Introducción al Algebra Lineal

Año 2019

Practica 5: Transformaciones lineales

* **A desarrollar junto con el profesor en clase**

**Ejercicio 1.** Determinar si las siguientes funciones son transformaciones lineales:

1. f : IR2 →IR2 , dada por f ((x1, x2)) = (0, x1)
2. f : IR→IR, dada por f(x) = x+1
3. f: IR2 → P1, dada por f ((a, b)) = (a+2b)x +(5a-b)
4. f : IR2 → IR2, dada por f ((x1, x2)) = (2x1− 5, x1 + x2)
5. f : IR3 → IR2 , dada por f ((x1, x2,x3)) = (3x1, x1 - x2)
6. f : P2→ P2, dada por f ( a0+ a1x+a2x2) = (a0 + (a1 +a2)x + (2a0-3a1)x2)
7. f : M2x2→ IR, dada por f( ) = a + d
8. f : P2→ M2x2, dada por f( a0+ a1x+a2x2)= 

**Ejercicio 2.** Sea f : IR2 →IR2, la función que aplica a cada punto del plano su reflexión con respecto al eje de las ordenadas. Determinar una fórmula para f y demostrar que es una transformación lineal.

**Ejercicio 3**. Sea *f* : IR2 → R2 , dada por f((x1,x2)) = (3x1+x2, 6x1 -2 x2).

1. Decidir cuáles de los siguientes vectores pertenecen al conjunto N(*f*):

 u =(5*,*15) v = (3*,*4) w= (1*,*1) m= (0*,*0)

1. Decidir cuáles de los siguientes vectores pertenecen al conjunto Im(*f*):

 n =(1*,*−2) g =(−6*,*12) t =(5*,*0) d =(0*,*0)

1. Mostrar 4 vectores que pertenezcan al conjunto Im(*f*).
2. Mostrar 4 vectores que pertenezcan al conjunto N(*f*).

**Ejercicio 4.** En cada uno de los siguientes ítems, hallar el conjunto N(*f*):

1. f : IR3 → IR2 ,dada por f((x1,x2,x3)) = (x3, 0)
2. f : IR4 → IR3 , dada por f((x1,x2,x3,x4)) = (x2 + x4, x1− x3 + x4, 3x1 + 2x2− x3 + 5x4)
3. f : M2x2→ M3x2, dada por f( ) = 
4. f : IR4 → M2x2, dada por f((a, b, c, d)) =

**Ejercicio 5.** En cada uno de los siguientes ítems, hallar el conjunto Im(*f*):

1. f : IR3 → IR2 ,dada por f((a, b, c))= ( a + b, 2a-2b)
2. f : IR3 → IR3 , dada por f((x1,x2,x3)) = (x1 + 2x2 + 3x3, 4x1 + 6x3, 8x2 + x3)
3. T: P2→ M2x2, dada por T(ax2+bx+c)) = 
4. T: M3x2 → M2x2, dada por T() = 

**Ejercicio 6.** Determinar el rango y la nulidad de las transformaciones lineales de los ejercicios 4 y 5.

**Ejercicio 7.** Sea f : V → W una transformación lineal. Si B={v1,...,vr} es una base para el N(f) y B’ ={v1,...,vr, v r+1,...,vn} es una base de V , probar que el conjunto H = {f(v r+1),...,f(vn)} posee vectores linealmente independientes.

**Ejercicio 8**. Siendo *f* : IR4 → IR3, dada por f((x1,x2,x3,x4)) = (2x2 + x3, 3 x4, 5x1 + 2x2− x3 + x4), y g: IR4 → IR3, dada por f((x1,x2,x3,x4)) = (x1 + x4, 2x3, x1 -3x2− x3), transformaciones lineales. Determinar la nulidad y el rango para la transformación lineal f + g.

**Ejercicio 9.** Construir una transformación lineal f : IR3 → IR3 ,de forma que el vector u = (1,2,1) pertenezca al conjunto N(f) y los vectores v = (4,0,−1) y w = (5,1,0) pertenezcan al conjunto Im(f).

**Ejercicio 10.** Demostrar que**:** Siendo V, W y U , IR-espacios vectoriales, y las trasformaciones lineales f : V → W y g : W → U, entonces g ◦ f es una transformación lineal.

**Ejercicio 11.** Demostrar que**:** Siendo V y W dos IR-espacios vectoriales y f : V → W una transformación lineal. Si f es un isomorfismo, entonces f −1 : W → V es una transformación lineal.

**Ejercicio 12.** Sea f : IR5 → IR3 la trasformación lineal definida según: f(( x, y, z, s, t)) = (x + 2y , 2z + 3t, 4s-z) . Comprobar el teorema de la dimensión para la transformación lineal 5f.

**Ejercicio 13. S**ea f : IR3 → IR2 definida como f((x,y,z)) = (x + 7y,−x + 4z). Calcular la matriz asociada a f respecto de las bases B = {(1,1,1),(1,1,0),(0,1,0)} y B’ = {(1,1),(1,0)}.

**Ejercicio 14. S**ea T : M2x2 → M2x2 definida como T() = . Calcular la matriz asociada a T respecto de:

1. Las bases canónicas del dominio y codominio.
2. Las bases B = {, , ,} del dominio y B’= {, , ,} del codominio.

**Ejercicio 15. S**ea T : P2 → M2x2 definida como T((ax2+bx+c)) = .. Calcular la matriz asociada a T respecto de:

1. Las bases canónicas del dominio y codominio.
2. Las bases B = {1, (x+1) , (x2+x+2)} del dominio y B’= {, , ,} del codominio.

**Ejercicio 16**. En cada uno de los siguientes ítems decidir si existe una transformación lineal *f* que satisfaga las condiciones pedidas. En caso afirmativo, hallar la expresión de una transformación lineal *f* .

1. *f* : IR2 → IR2 tal que *f*((2*,*1)) = (1*,*2) y *f*((−1*,*0)) = (1*,*1)
2. *f* : IR2 → IR3 tal que *f*((1*,*2)) = (0*,*0*,*1) y *f*((2*,*2)) = (0*,*2*,*0)
3. *f* : IR3 → IR3 tal que *f*((1*,*1*,*1)) = (1*,*0*,*0), *f*((1*,*1*,*0)) = (2*,*4*,*0) y *f*((0*,*1*,*0)) = (1*,*2*,*0)

**Ejercicio 17.** Construir una transformación lineal T: P1 → IR2 de forma que T((2-x)) = (-3, 1) y T((1+x)) = (-1, 5). Determinar si T es un isomorfismo.

**Ejercicio 18.** Construir una transformación lineal T: P2 → IR3 de forma que T((1+x+x2)) = (2,0,1), T((1+2x2)) = (3,1,0) y T((x+x2)) = (1, -2, 3). Determinar si T es un isomorfismo.

**Ejercicio 19.** Sea *f* : IR2 → IR3 la transformación lineal, dada por su matriz asociada A =  . y las bases B = {(2, 0), (0-3)} para IR2 y B ‘ = { (1,0,0), (1,2,0), (0,0,-2)} para IR3.

1. Calcular: *f*((1*,*−2)) y *f*((3*,*−1)).
2. Hallar el esquema funcional de *f*.
3. Hallar bases de N(*f*) y de Im(*f*).

**Ejercicio 20**. Sea V un espacio vectorial y sea *B* una base de V. Sea *f*  un endomorfismo en V. Demostrar que *f* es un isomorfismo si y si lo si la matriz A = *MBB*(*f*) asociada a f , es inversible.

**Ejercicio 21**. Sea B = {v1,v2,v3} una base de IR3 y sea f : IR3 → IR3 la transformación lineal dada por su matriz asociada A = MBB ( f) = . Determinar si f es un isomorfismo.

**Ejercicio 22.** Sea M2x2 el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n, A ∈ M2x2 y la transformación lineal gA : M2x2→ M2x2 dada por gA(X) = A.X.

1. Si A = , determinar si *gA* es un isomorfismo y si *A* es inversible.
2. Si A = , determinar si *gA* es un isomorfismo y si *A* es inversible.

**Ejercicio 23.** Sea *f* : IR3 → IR3 definida por *f*((*x*1*,x*2*,x*3)) = ( *2x*2+*x*3 *, x*1-*x*2+3*x*3 *, x*1-*x*2),

1. Determinar su matriz asociada A con respecto a la base canónica de IR3
2. Determinar su matriz asociada D con respecto a la base B’= { ( 2,0,2), (0, -1, 0), (0,0, 3)} de IR3
3. Comprobar que la matriz A es semejante a la matriz D.

**Ejercicio 24.** **S**ea T : M2x2 → M2x2 definida como T() = .

1. Calcular la matriz A asociada a T respecto de las bases canónicas del dominio y codominio.
2. Calcular la matriz B asociada a T respecto as bases B = {, , ,} del dominio y B’= {, , ,} del codominio.
3. Comprobar que la matriz A es semejante a la matriz B.

###### Ejercitación adicional propuesta para el alumno

**Ejercicio 25.** Determinar si las siguientes funciones son transformaciones lineales:

1. f : IR2 → IR3, dada por f((x1,x2)) = (x1 + 3x2, x2, x1)
2. f : IR2 → IR, dada por f((x1,x2)) = x1.x2
3. f : P2→ P2, dada por f( a0+ a1x+a2x2) = 0
4. f : M2x2→ IR, dada por f( ) = det()
5. f : IR3 → IR, dada por f((x, y ,z))= det ()
6. f : P2→ M2x2, dada por f( a0+ a1x+a2x2)= 
7. f : M2x2→ IR, dada por f( ) = 

**Ejercicio 26.** En cada uno de los siguientes ítems, hallar bases del N(*f*) y de la Im(*f*).

1. f : IR3 → IR2 ,dada por f((x1,x2,x3)) = (x3, 2x1-4x2)
2. f : P2→ M2x2, dada por f( c+ bx + ax2)= 
3. T: IR3 → M2x2, dada por T((a, b, c)) =
4. T : P1→ IR2 , dada por T(( a + bx ))= 

**Ejercicio 27**. Siendo *f* : IR4 → IR3, dada por f((x1,x2,x3,x4)) = (x2 -4 x3, x1, 2x2+5x3 - x4), y g: IR4 → IR3, dada por f((x1,x2,x3,x4)) = (x1 -3x4, 6x3, x1 +7x2− x3), transformaciones lineales. Determinar la nulidad y el rango para la transformación lineal f + g.

**Ejercicio 28.** Sea f : IR5 → IR3 la trasformación lineal definida según: f(( x, y, z, s, t)) = (6x -3y , z + 4t, s-7z) Hallar una base y la dimensión de la imagen de la transformación 4f.

**Ejercicio 29.** Sean f: IR3 → IR2 y g: IR2 →IR3 dadas por f((x1, x2 ,x3)) = (x1 − x3, x1 + x2) , y g((x1,x2)) = (x1,x2, x1 + x2).

1. Determinar el esquema funcional de las funciones compuestas (g ◦ f) y (f ◦ g).
2. Determinar la nulidad y el rango de (f ◦ g).

**Ejercicio 30.** Sea f una transformación lineal definida de IR3 en IR3, tal que f ((1, 0, 0)) = (1, 0, 0); f((1, 1, 0)) = (0, 1, 0); f. ((1, 1, 1)) = (0, 0, 1). Obtener la matriz A asociada a f y luego la imagen por f del vector u = (1, 2, 3).

**Ejercicio 31. S**ea f : IR2 → IR3 definida como f((x,y)) = (x + y,−x + 4y, 2x+2y). Calcular la matriz asociada a f respecto de:

1. Las bases canónicas del dominio y codominio.
2. Las bases B = {(1,2),(3,4)} del dominio y B’ = {(1,-1,1),(-1,1,0),(1,0,0)} del codominio.

**Ejercicio 32. S**ea T : M2x2→ P2definida como T()= (a+ 2b)x2+(4c-d)x+(7b+a). Calcular la matriz asociada a T respecto de:

1. Las bases canónicas del dominio y codominio.
2. Las bases B = {, , ,} del dominio y B’= { (x2-2x+1), (1-2x) , 5} del codominio.

**Ejercicio 33**. En cada uno de los siguientes ítems decidir si existe una transformación lineal *f* que satisfaga las condiciones pedidas. En caso afirmativo, hallar la expresión de una transformación lineal *f* .

1. *f* : IR2 → IR2 tal que *f*((1*,*0)) = (−1*,*3) y *f*((2*,*0)) = (3*,*6)
2. *f* : IR3 → IR3 tal que *f*((0*,*1*,*1)) = (1*,*2*,*3), *f*((−1*,*2*,*1)) = (−1*,*0*,*1) y *f*((−1*,*3*,*2)) = (0*,*2*,*3)

**Ejercicio 34.** Sea *f* : IR3 → IR3 definida por *f*((*x*1*,x*2*,x*3)) = (*x*1+*x*2+*x*3 *,x*1+*x*2−*x*3 *,x*1+*x*2) y sea *g* : IR3 → IR3 la transformación lineal que cumple que *g*((1*,*1*,*1)) = (−1*,*1*,*0), *g*((1*,*1*,*0)) = (0*,*1*,*1) y *g*((1*,*0*,*0)) = (1*,*0*,*1).

1. Calcular las funciones compuestas *h* = *g* ◦ *f* y *t* = *f* ◦ *g*.
2. Hallar una base del núcleo y una base del conjunto imagen de cada una de las transformaciones lineales *f*, *g*, *h* y *t*.

**Ejercicio 35.** **S**ea T : M2x2 → M2x2 definida como T() =.

1. Calcular la matriz A asociada a T respecto de las bases canónicas del dominio y codominio.
2. Calcular la matriz B asociada a T respecto as bases B = B’= {, , ,} del dominio y codominio.
3. Comprobar que la matriz A es semejante a la matriz B.