Introducción al Algebra Lineal

Año 2019

Practica 4: Espacios vectoriales

* **A desarrollar junto con el profesor en clase**

**Ejercicio 1.** En IR2 se definen dos operaciones como sigue:

+ : IR2 x IR2 → IR2 **.** : IR x IR2 → IR2

( (a,b), (c,d) ) → (a,b) + (c,d) ( k, (a,b) ) → (0, kb)

Investigar si IR2 con estas dos operaciones es un espacio vectorial real, justificar la respuesta.

**Ejercicio 2**. Investigar si el conjunto V = {(x,y)/ (x,y)∈ IR2, x − y = 0}, con la suma usual y el producto por un escalar es un IR- espacio vectorial.

**Ejercicio 3**. Investigar si el conjunto V = {p} con un único elemento y con la suma definida: p + p = p y el producto por un real λ.p = p, es un IR- espacio vectorial.

**Ejercicio 4**. En M2x2 se definen dos operaciones como sigue:

+ : M2x2 x M2x2 → M2x2 **.** : IR x M2x2 → M2x2

( ,  ) →  ( k,  ) → ()

Investigar si M2x2 con estas dos operaciones es un espacio vectorial real, justificar la respuesta.

**Ejercicio 5.** Demostrar que en un espacio vectorial real V(IR) el vector nulo es único.

**Ejercicio 6.** Investigar si los siguientes conjuntos son subespacios de los respectivos espacios vectoriales, justificar las respuestas.

a) En IR2 (IR)

S= { u/u = (x1,x2) ∈IR2 ∧ 2x1− 5x2 = 0}

b) En IR3 (IR)

S = {u/u = (x, y, z) ∈ IR3 ∧ 5x - 2y + z = 0 ∧ x + y – z = 0 ∧ 4x -3y + 2z = 0

c) En M2x2 (IR)

U = {A / A ∈ M2x2 ∧ AT = -A}

d) En ***P***2 (IR)

S = {p(x)/ p(x)∈ ***P***2 ∧ p(x) = ax2+ bx + c, con a = b }

**Ejercicio 7**. Determinar si los siguientes conjuntos de IR2 son subespacios vectoriales, representar gráficamente en ejes cartesianos cada caso con ejemplos de vectores de IR2:

1. W = { u/u = (x1,x2) ∈IR2 ∧ 2x1− 4x2 ≤ 0}
2. U = { u/u = (x1,x2) ∈IR2 ∧ x1.x2 = 0}
3. V = { u/u = (x1,x2) ∈IR2 ∧ x1 = 0}
4. Z = { u/u = (x,y) ∈IR2 ∧ x2-y2 = 0}

**Ejercicio 8**. Determinar un ejemplo de subespacio propio para el espacio M2x2 (IR) de todas las matrices de orden dos.

**Ejercicio 9**. Sean V1 y V2 subespacios de IR*n* (IR). Demostrar que la intersección de V1 y V2 es también un subespacio de IR*n* (IR).

**Ejercicio 10**.Sean H1 = { A: A∈ M2x2, a11=0} y H2 = {A: A∈ M2x2, A=}:

1. Determinar si H1 y H2 son subespacios.
2. Determinar si H1∩ H2 es un subespacio.

**Ejercicio 11.** Sean los subespacios S y U de *P*2 (IR), dados por S = {p(x)/ p(x)∈ ***P***2 ∧ p(x) = ax2+ bx + c, con a = b = c} y M = { p(x)/ p(x)∈ ***P***2 (∧ p(x) = ax2+ bx + c , c= 2a+b }. Determinar si la unión de S y M es un subespacio de *P*2 (IR).

**Ejercicio 12**. Sea ***P***2 (IR) el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a dos, determinar si el polinomio p (x) = 3+2x-5x2, es combinación lineal de los polinomios p1(x)= x-1, p2(x) = x+1, p3(x) = x2.

**Ejercicio 13**. Investigar si el vector A =  del espacio vectorial M2x2  (IR), es combinación lineal de los vectores dados en los siguientes casos:

a) A1 =  A2 = A3 = 

b) A1 =  A2 = A3 = 

**Ejercicio 14**. Determinar en los siguientes ítems, si las familias de vectores son libres o ligadas.

1. En IR2 (IR)

F= { ,}

b) En IR3 (IR)

F= { ,}

c) En M2x2 (IR)

F = { , , ,  }

d) En IR4 (IR)

H= {(2,2,1,0), (1,0,1,3), (1,1,0,1), (3,2,4,−5)}

**Ejercicio 15**. Sabiendo que u1, u2 y u3 forman un conjunto linealmente independiente y que v1 = u1+u2+u3, v2= u1+k.u2 y v3= u2+j.u3. Encontrar las condiciones de k y j para que las vectores vi sean linealmente independientes.

**Ejercicio 16**. En cada uno de los siguientes ítems, hallar todos los valores de *k* ∈ IR tales que los vectores dados sean linealmente independientes en sus espacios respectivos:

1. p1(x)= x+3, p2(x) = -x2+x+k, p3(x) = x2-2x
2. (1,−1,2), (k, k – 1, k + 6), (k − 1, k,1)
3. , , , 

**Ejercicio 17.** Se tiene una matriz A triangular del espacio vectorial real M**3x3**(IR), demostrar que los vectores columna que forman a dicha matriz son linealmente independientes.

**Ejercicio 18.** En el espacio vectorial IR2 (IR) se tiene un conjunto de vectores linealmente independientes:

{u, v}. Sean los escalares a, b, c, d de IR tales que u’ = a.u + b.v y v’ = c.u + d.v, demostrar que los vectores u’, v’ son linealmente independientes si la matriz $\left(\begin{matrix}a&b\\c&d\end{matrix}\right)$ es inversible.

**Ejercicio 19.** Demostrar que, en un espacio vectorial real, un conjunto de vectores es linealmente dependiente si al menos uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los demás.

**Ejercicio 20**. En cada uno de los siguientes ítems decidir si el conjunto Agenera el espacio vectorial V.

a) V = IR3 (IR) , A= {(1*,*−1*,*1) *,*(0*,*1*,*−1)*,* (0*,*0*,*1)*,* (1*,*2*,*3)}



c) V = IR4 (IR), A= {(1*,*1*,*1*,*−1)*,* (0*,*−1*,*1*,*2) *,*(1*,*1*,*0*,*1)*,* (3*,*2*,*1*,*2)}

**Ejercicio 21**: Indique cuál es el subespacio generado por las siguientes familias de vectores:

1. $ F\_{1}=\left\{\left(0,4\right);\left(1,1\right);\left(1,5\right)\right\}$ de IR2.
2. $F\_{2}=\left\{\left(1,0,0\right);\left(1,5,0\right)\right\}$ de IR3.
3. F3 = {,  } de M2x2.
4. F4 = { p1(x)= x-1, p2(x) = x2+x} de ***P***2 (IR).

**Ejercicio 22**. Decidir, si las siguientes familias de vectores de IR3 constituyen bases de dicho espacio vectorial.

 a) F= {(1*,*0*,*1)*,* (0*,*1*,*1)}

 b) H= {(1*,*0*,*1)*,* (0*,*1*,*1)*,* (0*,*0*,*0)}

**Ejercicio 23**. Investigar si la familia de vectores F= { , , ,  }

es base del espacio vectorial M2x2 (IR).

**Ejercicio 24.** Sea la matriz A= , encontrar una base para el conjunto

F = { B/ B∈M2x2 , A.B = B.A}

**Ejercicio 25**. Considerando el espacio vectorial de las funciones polinómicas de grado menor o igual a tres sobre los reales, y sea p (x) = a x3 + b x2 + c x + d, con a ≠ 0, demostrar que los vectores p(x), p’(x), p’’(x), p’’’(x) de las derivadas sucesivas, conforman una base de dicho espacio.

**Ejercicio 26**. Hallar una base y la dimensión de los siguientes espacios o subespacios vectoriales reales:

a) El espacio de los polinomios ***P***2 (IR).

b) El subespacio S de M2x2 (IR) de las matrices simétricas.

c) El subespacio vectorial de IR4(IR) que contiene a los vectores u = ( x, y, z, t), para los cuales x+ y = 0 ∧ z – t = 0.

**Ejercicio 27**. Determinar una base y la dimensión del subespacio solución del sistema de ecuaciones lineales homogéneo A . X = 0, dado a través de su matriz asociada:

a) A = $\left(\begin{matrix}1&-1&3\\-1&2&1\\2&-3&2\end{matrix}\right)$ b) A = 

**Ejercicio 28**. En IR2 (IR) sea el vector u = dado en su base canónica, hallar las componentes de u en la base B = { ,}.

**Ejercicio 29.** Demostrar que el conjunto B’ = {(1,1,3); (1,0,1); (2,1,0)} es una base de IR3. Escribir la relación entre las componentes (x, y, z) de un vector arbitrario dado en la base canónica y las componentes (x’, y’, z’) del mismo vector en la base B’.

**Ejercicio 30**. En el espacio vectorial ***P***3 (IR) de los polinomios de grado menor o igual a tres, se tiene una base B = {p1, p2, p3, p4} tal que p1 (x) = 1, p2 (x) = 2x, p3 (x) = -2 + 4 x2, p4 (x) = -12 x + 8 x3. Hallar las componentes de p en la base B si se conoce que p (x) = 7 – 12 x – 8 x2 + 12 x3, en la base canónica de ***P***3.

**Ejercicio 31**. Sea el espacio M2x2(R) y una matriz A = que está dada en su base canónica, hallar las componentes de la matriz A en la base B, siendo B = .

**Ejercicio 32**. En el IR−espacio vectorial IR3, se consideran dos bases:

B1 = {u1 = (1,0,1), u2= (1,1,0), u3 = (0,0,1)} y B2 = {v1,v2,v3}. Si la matriz de cambio de base de B1 a B2 es P =  , determinar las componentes de los vectores de la base B2. Analizar si la base B1 es ortonormada.

**Ejercicio 33**. Siendo u y v dos vectores de IR2 tales que IIuII = IIvII = 2 y (u ● v )= 2. Determinar una base ortonormal de IR2 expresada en función de u y v.

###### Ejercitación adicional propuesta para el alumno

**Ejercicio 34**. Determinar si los conjuntos dados son subespacios.

1. La recta del plano IR2 determinada por los puntos cuyas coordenadas son a = (−1*,*−1) y b = (1*,*1).
2. El plano de IR3 determinado por los puntos cuyas coordenadas son: a= (1*,*0*,*0), b= (0*,*1*,*0) y c= (1*,*1*,*1).

**Ejercicio 35**. Sea V un IR- espacio vectorial, y sean v1, v2 vectores de V.

1. Demostrar que S1 = {u / u = αv1, con α ∈IR} es un subespacio de V.
2. Demostrar que S2 = {u / u = αv1 + βv2 , con α,β de IR} es un subespacio de V.

**Ejercicio 36.** Investigar si los siguientes conjuntos son subespacios de los respectivos espacios vectoriales, justificar las respuestas.

a) En IR3 (IR)

U = {u/u = (x, y, z) ∈ IR3 ∧ x + y + 2z = 0 }

W = { u/u = (x1, x2,x3) ∈ IR3 ∧ x1− x2 = x3 + x2}

b) En M2x2 (IR)

S = { A / A ∈ M2x2(IR) ∧ A.B = B.A ∧ B = $\left(\begin{matrix}1&-1\\2&1\end{matrix}\right) $∈ M2x2(IR) es matriz fija dada }

W = {A / A ∈ M2x2(IR) ∧ a11+a22 = 0}

V = {A / A ∈ M2x2(IR) ∧ det(A) = 0}

c) En ***P***2 (IR)

U = { p(x)/ p(x)∈ ***P***2 (∧ p(x) = ax2+ bx + c , a-c = 2 }

W = { p(x)/ p(x)∈ ***P***2 (∧ p(x) = 4 }

**Ejercicio 37.** Investigar si el conjunto S = { A / A ∈ M2x2(IR) ∧ A = $\left(\begin{matrix}a&b\\c&d\end{matrix}\right) con a=0$} es un subespacio de M2x2(IR).

**Ejercicio 38.** Sea H = { (x, y) / (x, y)∈ IR2, x2 + y2 ≤ 1} , es decir el conjunto de los puntos del plano que pertenecen al círculo unitario. Encontrar un ejemplo para mostrar que H no es un subespacio de IR2.

**Ejercicio 39**. Investigar si el vector u =  del espacio vectorial IR2(IR), es combinación lineal de los vectores dados: v =  y w = .

**Ejercicio 40**. Determinar en los siguientes ítems, si las familias de vectores son libres o ligadas.

1. En IR2 (IR)

H= {, ,}

b) En IR3 (IR)

H = { ,, }

J = { ,, }

c) En M2x2 (IR)

F = { ,  }

d) En IR4 (IR)

W= {(0,-1,1,0), (-1,0,8,6), (1,-3,0,4)}

**Ejercicio 41**. Sea V un IR-espacio vectorial. Sean u, v, w de V tales que la familia de vectores {u, v, w} es libre, es decir, sus vectores son linealmente independientes.

a) Hallar todos los valores de α ∈IR tales que la familia {u+αv+5w, v+(α+1)w ,u+v+2w} sea libre.

b) Hallar todos los valores de *β* ∈R tales que la familia {3*u* + *v* + *βw,u* − 2*w,u* + *βv* − 2*w*} sea libre.

**Ejercicio 42**.Sean H1 = { A: A∈ M2x2, a11=0} y H2 = {A: A∈ M2x2, A=}:

1. Determinar si H1 y H2 son subespacios.
2. Determinar si H1∩ H2 es un subespacio.

**Ejercicio 43**. Sabiendo que u1, u2 y u3 son vectores linealmente independientes, se definen los vectores v1 = u1+u2+u3, v2= u1+k.u2 y v3= u2+j.u3. Encontrar las condiciones de k y j para que las vi formen un conjunto linealmente independiente.

**Ejercicio 44**: Colocar verdadero o falso, justificando la elección.

1. Si $F=\{\vec{v}, \vec{w}\}$ es una familia libre de $R^{3}$, entonces $B=\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{v}x \vec{w}\}$ es una base para $R^{3}$.
2. Toda familia libre de $R^{3}$ compuesta por dos vectores, es familia generatriz de $R^{2}.$
3. Si $ \vec{a}=2 \vec{b} $, entonces $\{\vec{a}, \vec{b}\} $es un conjunto linealmente dependiente.
4. Cualquier recta de $R^{3}$, es subespacio vectorial de $R^{3}$.

**Ejercicio 45**: Indicar cuál es el subespacio generado por las siguientes familias de vectores:

1. $F\_{2}=\left\{\left(1,-1\right)\right\} $
2. $b) F\_{3}=\left\{\left(0,0\right);\left(1,5\right)\right\}$
3. $F\_{3}=\left\{\left(-1,1,5\right)\right\}$
4. $F\_{3}=\left\{\left(-1,-3,-2,\right);\left(2,2,1\right);\left(1,3,2\right);(0,0,1)\right\}$
5. $F\_{4}=\left\{\left(0,1,0\right);\left(0,-10,0\right)\right\}$

**Ejercicio 46**. Decidir, si las siguientes familias de vectores de IR3 constituyen bases de dicho espacio vectorial.

 c) W = {(1*,*0*,*1)*,* (0*,*1*,*1)*,* (0*,*2*,*2)}

 d) P = {(1*,*0*,*0)*,* (0*,*1*,*0)*,* (1*,*1*,*0)}

 e) D = {(1*,*0*,*1)*,* (1*,*2*,*3)*,* (0*,*0*,*1)*,* (1*,*1*,*1)}

**Ejercicio 47**: Justificar por qué las siguientes familias no son bases de $R^{2}$.

1. $F\_{1}=\left\{\left(0,4\right);\left(1,1\right);\left(1,5\right)\right\}$
2. $F\_{2}=\left\{\left(1,-1\right)\right\}$
3. $F\_{3}=\left\{\left(0,0\right);\left(1,5\right)\right\}$

**Ejercicio 48**. Hallar una base y la dimensión de los siguientes espacios o subespacios vectoriales reales:

d) El subespacio S = { p / p ∈ ***P3*** (IR) ∧ p(x) = a + bx + cx2 + dx3 , con a + b = 0 } de ***P3*** (IR).

e) El subespacio S = {(x1, x2) / (x1, x2) ∈ IR2, 2x1− 5x2 = 0} de IR2 (IR).

f) El subespacio S = {(x1, x2, x3) / (x1, x2, x3) ∈ IR3, 2*x*1− *x*2− *x*3 = 0} de IR3(IR).

g) El subespacio S = {(x1, x2, x3, x4) / (x1, x2, x3, x4) ∈ IR4, *x*1− *x*2 = *x*3 + *x*4 = 2*x*2 + *x*3} de IR4(IR) .