

---

# Topología General

Primer semestre de 2016

## Práctica 1: Espacios topológicos

---

**Ejercicio 1.** Sea  $X$  un conjunto y sea  $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha \in A}$  una colección de topologías en  $X$ .

(a) Probar que  $\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha$  es una topología en  $X$ .

(b) ¿Es  $\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha$  una topología en  $X$ ?

(c) Probar que existe una única topología en  $X$  que es la mayor de todas las topologías contenidas en cada una de las topologías  $\mathcal{T}_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ .

**Ejercicio 2.** Sea  $X$  un conjunto. Sea  $\mathcal{T}_c = \{U \subseteq X / U = \emptyset \text{ o } U^c \text{ es contable}\}$ . Demostrar que  $\mathcal{T}_c$  es una topología en  $X$ .

**Ejercicio 3.** *Topología definida por filtro de entornos.* Supongamos que tenemos para cada  $x \in X$  un subconjunto (no vacío)  $\mathcal{F}_x \subset \mathcal{P}(X)$  con las siguientes propiedades:

E1: Dado  $A \in \mathcal{F}_x$ , entonces  $x \in A$ .

E2: Dado  $B \subset A$ , si  $B \in \mathcal{F}_x$  entonces  $A \in \mathcal{F}_x$ .

E3: Dados  $A, B \in \mathcal{F}_x$ , entonces  $A \cap B \in \mathcal{F}_x$ .

E4: Dado  $A \in \mathcal{F}_x$ , existe  $B \subset A$  tal que  $B \in \mathcal{F}_x$ , y  $B \in \mathcal{F}_y$  para cada  $y \in B$ .

Probar:

(a)  $\mathcal{T} = \{B \in \mathcal{P}(X) : B \in \mathcal{F}_x \forall x \in B\} \cup \{\emptyset\}$  es una topología en  $X$  (observar que no se necesita la propiedad E4). Esta topología se llama la topología definida por los filtros de entornos de sus puntos.

(b) Si  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico, los conjuntos

$$\mathcal{F}_x = \{A \in \mathcal{P}(X) : x \in U \subset A \text{ para algún } U \in \mathcal{T}\}$$

verifican los axiomas E1-E4. Los conjuntos  $\mathcal{F}_x$  se llaman filtros de entornos del punto  $x$ .

(c) El filtro de entornos de una topología definida por filtro de entornos coincide con éste.

(d) Si  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico, la topología definida por los filtros de entornos de  $X$  coincide con  $\mathcal{T}$ .

**Ejercicio 4.** *Topologías definidas por operador de clausura.*

Un operador  $\overline{(\cdot)} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  que verifica las siguientes propiedades:

C1:  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ ,

C2:  $A \subseteq \overline{A}, \forall A \in \mathcal{P}(X)$ ,

C3:  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}, \forall A \in \mathcal{P}(X),$

C4:  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \forall A, B \in \mathcal{P}(X),$

se llama un operador de clausura.

(a) Probar que si se tiene un operador de clausura, se tiene en  $X$  una topología definida por

$$U \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \overline{X - U} = X - U.$$

*Observación:* Lo que estamos haciendo es definir la topología por sus cerrados, esto es,

$$F \text{ es cerrado} \iff \overline{F} = F.$$

(b) Probar que si  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico, la fórmula

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \supseteq A \\ F \text{ cerrado}}} F$$

define un operador de clausura.

(c) Probar que si se parte de un operador clausura en un espacio  $X$  y se construye una topología como en (a), el operador clausura definido a partir de esta topología (como en (b)) es el original.

(d) Probar que si se parte de un espacio topológico  $X$  y se define un operador clausura como en (b), la topología definida a partir de este operador (como en (a)) es la original de  $X$ .

**Ejercicio 5.** Probar que si  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico, la fórmula

$$\overline{A} = \{x \in X : U \cap A \neq \emptyset \ \forall U \in \mathcal{T} \text{ tal que } x \in U\}$$

define un operador de clausura. Probar que este operador de clausura coincide con el definido en la parte (b) del ejercicio anterior. Es decir, probar que para todo  $A \subset X$ ,

$$\{x \in X : U \cap A \neq \emptyset \ \forall U \in \mathcal{T}, x \in U\} = \bigcap_{\substack{F \supseteq A \\ F \text{ cerrado}}} F.$$

**Ejercicio 6.** Probar que  $\bigcup_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha}$  y mostrar que la inclusión puede ser estricta.

**Ejercicio 7.** Decidir cuáles de las siguientes igualdades son ciertas, y en caso de ser falsas determinar si se verifica alguna de las inclusiones.

(a)  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$

(b)  $\overline{\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha}.$

(c)  $\overline{A - B} = \overline{A} - \overline{B}.$

**Ejercicio 8.** Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $A \subseteq X$ .

- (a) Demostrar que  $\overline{A^c} = (A^c)^\circ$ .
- (b) Demostrar que  $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$ .

**Bases y sub-bases de topologías**

**Ejercicio 9.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico y sea  $\mathcal{B} = \mathcal{T}$ .

- (a) Demostrar que  $\mathcal{B}$  es base para una topología en  $X$ .
- (b) Demostrar que  $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \mathcal{T}$ .

**Ejercicio 10.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico y sea  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$  tal que para todo  $U \in \mathcal{T}$  y para todo  $x \in U$  existe  $A \in \mathcal{C}$  tal que  $x \in A \subseteq U$ .

- (a) Demostrar que  $\mathcal{C}$  es base para una topología en  $X$ .
- (b) Demostrar que  $\mathcal{T}_{\mathcal{C}} = \mathcal{T}$ .

**Ejercicio 11.** Sea  $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha \in A}$  una colección de topologías en  $X$ .

- (a) Probar que existe una única topología en  $X$  que es la menor de todas las topologías que contienen a todas las topologías  $\mathcal{T}_\alpha$  ( $\alpha \in A$ ).
- (b) Si  $X = \{a, b, c\}$ ,  $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$  y  $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ , encontrar la topología mencionada en el ítem anterior.

**Ejercicio 12.** Probar que si  $\mathcal{B}$  es base de una topología en  $X$ , entonces la topología generada por  $\mathcal{B}$  es igual a la intersección de todas las topologías que contienen a  $\mathcal{B}$ . Probar que vale lo mismo si  $\mathcal{B}$  es una sub-base.

**Ejercicio 13.** Considerar las siguientes colecciones de subconjuntos de  $\mathbb{R}$ :

- $\mathcal{B}_1 = \{(a, b) : a < b\}$ ,
- $\mathcal{B}_2 = \{[a, b) : a < b\}$ ,
- $\mathcal{B}_3 = \{(a, b] : a < b\}$ ,
- $\mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_1 \cup \{B \setminus K : B \in \mathcal{B}_1\}$ , donde  $K = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ ,
- $\mathcal{B}_5 = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ , donde  $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ ,
- $\mathcal{B}_6 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$ , donde  $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ ,
- $\mathcal{B}_7 = \{B : \mathbb{R} \setminus B \text{ es finito}\}$ .

- (a) Probar que cada  $\mathcal{B}_i$  es una base para una topología en  $\mathbb{R}$ .  
*Notación:* Notaremos  $\mathbb{R}_i$  al espacio topológico  $\mathbb{R}$  con la topología definida por  $\mathcal{B}_i$ .
- (b) Comparar las siete topologías entre sí.
- (c) Probar que  $\mathcal{B}_5 \cup \mathcal{B}_6$  es una sub-base que genera la misma topología que  $\mathcal{B}_1$ .

**Ejercicio 14.** Sea  $(X, \leq)$  un conjunto totalmente ordenado con más de un elemento. Para cada  $x \in X$ , definimos los segmentos  $S_x = \{y \in X : y < x\}$  y  $R_x = \{y \in X : x < y\}$ . Sean  $\mathcal{S} = \{S_x : x \in X\}$  y  $\mathcal{R} = \{R_x : x \in X\}$ . Probar que  $\mathcal{S} \cup \mathcal{R}$  es una sub-base para la topología del orden en  $X$ .

**Ejercicio 15.** Considerar el conjunto  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  con la topología del orden del diccionario. Determinar la clausura de los siguientes subconjuntos de  $X$ .

$$A = \{(1/n, 0) : n \in \mathbb{N}\},$$

$$B = \{(1 - 1/n, 1/2) : n \in \mathbb{N}\},$$

$$C = \{(x, 0) : 0 < x < 1\},$$

$$D = \{(x, 1/2) : 0 < x < 1\},$$

$$E = \{(1/2, y) : 0 < y < 1\}.$$

**Ejercicio 16.** Determinar la clausura del conjunto  $K = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$  en cada una de las siete topologías definidas en el ejercicio 13.

### Redes

**Ejercicio 17.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico. Probar que las redes convergentes verifican las siguientes propiedades:

R1: Si  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  es eventualmente constante, entonces  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  converge a la constante.

R2: Si  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  converge a  $x$ , entonces toda sub-red de  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  converge a  $x$ .

R3: Si  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  verifica que toda sub-red tiene una sub-sub-red que converge a  $x$ , entonces  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  converge a  $x$ .

R4: Sean  $\Lambda$  un conjunto dirigido, y para cada  $\alpha \in \Lambda$  sea  $\Gamma_\alpha$  un conjunto dirigido. Supongamos que para cada  $\alpha \in \Lambda$  se tiene una red  $(x_k^\alpha)_{k \in \Gamma_\alpha}$ , que converge a  $x^\alpha \in X$ , y además  $(x^\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  converge a  $x \in X$ . Consideremos  $\Phi = \Lambda \times \prod_{\alpha \in \Lambda} \Gamma_\alpha$  ordenado por el orden producto, esto es,

$$(\alpha, (k_\beta)_{\beta \in \Lambda}) \geq (\alpha', (k'_\beta)_{\beta \in \Lambda}) \iff \alpha \geq \alpha' \text{ y } k_\beta \geq k'_\beta \forall \beta \in \Lambda.$$

Entonces la red  $(\alpha, (k_\beta)_{\beta \in \Lambda}) \mapsto x_{k_\alpha}^\alpha$  converge a  $x$ .

### Funciones continuas

**Ejercicio 18.** Sean  $X, Y$  espacios topológicos y sea  $f : X \rightarrow Y$  una función. Demostrar que las siguientes proposiciones son equivalentes.

(a)  $f$  es continua.

(b) Para todo  $F \subseteq Y$  cerrado se tiene que  $f^{-1}(F)$  es cerrado en  $X$ .

(c) Para todo  $x \in X$ , y para todo  $A \in \mathcal{F}_{f(x)}$  existe  $B \in \mathcal{F}_x$  tal que  $f(B) \subseteq A$ .

(d) Para toda red  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subset X$  tal que  $x_\alpha \rightarrow x$ , se tiene que  $f(x_\alpha) \rightarrow f(x)$ .

(e) Para todo  $A \subseteq X$ ,  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ .

- (f) Si  $\mathcal{B}$  es una base para la topología de  $Y$ ,  $f^{-1}(B)$  es abierto en  $X$  para todo  $B \in \mathcal{B}$ .
- (g) Si  $\mathcal{S}$  es una sub-base para la topología de  $Y$ ,  $f^{-1}(S)$  es abierto en  $X$  para todo  $S \in \mathcal{S}$ .

**Ejercicio 19.**

- (a) Sean  $X, Y$  conjuntos totalmente ordenados con la topología del orden. Demostrar que si  $f : X \rightarrow Y$  es biyectiva y preserva el orden, entonces  $f$  es un homeomorfismo.
- (b) Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Sea  $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $g(x) = \sqrt[n]{x}$ . Probar que  $g$  es un homeomorfismo.
- (c) Sea  $X = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$  con la topología euclídea. Definimos  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Probar que  $f$  es biyectiva y preserva el orden. ¿Es  $f$  un homeomorfismo? ¿Contradice esto lo demostrado en el ítem (a)? ¿Por qué?

**Ejercicio 20.** Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $Y$  un conjunto totalmente ordenado con la topología del orden. Sean  $f, g : X \rightarrow Y$  funciones continuas.

- (a) Probar que el conjunto  $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$  es cerrado en  $X$ .
- (b) Sea  $h : X \rightarrow Y$  la función  $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ . Probar que  $h$  es continua.

**Ejercicio 21.** Sea  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  una colección de subconjuntos del espacio topológico  $X$  tal que  $X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ . Sea  $f : X \rightarrow Y$  y supongamos que  $f|_{A_\alpha}$  es continua para cada  $\alpha \in \mathcal{A}$ .

- (a) Probar que si cada  $A_\alpha$  es abierto, entonces  $f$  es continua.
- (b) Probar que si  $\mathcal{A}$  es finito y cada conjunto  $A_\alpha$  es cerrado, entonces  $f$  es continua.
- (c) Encontrar un ejemplo donde la colección  $\mathcal{A} = \mathbb{N}$ , cada  $A_\alpha$  es cerrado, pero  $f$  no es continua.
- (d) Una familia  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  se dice localmente finita si para cada  $x \in X$  existe un abierto  $U \subseteq X$ ,  $x \in U$ , tal que  $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$  sólo para finitos valores de  $\alpha$ . Mostrar que si la familia  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  es localmente finita y cada  $A_\alpha$  es cerrado, entonces  $f$  es continua.

**Topologías dadas por una métrica**

**Ejercicio 22.** Mostrar que  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  con la topología del orden del diccionario es metrizable (i.e. existe una métrica tal que la topología que induce la métrica coincide con la dada).

**Ejercicio 23.** Sea  $\mathbb{R}^\omega$  el conjunto de las sucesiones de números reales. Se define en  $\mathbb{R}^\omega$  la topología uniforme de la siguiente manera:

Primero se define en  $\mathbb{R}$  la métrica acotada  $\bar{d}(a, b) = \min\{|a - b|, 1\}$  (nota: induce la misma topología que la usual). Luego se define en  $\mathbb{R}^\omega$  la métrica uniforme como

$$d((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \bar{d}(a_n, b_n).$$

- (a) Verificar que la métrica uniforme es efectivamente una métrica.

- (b) Decidir si las siguientes funciones  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^\omega$  son continuas tomando en  $\mathbb{R}$  la topología usual, y en  $\mathbb{R}^\omega$  la topología uniforme.

$$\begin{aligned} f(t) &= (t, 2t, 3t, \dots), \\ g(t) &= (t, t, t, \dots), \\ h(t) &= (t, \frac{1}{2}t, \frac{1}{3}t, \dots). \end{aligned}$$

- (c) Decidir si las siguientes sucesiones convergen en  $\mathbb{R}^\omega$  con la topología uniforme.

$$\begin{array}{llll} w_1 = (1, 1, 1, 1, \dots), & x_1 = (1, 1, 1, 1, \dots), & y_1 = (1, 0, 0, 0, \dots), & z_1 = (1, 1, 0, 0, \dots), \\ w_2 = (0, 2, 2, 2, \dots), & x_2 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots), & y_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots), & z_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots), \\ w_3 = (0, 0, 3, 3, \dots), & x_3 = (0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots), & y_3 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \dots), & z_3 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, \dots), \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

- (d) Calcular la clausura del conjunto de las sucesiones eventualmente cero con respecto a la topología uniforme de  $\mathbb{R}^\omega$ .