UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO		EXAMEN DE CONTROL Nº 5	FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES Naturaleza - Ciencia - Humanismo
LEGAJO		**APELLIDO Y NOMBRE**	

A. PARTE TEÓRICA

1. Indique Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. Justifique las respuestas Falsas (contraejemplo, enuncie la correcta expresión o explicación). Si está mal justificado se cuenta como nulo. **(25 p, 6.25 p c/u)**

a. Toda sucesión acotada es convergente.	**F**
b. Es suficiente que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ para concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.	**V**
c. Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series tal que $b_n \leq a_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.	**F**
d. El criterio del cociente establece que suponiendo que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$ entonces la serie converge si $\rho < 1$.	**F**
e. Si el radio de convergencia de una serie de potencias es $R = \infty$, entonces la serie converge absolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$.	**V**

Justificaciones

a. **Falso**, la sucesión alternante $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ está acotada (Cota inferior= -1, Cota superior=1) y es no convergente.

b. **Verdadero**, la condición de que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ es suficiente para afirmar que la serie diverge. Sin embargo, si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ no se puede asegurar que la serie converja (condición necesaria pero no suficiente).

c. **Falso**, no se puede asegurar que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, para poder asegurarlo debería cumplirse que $b_n \geq a_n$.

d. **Falso**, debe cumplirse también que $a_n > 0$, es decir que los términos de la serie sean no negativos.

e. **Verdadero,** la serie de potencias converge absolutamente para todo valor de x.

B. PARTE PRÁCTICA

1. Demuestre por inducción matemática la siguiente proposición. Determina a partir de qué número n es válida (base inductiva): **(25p)**

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

LEGAJO		APELLIDO Y NOMBRE	

Solución:

$P(n)$: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots + \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

Paso 1 (base): se demuestra que $P(1)$ es verdadera: $\frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{1+1} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Paso 2 (inductivo): se supone que $P(k)$ es verdadero:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1} \text{ es verdadera}$$

Ahora se emplea la hipótesis para demostrar que $P(k+1)$ es verdadero.

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Se trabaja **sólo** con el lado izquierdo de la expresión anterior y se agrupan los primeros k términos:

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{20}} + \cdots + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})}\right] + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Por hipótesis inductiva, se sabe que los primeros k términos son iguales a $\frac{k}{k+1}$, luego se aplica propiedad distributiva y se tiene que:

$$\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{k}+\mathbf{1}} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

$$\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

$$\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

$$\frac{(k+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(k+1)}(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

$$\frac{k+1}{k+2} = \frac{k+1}{k+2}$$

Se concluye que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

LEGAJO		APELLIDO Y NOMBRE	

2. Determine convergencia, monotonía y grafique los primeros 5 términos de la sucesión de término $a_n = \frac{n+1}{n}$ **(25p)**

Solución:

Para determinar la convergencia se determina el límite de la sucesión:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

Como existe límite, la sucesión es convergente.

Para verificar monotonía se establece la comparación entre los términos n y $n+1$:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{n+1}{n} \\ a_{n+1} &= \frac{n+2}{n+1} \end{aligned}\right\} \qquad a_n > a_{n+1}$$

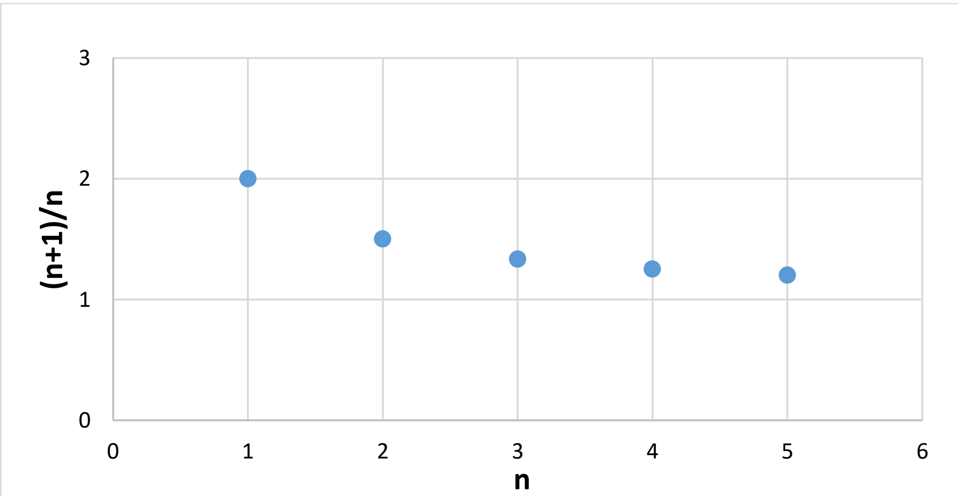
La comparación indica que los términos de la sucesión son no crecientes.

Otra forma de obtener el resultado es realizando la resta entre a_{n+1} y a_n. Así,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{n(n+2)-(n+1)^2}{n(n+1)} = \frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n^2+n}$$

El resultado obtenido es menor que cero (dado que $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto, el denominador es positivo). Esto indica nuevamente que $a_n > a_{n+1}$ y por lo tanto la sucesión es no creciente.

Si se grafican los primeros términos de la sucesión se obtiene:



UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO	**EXAMEN DE CONTROL Nº 5**	FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES Naturaleza - Ciencia - Humanismo

LEGAJO		**APELLIDO Y NOMBRE**	

3. Determine, empleando alguno de los criterios que conoce la convergencia de la serie: **(25p)**

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n}{5n+5}\right)^{n}$$

Solución:

Dado que el término n-ésimo contiene un exponente n, es conveniente emplear el criterio de la raíz que establece que sea $\sum a_n$ una serie con términos positivos y suponga que: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho$

Entonces:

a. La serie converge si $\rho<1$.

b. La serie diverge si $\rho>1$ o si ρ es infinito.

c. El criterio no es concluyente si $\rho=1$.

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{5n+5}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{5n+5}=\frac{1}{5}$$

Como $\rho=\frac{1}{5}$ entonces la serie converge. Se sabe que la serie converge a ese valor, pero NO es el valor de la suma.