Introducción al Álgebra Lineal

Año 2013

Práctica 1: Vectores

Ejercicio 1. En cada uno de los siguientes casos hallar un punto Q tal que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea equivalente al vector $\overrightarrow{PQ}$.

(a) $A = (1, 2)$, $B = (0, 2)$, $P = (3, 1)$.

(b) $A = (1, 2)$, $B = (-1, 3)$, $P = (4, 4)$.

(c) $A = (1, 3)$, $B = (1, 2)$, $P = (0, 2)$.

(d) $A = (0, 0)$, $B = (3, 2)$, $P = (1, -1)$.

Ejercicio 2. Sean $A = (2, 4)$ y $B = (5, 3)$.

(a) Hallar un vector equivalente al vector $\overrightarrow{AB}$ con origen en $(0, 0)$.

(b) Hallar un vector equivalente al vector $\overrightarrow{AB}$ con origen en $(-1, 1)$.

(c) Hallar un vector equivalente al vector $\overrightarrow{AB}$ con extremo en $(0, 2)$.

(d) Hallar un vector equivalente al vector $\overrightarrow{AB}$ con extremo en $(3, -1)$.

(e) Graficar el vector $\overrightarrow{AB}$ y todos los vectores hallados en los items anteriores en un mismo sistema de ejes cartesianos.

Ejercicio 3. Sean $A = (3, 2)$, $B = (-1, 5)$ y $C = (2, 2)$.

(a) Calcular $A + B$, $A + C$, $A - C$ y $B - C$.

(b) Graficar los vectores A, C, $A + C$ y $A - C$ en un mismo sistema de ejes cartesianos.

Ejercicio 4. Sean $A = (3, 1)$, $B = (1, 2)$.

(a) Calcular $A + B$, $2A + B$, $3A + B$, $-1A + B$, $-2A + 2B$

(b) Graficar los vectores A, B, $2A$, $3A$, $-1A$, $2B$, $A + B$, $2A + B$, $3A + B$, $-1A + B$, $-2A + 2B$ en un mismo sistema de ejes cartesianos.

Ejercicio 5. Sean $A = (3, 2)$ y $B = (5, 3)$.

(a) Hallar un vector equivalente al vector $\overrightarrow{AB}$ con origen en $(0, 3)$ y otro vector equivalente al vector $\overrightarrow{AB}$ con origen en $(-3, -1)$.

(b) Hallar un vector distinto a $\overrightarrow{AB}$ que tenga igual longitud y dirección que $\overrightarrow{AB}$ y cuyo origen sea A.

(c) Hallar un vector con origen $(0, 0)$ de igual dirección y sentido que $\overrightarrow{AB}$ y cuya longitud sea igual a la mitad de la longitud de $\overrightarrow{AB}$.

(d) Graficar el vector $\overrightarrow{AB}$ y todos los vectores hallados en los items anteriores en un mismo sistema de ejes cartesianos.

Ejercicio 6. En cada uno de los siguientes items hallar, si es posible, x e y tales que

(a) $(x, x+1) = (3, y)$

(b) $(2x+y, x-2y) = (1, 3)$

(c) $(2x+y, x-2y) = (2, 4)$

Ejercicio 7. En cada uno de los siguientes items hallar, si es posible, x, y y z tales que

(a) $(1, 2, 3) = x(2, 4, 3) + y(-1, 2, 12) + z(0, 0, 3)$

(b) $(1, 5, 4) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$

(c) $(a, b, c) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$

Ejercicio 8. Sean $A = (1, -2, 2)$ y $B = (3, 2, 4)$ y sea M el punto medio de AB.

(a) Hallar un punto $P \in \mathbb{R}^3$ tal que el vector $\overrightarrow{MP}$ sea equivalente al vector $\overrightarrow{AB}$.

(b) Hallar un punto $Q \in \mathbb{R}^3$ tal que el vector $\overrightarrow{MQ}$ sea paralelo a $\overrightarrow{AB}$ pero tenga distinto sentido.

Ejercicio 9. Calcular la longitud de los vectores $(3, 0)$; $(2, 1)$; $(-3, -4)$; $(3, 3, 3)$; $(-2, 3, 0)$; $3.\,(2, 3, 6)$.

Ejercicio 10. Graficar en el plano el conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \|(x, y)\| = 1\}$.

Ejercicio 11. En cada uno de los siguientes items hallar la distancia entre los puntos A y B.

(a) $A = (1, -3)$; $B = (4, 1)$

(b) $A = (4, -2, 6)$; $B = (3, -4, 4)$

(c) $A = (1, -3, 0)$; $B = (3, -2, 3)$

Ejercicio 12.

(a) Sea $A = (1, k, 0)$. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que $\|A\| = 2$.

(b) Sea $B = k(2, 2, 1)$. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que $\|B\| = 1$.

(c) Sean $P = (1, 1, 1)$ y $Q = (k, -k, 2)$. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que $d(P, Q) = 2$.

Ejercicio 13. Sean $v = (2, -1, 1)$; $w = (1, 0, 2)$ y $u = (-2, -2, 1)$. Calcular.

(a) $\|v + w\|$

(b) $\|v\| + \|w\|$

(c) $\|3v + 3w\|$

(d) $\|v - u\|$

(e) $\left\| \dfrac{1}{\|w\|} w \right\|$

(f) $\|v + w - u\|$

Ejercicio 14. En cada uno de los siguientes items encontrar los dos vectores unitarios que tienen la misma dirección que el vector A.

(*a*) $A = (3, -1)$

(*b*) $A = (2, -3, 6)$

(*c*) $A = (0, 3, 0)$

(*d*) $A = (a, b, c)$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

Ejercicio 15. Sean $A = (1, 2, 1)$ y $B = (1, 0, -1)$. Hallar un vector de longitud 5, de origen $(0, 0, 0)$ y que tenga la misma dirección y sentido que el vector $\overrightarrow{AB}$.

Ejercicio 16. Sean $A = (1, 2)$; $B = (-1, -2)$; $C = (-2, 1)$; $D = (1, 0)$; $E = (0, 0)$ y $F = (x, y)$. Calcular:

(*a*) $\langle A, B\rangle$

(*b*) $\langle B, A\rangle$

(*c*) $\langle A, C\rangle$

(*d*) $\langle A, E\rangle$

(*e*) $\langle B, C\rangle$

(*f*) $\langle B, C + D\rangle$

(*g*) $\langle D - C, A\rangle$

(*h*) $\langle F, A\rangle$

(*i*) $\langle F, E\rangle$

Ejercicio 17. Sean $A = (1, 1, 1)$; $B = (1, -1, 0)$; $C = (2, -1, -1)$; $D = (2, 3, -1)$ y $E = (-1, 0, 2)$. Calcular:

(*a*) $\langle A, B\rangle$

(*b*) $\langle A, C\rangle$

(*c*) $\langle A, B + C\rangle$

(*d*) $\langle A, 2B - 3C\rangle$

(*e*) $\langle A, D\rangle$

(*f*) $\langle D, A + E\rangle$

Ejercicio 18. Encontrar y representar en el plano todos los vectores (x, y) ortogonales a:

(*a*) $A = (1, 2)$

(*b*) $B = (-2, 3)$

(*c*) $e_1 = (1, 0)$

(*d*) $e_2 = (0, 1)$

Ejercicio 19. Encontrar todos los vectores (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ ortogonales a:

(*a*) $e_1 = (1, 0, 0)$

(*b*) $e_2 = (0, 1, 0)$

(*c*) $e_3 = (0, 0, 1)$

(*d*) e_1 y e_2

(*e*) e_1 y e_3

(*f*) e_2 y e_3

Ejercicio 20. Sean $A = (1, -2)$ y $B = (3, 4)$. Hallar todos los vectores (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tales que $\langle A, (x, y)\rangle = \langle A, B\rangle$. Graficar.

Ejercicio 21.

(*a*) Encontrar un vector ortogonal a $(1, 1)$ de longitud 8. ¿Es único?

(*b*) Encontrar todos los vectores ortogonales a $(0, 0, 1)$ de longitud 1. Dibujarlos.

(*c*) Sean $A = (1, 2, -1)$ y $B = (2, 0, 1)$. Encontrar un vector de $\mathbb{R}^3$ que sea ortogonal a A y a B.

Ejercicio 22. En cada uno de los siguientes items hallar el ángulo que forman los vectores A y B

(*a*) $A = (1, 1)$, $B = (-1, 0)$

(*b*) $A = (1, 2)$, $B = (-2, 1)$

(*c*) $A = (1, \sqrt{3})$, $B = (-2, 2\sqrt{3})$

(*d*) $A = (2, 1, 1)$, $B = (1, -1, 2)$

Ejercicio 23.

(*a*) Sea $A = (1, 1)$. Hallar $B \in \mathbb{R}^2$ tal que el ángulo entre A y B sea $\dfrac{\pi}{4}$ y $\|B\| = 1$.

(*b*) Sea $A = (-1, 0)$. Hallar $B \in \mathbb{R}^2$ tal que el ángulo entre A y B sea $\dfrac{\pi}{3}$ y $\|B\| = 2$.

Ejercicio 24. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $A \in \mathbb{R}^n$ un vector de norma 3. Sea $B \in \mathbb{R}^n$ un vector que forma un ángulo de $45°$ con A y tal que $A - B$ es ortogonal a A. Calcular $\|B\|$.

Ejercicio 25. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $A, B \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que

(*a*) $\|A - B\| = \|A + B\|$ si y sólo si $\langle A, B\rangle = 0$.

(*b*) $\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2$ si y sólo si $\langle A, B\rangle = 0$.

Interpretar ambas proposiciones geométricamente.

Ejercicio 26. Sean $A = (1, 2, 2)$, $B = (-1, 1, 2)$ y $C = (-2, 2, -1)$. Calcular:

(*a*) $A \times B$

(*b*) $B \times A$

(*c*) $A \times C$

(*d*) $B \times C$

(*e*) $(A \times B) \times C$

(*f*) $A \times (B \times C)$

(*g*) $\langle A \times B, C\rangle$

(*h*) $\langle A \times B, A\rangle$

(*i*) $\langle A \times B, B\rangle$

Ejercicio 27. Hallar un vector v de norma 1 que sea ortogonal a $A = (1, 1, 1)$ y a $B = (1, 1, -1)$.

Ejercicio 28. Sea $A = (2, 1, 5)$.

(*a*) Determinar si existe $B \in \mathbb{R}^3$ tal que $A \times B = (2, 1, -1)$.

(*b*) Determinar si existe $B \in \mathbb{R}^3$ tal que $A \times B = (3, 1, -1)$.

(*c*) Para cada uno de los items anteriores responder las siguientes preguntas.

1) En caso de existir, ¿es única la solución?
2) ¿Se puede determinar la existencia o no existencia de B sin calcularlo? ¿Cómo?

Ejercicio 29. Sean $A = (1, 0, 1)$ y $C = (-2, 1, 2)$. Determinar todos los $B \in \mathbb{R}^3$ tales que $A \times B = C$ y $\langle A, B\rangle = 1$.

Ejercicio 30. Sean $A = (2, 2, 0)$ y $B = (x, y, z)$. Determinar una condición necesaria y suficiente sobre x, y, z para que $A \times B = 0$

Ejercicio 31.

(a) Sean $A = (2, 1, 0)$ y $B = (1, 3, 1)$. Calcular el área del paralelogramo de vértices O, A, B y $A + B$.

(b) Sean $A = (1, 1, 0)$, $B = (1, 3, 2)$ y $C = (2, -1, 1)$. Calcular el área del paralelogramo que tiene por dos de sus lados a los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

(c) Sean $A = (1, 1)$ y $B = (3, 0)$. Calcular el área del paralelogramo de vértices O, A, B y $A+B$. Graficar.

(d) Sean $A = (2, -1)$, $B = (1, 3)$ y $C = (3, -1)$. Calcular el área del paralelogramo que tiene por dos de sus lados a los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Graficar.

(e) Sean $A = (2, -1)$, $B = (1, 3)$ y $C = (3, -1)$. Calcular el área del triángulo de vértices A, B y C. Graficar.

(f) Calcular el área del triángulo de vértices $A = (1, 3, -2)$, $B = (1, 5, 0)$ y $C = (1, 1, -2)$.

Ejercicio 32.

(a) Encontrar una ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto $(1, 3, -1)$ y tiene dirección $(1, -2, 2)$.

(b) Encontrar una ecuación paramétrica de la recta que pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(2, 3)$.

(c) Encontrar una ecuación paramétrica de la recta que pasa por el origen y es paralela a la recta que contiene a los puntos $A = (2, -2, 1)$ y $B = (-3, 2, 1)$.

(d) Encontrar ecuaciones paramétricas de dos rectas distintas L_1 y L_2 que pasen por $(3, 2, -1)$ y sean perpendiculares a la recta de ecuación: $X = t(2, 2, -2) + (1, 0, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 33. Encontrar la intersección de los siguientes pares de rectas.

(a) $L_1 : X = t(2, -2, 1) + (3, 0, 2)$, $t \in \mathbb{R}$ y $L_2 : X = t(2, 1, -1) + (-1, 1, 2)$, $t \in \mathbb{R}$.

(b) $L_1 : X = t(2, 2, 2) + (1, 0, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, y $L_2 : X = t(-1, -1, -1) + (0, -1, -1)$, $t \in \mathbb{R}$.

(c) $L_1 : X = t(1, 3, 1) + (0, -1, 2)$, $t \in \mathbb{R}$ y $L_2 : X = t(2, -1, 0) + (1, 1, 2)$, $t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 34.

(a) Sean $u = (2, 3)$, $v = (1, 1)$ y $w = (3, -2)$. Hallar $p_v(w)$, $p_u(w)$ y $p_v(u)$.

(b) Sean $u = (2, 1, 1)$, $v = (0, -1, 3)$ y $w = (2, -2, 0)$. Hallar $p_v(w)$, $p_u(w)$ y $p_v(u)$.

Ejercicio 35. Sean $v, w \in \mathbb{R}^n$ con $v \neq 0$. Demostrar que $w - p_v(w)$ es perpendicular a v.

Ejercicio 36. Sea L la recta de ecuación paramétrica $X = t.(2, -1) + (1, -3)$, $t \in \mathbb{R}$ y sea $P = (-4, 1)$.

(a) Hallar las coordenadas del punto de la recta L que se encuentra a menor distancia de P.

(b) Calcular $d(P, L)$.

Ejercicio 37. En cada uno de los siguientes items, hallar una ecuación del plano perpendicular al vector N que contiene al punto P.

(a) $N = (1, 2, -1)$; $P = (5, 3, 3)$.

(b) $N = (1, 1, -1)$; $P = (2, -5, -3)$.

(c) $N = (0, -1, 2)$; $P = (1, 1, 1)$.

Ejercicio 38. En cada uno de los siguientes items, hallar una ecuación del plano que contiene a los puntos A, B y C.

(a) $A = (1, 1, 0)$; $B = (2, 3, 0)$; $C = (-1, -2, 0)$.

(b) $A = (1, 0, 0)$; $B = (0, 1, 0)$; $C = (0, 0, 1)$.

(c) $A = (2, -1, 3)$; $B = (2, 1, 1)$; $C = (2, 3, 2)$.

Ejercicio 39.

(a) Hallar una ecuación del plano de $\mathbb{R}^3$ que contiene a los ejes x e y.

(b) Hallar una ecuación del plano que pasa por el punto $(1, 1, -2)$ y que es paralelo al plano del item anterior.

Ejercicio 40. Sea Π el plano de $\mathbb{R}^3$ descripto por la ecuación $x + y - 2z = 2$.

(a) Hallar un vector N, normal a Π.

(b) Hallar dos puntos distintos de Π.

(c) Hallar un plano Π_1 paralelo a Π que pase por el origen.

(d) Hallar un plano Π_2 paralelo a Π que pase por el punto $P = (1, 1, -2)$.

Ejercicio 41. Sea L la recta de $\mathbb{R}^3$ de ecuación paramétrica $X = t(1, -1, 3) + (0, 2, 1)$ y sea $A = (1, 2, -3)$.

(a) Hallar una ecuación del plano Π que contiene a la recta L y al punto A.

(b) Hallar una ecuación de la recta L' que es perpendicular a Π y que pasa por el punto A.

(c) Calcular $L \cap \Pi$ y $L' \cap \Pi$.

Ejercicio 42. Sea Π el plano de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $2x - y + 4z = 6$.

(a) Encontrar una ecuación de la recta L perpendicular al plano Π y que pasa por el punto $R = (-1, 3, 2)$.

(b) Sea Q el punto de intersección de la recta L con el plano Π. Hallar las coordenadas de Q.

(c) Calcular $\|R - Q\|$ y $d(R, \Pi)$.

Ejercicio 43.

(*a*) Sean L_1 y L_2 las rectas de $\mathbb{R}^3$ descriptas por las ecuaciones $L_1 : X = t(1,2,0) + (1,1,1)$ y $L_2 : X = t(-1,0,1) + (1,2,3)$. Hallar una ecuación de un plano Π que contenga a la recta L_1 y tal que la recta L_2 es paralela a Π.

(*b*) Sean L_3 y L_4 las rectas de $\mathbb{R}^3$ descriptas por las ecuaciones $L_3 : X = t(1,2,-1) + (3,0,0)$ y $L_4 : X = t(-2,-4,2) + (0,1,1)$. Sea Π' el plano que contiene a las rectas L_3 y L_4. Dar una ecuación del plano Π'.

Ejercicio 44.

(*a*) Hallar la distancia entre el punto $P = (2,2,1)$ y el plano de $\mathbb{R}^3$ que contiene a las rectas $L : X = t(1,2,-1) + (1,3,2)$ y $L' : X = t(2,-1,3) + (3,2,5)$.

(*b*) Hallar la distancia entre el punto $P = (2,1)$ y la recta de ecuación $x + 2y = 3$.

Ejercicio 45. Sea $A = (2,-3)$ y sea L la recta definida por la ecuación $X = t(3,4)$.

(*a*) Sea L' la recta paralela a L que pasa por el punto A. Hallar la ecuación paramétrica de la recta L'.

(*b*) Hallar todos los los puntos de la recta L' que distan 2 de A.

(*c*) Sea P el punto de la recta L que está a menor distancia de A. Hallar las coordenadas del punto P.

(*d*) Calcular $\langle P - A, (3,4)\rangle$. Interpretar el resultado geométricamente.

Ejercicio 46.

(*a*) Describir el conjunto de puntos P de $\mathbb{R}^3$ tales que $d(P,(0,0,0)) = 1$.

(*b*) Describir el conjunto de puntos P de $\mathbb{R}^3$ tales que $d(P,(1,1,0)) = 1$.

(*c*) Describir el conjunto de puntos P de $\mathbb{R}^3$ tales que P pertenece al plano de ecuación $z = 0$ y $d(P,(1,1,0)) = 1$.

(*d*) Describir el conjunto de puntos P de $\mathbb{R}^3$ tales que P pertenece a la recta de ecuación $L : X = t(0,1,0) + (1,0,0)$ y $d(P,(1,1,0)) = 1$.

Ejercicio 47. Sea $P = (2,1,-1)$.

(*a*) Sea Π el plano de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x + y - z = 0$. Hallar las coordenadas del punto de Π que se encuentra a menor distancia de P.

(*b*) Sea L la recta de ecuación paramétrica $X = t(1,3,1) + (2,2,0)$. Hallar las coordenadas del punto de L que se encuentra a menor distancia de P.

(*c*) Sea L la recta de ecuación paramétrica $X = t(1,-1) + (1,0)$. Hallar las coordenadas del punto de L que se encuentra a menor distancia del punto $(-1,-3)$.

Ejercicio 48.

(*a*) Sea Π el plano de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $z = 0$ y sea L la recta de ecuación $X = t(1,1,-2)$. Hallar una recta L' contenida en el plano Π que sea perpendicular a L. ¿Es única?

(b) Sea Π el plano de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $z = 0$ y sea L la recta de ecuación $X = t(0, 0, 1)$. Hallar una recta L' contenida en el plano Π que sea perpendicular a L. ¿Es única? ¿Cuál es la diferencia con el item anterior?

Ejercicio 49. Sea $k \in \mathbb{R}$. Sea L la recta de ecuación paramétrica $X = t(k^2 + 1, k, k + 7)$ y sea Π el plano de ecuación $x + 2y - 3z = 2$. Determinar todos los valores de k para los cuales $L \cap \Pi = \varnothing$.

Ejercicio 50. Sea L la recta de ecuación $X = t(2, 3, -1)$ y sea Π el plano de ecuación $x + 2y = 0$.

(a) Hallar todos los puntos de $\mathbb{R}^3$ que están a distancia $\sqrt{5}$ del plano Π.

(b) Hallar todos los puntos de la recta L que están a distancia $\sqrt{5}$ del plano Π.

Ejercicio 51. Sea Π el plano dado por la ecuación paramétrica $X = \alpha(0, 2, 1)+\beta(2, 3, 0)+(-1, 0, 1)$.

(a) Hallar las ecuaciones de dos rectas L_1 y L_2, perpendiculares entre sí, ambas contenidas en Π.

(b) Hallar la ecuación de una recta L contenida en Π que sea perpendicular a la recta L' definida por la ecuación paramétrica $X = t(-2, 3, 1) + (2, 1, 2)$.

Ejercicio 52. Sean Π_1 y Π_2 los planos de $\mathbb{R}^3$ definidos por las ecuaciones $3x + 2y - 6z = 1$ y $-3y + 4z = 3$ respectivamente.

(a) Hallar todos los puntos P de $\mathbb{R}^3$ que verifican $d(P, \Pi_1) = d(P, \Pi_2)$.

(b) Hallar todos los puntos P de $\mathbb{R}^3$ que verifican $d(P, \Pi_1) = d(P, \Pi_2) = 2$.

($*$)**Ejercicio 53.** Sean A, B, C y D cuatro puntos del plano tales que $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$. Sea M el punto medio de $\overline{AB}$ y sea N el punto medio de $\overline{CD}$, probar que $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AC}$.

($*$)**Ejercicio 54.** Sean $A = (2, 0)$ y $B = (1, 1)$

(a) Hallar todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ que equidistan de A y B.

(b) Hallar $C \in \mathbb{R}^2$ tal que el triángulo $\triangle ABC$ sea equilátero. ¿Es único un tal C?

(c) Hallar la ecuación de una recta que pase por B y que forme un angulo de 45° con la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

(d) Hallar $D \in \mathbb{R}^2$ tal que el triángulo $\triangle ABD$ sea rectángulo en D e isósceles.