$x = \pm\frac{5}{2}$$

Los ceros de ñ son

$x = -\frac{5}{2}$ y $x = \frac{5}{2}$

Ejercicio N° 6 (continuación)



Ordenada al Origen: ¿Cuánto vale y, cuando $x = 0$?

$$y = ñ(\mathbf{0}) = \frac{4(\mathbf{0})^2-25}{\sqrt{(\mathbf{0})^2-1}} = \frac{-25}{\sqrt{-1}} \quad \notin \quad \mathbb{R}$$

Indeterminaciones:

Las Indeterminaciones ocurren cuando el denominador se anula

$$x^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = 1 \;\Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow \boldsymbol{x = -1} \quad \boldsymbol{o} \quad \boldsymbol{x = 1}$$

Conjuntos de Negatividad y Positividad:

Intervalos: $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right)$, $\left(-\frac{5}{2}, -1\right), \left(1, \frac{5}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{2}, \infty\right)$

Factorizamos: $4x^2 - 25 = (2x+5)(2x-5)$

$\sqrt{x^2-1} > 0$

$$\boldsymbol{C^+} = \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$$

$$\boldsymbol{C^-} = \left(-\frac{5}{2}, -1\right) \cup \left(-\frac{5}{2}, -1\right)$$

	$\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right)$	$\left(-\frac{5}{2}, -1\right)$	$\left(1, \frac{5}{2}\right)$	$\left(\frac{5}{2}, \infty\right)$
$(2x+5)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(2x-5)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\sqrt{x^2-1}$	$+$	$+$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$-$	$+$

Continuará

Muchas Gracias