Introducción al Algebra Lineal

Año 2019 Practica 1: Vectores geométricos del plano y del espacio

* **A desarrollar junto con el profesor en clase**

**Ejercicio 1**. En Vo,2 construir gráficamente el vector suma + en cada una de las siguientes situaciones: a b

1. o b b) a o

**Ejercicio 2**. A partir del vector fijo  de la figura construir:

a) 3**.**  a

b) 1/3**.**  o

c) -3/4 

**Ejercicio 3**. Siendo u, v vectores de IR3 y t y k escalares reales, demostrar que:

1. t • ( u + v) = t • u + t • v
2. ( t+k) • u = t • u+ k • u
3. (t.k) • u = t.(k • u)
4. 1 • u = u

**Ejercicio 4**. Siendo los puntos ,, c = (-3,2) y d = (-3,0) de IR2:

1. Representar gráficamente en un sistema de coordenadas cartesianas los vectores geométricos: .
2. Determinar analíticamente las componentes del vector .
3. Determinar analíticamente las componentes del vector -3. + 4..

**Ejercicio 5**. Sean p = (1, 3), q = (1,-2), r= (5,3) y t= (5, -2) puntos de IR2:

1. Encontrar las coordenadas del punto medio del segmento que une a los puntos p y r.
2. Encontrar las coordenadas del punto de intersección de las diagonales del rectángulo pqrt.

**Ejercicio 6**. Siendo los puntos a = (4, 3,-3), b= (-5, 0, 4), c= (1,5,3) y d= (2,2,-1) de IR3:

1. Representar gráficamente en un sistema de coordenadas cartesianas los vectores geométricos: y .
2. Determinar analíticamente las componentes del vector 7..
3. Determinar analíticamente las componentes del vector 5..

**Ejercicio 7**. Sean p = (2,3, -2) y q = (7,−4,1) puntos de IR3, encontrar las coordenadas del punto medio del segmento que une a p y q.

**Ejercicio 8**. Sean u = (3,2), v = (−1,5) y w = (2*,*2) vectores de IR2, determinar las componentes de los vectores:

1. u + v
2. −2u + 2v
3. 3w + v
4. u+ v − w

En un sistema de ejes cartesianos, graficar en cada caso los vectores y su resultante.

**Ejercicio 9**. Sean *u* = (3*,-*2, 4), *v* = (6,−1*,*5) y *w* = (0,2*,*3) vectores de IR3, determinar analíticamente las componentes de los vectores:

1. u + v
2. −4u + 2v
3. u+3w + v
4. v – w

En un sistema de ejes cartesianos, graficar en cada caso sus resultantes.

**Ejercicio 10**. Determinar los valores de x e y de IR, que verifican: x (1,2) + y (0,3) = (4, -3).

**Ejercicio 11.** Probar que no existen los escalares c1, c2 y c3 tales que:

c1 (1,2,-3) + c2 (5,7,1) + c3 (6,9,-2) = (4 ,5, 0).

**Ejercicio 12.** Determinar en cada caso, si el vector w es una combinación lineal de los vectores de la familia F:

1. F = {} y w = 
2. F = {} y w = **

**Ejercicio 13.** Determinar si las siguientes familias de vectores son libres o ligadas:

1. En IR2 (IR): F = {(2,3), (3,0), (4, 7)}
2. En IR2 (IR): F = {(1,0), (-2,0)}
3. En IR2 (IR): F = {(2,3), (0,0)}
4. En IR2 (IR): F = {(1,3), (-4,0)}
5. En IR3 (IR): F= {(4,-1,0), (3,-1,0), (2,0,3)}

**Ejercicio 14.** Colocar V o F según corresponda:

1. Una familia ligada posee todos sus vectores linealmente independientes.
2. Si el vector nulo pertenece a una familia de vectores, entonces es una familia ligada.
3. Dada una familia de vectores linealmente independientes, entonces se puede afirmar que todos se pueden expresar como combinación lineal de los demás vectores de la familia.

**Ejercicio 15**. Sean los vectores u = ( -2, 3) y v = (-3,5) de IR2, verificar que:

1. II u II ≥ 0
2. II -5. u II = II -5 II . II u II
3. II u + v II ≤ II u II + II v II

**Ejercicio 16**. Sea u = (1, k, 0) un vector de IR3. Hallar todos los valores de k reales, tal que II u II = 2.

**Ejercicio 17.** Sean u = ( 1, 2, -3) , v = (1,1,0) y w = (2,2,1) vectores de IR3, hallar:

1. II u + v II b) II 3.u II + II w II c) II -2. u II + 2. II u II

**Ejercicio 18**. Normalizar el vector  en los siguientes casos:

1. a= (1,-2) y b= (-2,1) de IR2.
2. a= ( 1,0,2) y b= (2,-4,5) de IR3.

**Ejercicio 19**. Hallar el producto escalar u **•** v para los vectores:

1. u = (-2, 5) y v= (9, -3) de IR2.
2. u= (0, 3, 2) y v = (8, 0, 6) de IR3.

**Ejercicio 20**. Siendo los vectores u = (3, -2, 9), v = (4, -1, 3) y w= (0, 3, 5) de IR3, encontrar si es posible:

1. u **•** (v **•** w) b) u **•** (v +w) c) (u **•** v )w d) II (v **•** w) II e) II 4(v + w) **•** uII

**Ejercicio 21**. Encontrar todos los vectores:

1. u = (x, y) de IR2 ortogonales a v = (-2, 3).
2. u = (x, y, z) de IR3 ortogonales a v = (1,-1,-1) y w = (0, 1,-1).

**Ejercicio 22.** Demostrar que:

1. IIu-vII2 + IIu+vII2 = 2 ( IIuII2 + IIvII2), siendo u y v vectores.
2. Si u y v son vectores ortogonales entonces II u+v II2 = IIuII2 + IIvII2
3. Dos vectores u, v son ortogonales si y sólo si II u+v II = II u- v II

**Ejercicio 23.** Comprobar que las diagonales del romboide abcd, son perpendiculares, siendo a = (2, 3), b = (0,5), c = (4,5) y d = (2,8) puntos de IR2.

**Ejercicio 24**. En cada uno de los siguientes casos hallar el ángulo que forman los vectores u y v:

|  |  |
| --- | --- |
| a) u = (1,1), v = (−1,0) de IR2  b) u = (1,2), v= (−2,1) de IR2 | c)u = (2,1,1), v = (1,−1,2) de IR3 |

**Ejercicio 25.** Determinar si el triángulo abc es acutángulo en el vértice b, siendo a = (-2, 3), b = (5, 3) y c = (-2, 4).

**Ejercicio 26**. Determinar la longitud de los lados de un cuadrilátero abcd si se sabe que: a = (-2, 2), b = (-2, 7), c = (3, 7) y d = (6, 2) de IR2.

1. ¿Es abcd un rectángulo? Justificar analíticamente tu respuesta.
2. Calcular su área y la longitud de las diagonales.

**Ejercicio 27**. Sean los vectores u = (1,2,2), v = (−1,1,2) y w = (−2,2,−1) de IR3. Calcular:

1. u × w c) (u × v) × (-4)w
2. 3v × w d) II 2w x u II

**Ejercicio 28.** Siendo u, v y w vectores de IR3, demostrar que:

1. u x v = - (vxu)
2. ux(v+w) = (uxv) + (uxw)
3. k (uxv) = (ku) x v = u x (kv)
4. ux  = x u = 0
5. uxu = 0

**Ejercicio 29.** Sean u = (2,−1,−2) y v = (−3,2,4) vectores de IR3. Hallar un vector de IR3 que sea ortogonal a u y a v, y que tenga longitud 5. ¿Es único ese vector?

**Ejercicio 30.** Calcular el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores u= (-1*,*4*,*−3), v = (3*,*-2*,*0) y w = (3*,*1*,*−3) de IR3.

**Ejercicio 31.** Calcular el área del triángulo abc, siendo a = 2,2,0, b = (-1, 0, 2) y c = (0, 4, 3) puntos de IR3.

###### Ejercitación adicional propuesta para el alumno

**Ejercicio 32**. A partir del vector fijo  de la figura construir:

a) 4**.**  + 2/3  a

b) 2/5**.**  - 3  o b

c) - 4 + 1/3 

**Ejercicio 33.** Determinar los vectores u y v de IR2, tales que verifican el siguiente sistema:



**Ejercicio 34**. Determinar si existen los escalares x, y de IR tales que: x . (-2,1) + y. (-4, 2) = (0 ,0)

**Ejercicio 35.** Determinar todos los escalares c1, c2 y c3 tales que:

c1 (2,7,8) + c2 (1,-1,3) + c3 (3,6,1) = (0 ,0, 0).

**Ejercicio 36.** Determinar el valor de k para que la familia F= { (1,1,1), (0,1,1), (1,0,k)} sea ligada.

**Ejercicio 37.** Sea w = k.(2,2,1) un vector de IR3. Hallar todos los valores de k reales, tal que ||w|| = 1.

**Ejercicio 38**. Sean los puntos del espacio tridimensional: a= (1,1,1), b = (1,−1,0) y c = (2,−1,−1). Calcular:

1. II II
2. II 2- 3 II

**Ejercicio 39.** Sean los vectores u = ( 1, 2) , v = (4, -2) y w = ( 6,0) de IR2 . Determinar:

1. u • ( 7 v+ w)
2. || ( u • w) w ||
3. || u || ( v • w)

**Ejercicio 40**. Sea u = (1,1) un vector de IR2. Hallar todos los vectores w de IR2 tal que el ángulo entre u y w sea igual a  y |I w || = 1.

**Ejercicio 41**. Dado el triángulo , donde a = (2, 1), b = (3, 3) y c = (4, 1), determinar la amplitud de sus ángulos interiores.

**Ejercicio 42.** Sean los puntos del espacio tridimensional: p = (1,1,1) y q = (k,−k,2). Hallar todos los valores de k reales, tales que d(p, q) = 2.

**Ejercicio 43.** Hallar el perímetro del triángulo determinado por los puntos: a= (-2, 0, -1), b = (-2, -1, 3) y

c = (-1, 1, 1) de IR3. Clasificar dicho triángulo según la medida de sus lados y según sus ángulos.

**Ejercicio 44**. Sea el vector u = (2,1,5) de IR3

1. Determinar si existe el vector w de IR3, tal que uxw = (2,1,−1).
2. Determinar si existe el vector w de IR3, tal que uxw = (3,1,−1).
3. Para cada uno de los ítems anteriores responder las siguientes preguntas.
   1. En caso de existir, ¿es única la solución?
   2. ¿Se puede determinar la existencia o no existencia del vector w sin calcularlo? ¿Como?

**Ejercicio 45**. Hallar el área del paralelogramo determinado por los vectores: u = (-2, 0, 3) y w = (-1, 3, -5) de IR3.

**Ejercicio 46**. Calcular el área del triángulo de vértices en los puntos a= (5*,*3*,*−2), b = (1*,*5*,*0) y c = (1*,*1*,*−3) de IR3.

**Ejercicio 47**. Sean u = (2,2,0) y w = (x, y, z) vectores de IR3. Determinar una condición necesaria y suficiente sobre x, y, z para que u × w = 0.