Introducción al Algebra Lineal

Año 2019

Practica 6: Valores y vectores propios

* **A desarrollar junto con el profesor en clase**

**Ejercicio 1.** Determinar el polinomio característico de cada una de las siguientes matrices:

1. A =  b) B = c) C =  d) D = 

**Ejercicio 2.** Calcular los valores propios de cada una de las siguientes matrices, y determinar la multiplicidad algebraica (multiplicidad como raíz del polinomio característico):

1. A =  b) B = c) C =  d) D = 

**Ejercicio 3.** Sea la función lineal T: M2x2 en M2x2, dada por T() = , determinar los valores propios de la matriz A asociada a T respecto de las bases canónicas.

**Ejercicio 4.** Probar, utilizando una matriz A cuadrada de orden 3, que A y AT tienen los mismos valores propios.

**Ejercicio 5**. Determinar si $λ=2 $es un valor propio de la matriz $A=\left[\begin{matrix}3&2\\3&8\end{matrix}\right]$.

**Ejercicio 6.** Determinar los vectores propiosde cada una de las siguientes matrices:

1. A =  b) B = c) C =  d) D = 

**Ejercicio 7.** Sea la función lineal T: P2 en P2, dada por T(ax2+bx+c) =(4ax2-3bx+(b-c)), determinar los vectores propios de la matriz A asociada a T respecto de la base B = { 3x2+1, 2x2+ x, 4x+2} en el dominio y la base canónica en el codominio.

**Ejercicio 8**. Determinar si $\vec{w}=\left(\begin{matrix}3\\-2\\1\end{matrix}\right)$ es vector propio de la matriz C$=\left[\begin{matrix}-4&3&3\\2&-3&-2\\-1&0&-2\end{matrix}\right]$. Si lo es, encontrar el valor propio correspondiente.

**Ejercicio 9.** Hallar los subespacios propios y la multiplicidad geométrica (dimensión del subespacio propio), en cada una de las siguientes matrices:

1. A =  b) B =  c) C= 

**Ejercicio 10**. Determinar una base para el espacio propio asociado a cada valor propio:

1. $A=\left[\begin{matrix}3&0\\2&1\end{matrix}\right]$ ,$λ\_{1}=1 y λ\_{2}=3 $
2. $C=\left[\begin{matrix}4&0&-1\\3&0&3\\2&-2&5\end{matrix}\right], λ=3$

**Ejercicio 11.** Demostrar que, si u es un vector propio de las matrices A y B, también es un vector propio de la matriz A+B.

**Ejercicio 12.** Siendo A = , hallar las bases de los subespacios propios de las matrices A y At. ¿Estas bases poseen los mismos vectores?

**Ejercicio 13.** Siendo los vectores propios de la matriz A=  , X1=, X2= y X3 =, determinar la matriz A y sus valores propios.

**Ejercicio 14.** Calcular la proyección ortogonal de u sobre v, y la componente de u ortogonal a v, en cada uno de los ítems:

1. u = (2,3), v = (−2,1)
2. u = (0,−1,6), v = (−1,−3,5)
3. u = (−2,−1,0,1), v = (0,0,−1,3)

**Ejercicio 15.** Ortonormalizar la base B= {(1,1,0), (1,1,1), (2,1,2)}, utilizando el producto escalar usual.

**Ejercicio 16.** Demostrar el siguiente teorema:

*Si A es una matriz cuadrada de orden n, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *A es diagonalizable*
2. *A tiene n vectores propios linealmente independientes*

**Ejercicio 17.** Diagonalizar, si es posible, a las siguientes matrices:

1. A= b) B= c) C=  d) D=

**Ejercicio 18.** Sea *k* ∈R y sea la matriz A = .Se sabe que *λ*= -1 es un autovalor de la matriz A. Determinar si A es diagonalizable.

**Ejercicio 19.** Encontrar la matriz P que diagonalice ortogonalmente a la matriz A, y luego determinar la matriz D = Pt . A. P, en cada caso.

 a) A =  b) A =  c) C = 

**Ejercicio 20.** En M22 se define la norma matricial dos dada por: L2 = ( max λk )½ , siendo λk, para k = 1,....,n; los valores propios de la matriz A . AT. Determinar la norma matricial dos para las siguientes matrices, y luego analizar si son ortogonalmente diagonalizables.

1. A = 
2. B = 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

###### Ejercitación adicional propuesta para el alumno

**Ejercicio 21.** Demostrar que la ecuación característica de una matriz A de orden 2 x 2, se puede expresar como: *λ*2−*tr*(*A*)*λ*+*det*(*A*) = 0, donde tr(A) es la traza de A.

**Ejercicio 22.** Sea la función lineal T: M2x2 en M2x2, dada por T() = , determinar los vectores propios de la matriz A asociada a T respecto de las bases canónicas.

**Ejercicio 23**. Determinar si $\vec{v}=\left(\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right)$ es vector propio de la matriz $B=\left[\begin{matrix}1&-1\\6&-4\end{matrix}\right]$. Si lo es, encontrar el valor propio correspondiente.

**Ejercicio 24**. Determinar si $λ=4$ es un valor propio de $\left[\begin{matrix}3&0&-1\\2&3&1\\-3&4&5\end{matrix}\right]$. Si lo es, encontrar dos vectores propios correspondientes.

**Ejercicio 25**. Sea la función lineal T: P2 en P2, dada por T(ax2+bx+c)=(a + b)x2+4bx- (c-a)), determinar la multiplicidad geométrica de la matriz A asociada a T respecto de la base canónica en el dominio y B = { 4x2+1, -5x2+ x, 2x-2} en el codominio.

**Ejercicio 26**. Determinar una base para el espacio propio asociado a cada valor propio:

1. $B=\left[\begin{matrix}-4&2\\3&1\end{matrix}\right]λ=-5 $
2. $D=\left[\begin{matrix}4&0&-1\\-2&1&0\\-2&0&1\end{matrix}\right], λ\_{1}=1 , λ\_{2}=3 y λ\_{3}=2$

**Ejercicio 27.** Calcular los valores y vectores propios de las matrices A, B, A.B y B.A, siendo A = y B = .

**Ejercicio 28.** Ortonormalizar la base B= {(0,1,1), 92,1,3), (1,1,1)}, utilizando el producto escalar usual.

**Ejercicio 29.** Diagonalizar, si es posible, a las siguientes matrices:

a) A =  b) B= c) C = 

**Ejercicio 30.** Sea $A=PDP^{-1}$, calcular $A^{4}:$

$$P=\left[\begin{matrix}5&7\\2&3\end{matrix}\right];D=\left[\begin{matrix}2&0\\0&1\end{matrix}\right]$$

**Ejercicio 31**. Sean $A=\left[\begin{matrix}-3&12\\-2&7\end{matrix}\right], \vec{v\_{1}}=\left[\begin{matrix}3\\1\end{matrix}\right]y \vec{v\_{2}}=\left[\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right]$, si ambos vectores son propios de la matriz A, utilizar esta información para diagonalizarla.

**Ejercicio 32.** Colocar V o F justificando la respuesta:

1. Si A es una matriz no inversible, entonces $λ=0$ es un valor propio de A.
2. Si A =  , entonces $λ=16$ es un valor propio de A2.
3. Si la matriz A es semejante a la matriz B, entonces los polinomios característicos de A y B son iguales.
4. Si A = , entonces los valores propios de A son 8, -8, 1 y -1.

**Ejercicio 33**. Siendo u y v dos vectores de IR2 tales que IIuII = IIvII = 2 y (u ● v ) = 2. Determinar una base ortonormal de IR2 expresada en función de u y v.