Introducción al Álgebra Lineal

Año 2016

Práctica 1: Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

Ejercicio 1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales mediante operaciones elementales en las ecuaciones.

$$(a)\ \begin{cases} -x + y - z = 1 \\ -2x + y + 3z = 10 \\ 3x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$(b)\ \begin{cases} y + 2z = 6 \\ 3x - 3y - 3z = -15 \\ x + 3y + 3z = 11 \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} 3y + z = -9 \\ 3x + y = -8 \\ 3x + 7y + 2z = -26 \end{cases}$$

Ejercicio 2. Resolver los sistemas de ecuaciones lineales del ejercicio anterior mediante sustitución.

Ejercicio 3. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales aplicando el método de eliminación de Gauss-Jordan.

$$(a)\ \begin{cases} -x + y - z = 1 \\ -2x + y + 3z = 10 \\ 3x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$(b)\ \begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3 = 5 \\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$$

$$(d)\ \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = -5 \\ x_1 - x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_3 = -2 \end{cases}$$

Ejercicio 4. En cada uno de los siguientes items hallar todos los valores de a tales que el sistema dado tenga solución única, infinitas soluciones o no tenga solución.

$$(a)\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 4 \\ 4x_1 + 10x_2 = a \end{cases}$$

$$(b)\ \begin{cases} 3x_1 - x_2 + ax_3 = 2 \\ x_1 + 3ax_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 5. Hallar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el siguiente sistema tiene infinitas soluciones y resolver el sistema para cada uno de los valores de a hallados.

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -4 \\ & & a^2x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & a \end{array} \right.$$

Ejercicio 6. Hallar $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ pase por los puntos $(1, 4)$, $(-1, 6)$ y $(2, 9)$.

Ejercicio 7. Hallar un polinomio $P(x)$ de grado menor o igual a 3 tal que $P(0) = 1$, $P(1) = 5$, $P(2) = 15$ y $P(-1) = -9$.

Ejercicio 8. Considere el sistema homogéneo

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} a_1x_1 & + & b_1x_2 & = & 0 \\ a_2x_1 & + & b_2x_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

(*a*) Demuestre que si $x_1 = c$ y $x_2 = d$ es solución para ese sistema, también lo es $x_1 = k * c$ y $x_2 = k * d$ para cualquier k constante.

(*b*) Compruebe que si $x_1 = c$, $x_2 = d$, $x_1 = c'$, $x_2 = d'$ son dos soluciones, entonces también lo es $x_1 = c + c'$ y $x_2 = d + d'$.

Ejercicio 9. Hallar $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2}$$

para todo $x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$.

Ejercicio 10. A una alumna se le asigna una nueva habitación. Al preparar sus libros, observa que si coloca 7 libros en cada caja, dejará uno afuera. Por otro lado, si pone 8 libros en cada caja, entonces la última caja sólo contiene un libro. Determine la cantidad de cajas y libros que la alumna posee.

Ejercicio 11. Calcule la longitud de cada lado de un triángulo isósceles cuyo perímetro es 16 metros, y la diferencia de longitud de dos de sus lados es de 2 metros.

Ejercicio 12. Ariel, Bárbara y Cecilia van juntos a cenar. Ariel come dos hamburguesas y un pancho y toma dos gaseosas. Bárbara come una hamburguesa y un pancho y toma una gaseosa. Cecilia come dos panchos y toma una gaseosa. Al terminar, piden las cuentas por separado. Ariel debe pagar \$32, Bárbara \$19 y Cecilia \$17. ¿Cuáles son los precios de la hamburguesa, del pancho y de la gaseosa?

Ejercicio 13. Tres máquinas de tornillos (A,B,C) producen juntas 84 tornillos por día. El doble de la producción de la máquina A es igual a la tercera parte de lo producido por las otras dos máquinas juntas. La máquina B produce 12 piezas más que la mitad de la producción de las otras dos juntas. ¿Cuál es la producción diaria de cada una?

Ejercicio 14. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

y $E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Efectuar, cuando sea posible, los siguientes cálculos:

(a) BC

(b) AB

(c) $BA - C$

(d) $AE + 3C$

Ejercicio 15. En cada uno de los siguientes items, determinar todas las matrices B que verifican la ecuación dada.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} . B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} . B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} . B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 16. Hallar todas las matrices $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} . A = A . \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 17. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Hallar todas las matrices $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ tales que $AB = I$.

(b) ¿Existe alguna matriz $C \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ tal que $CA = I$?

Ejercicio 18. Determinar cuáles de las siguientes matrices son inversibles y exhibir la inversa cuando exista.

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(e) $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 19. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A^2 + A + I = 0$. Demostrar que A es inversible y que $A^{-1} = -I - A$.

Ejercicio 20. Demostrar

(a) Compruebe que si A y B conmutan, entonces $(AB)^2 = A^2B^2$

(*b*) Demuestre que si A y B son matrices cuadradas del mismo tamano, entonces $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ si y sólo si $AB = BA$

(*c*) Forme dos matrices, A y B de 2 x 2, tales que $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

Ejercicio 21. ¿Verdadero o falso? Justifique sus elecciones. La matriz A es invertible si

(*a*) Su forma escalonada reducida es I

(*b*) Hay una matriz B tal que $AB = I$

(*c*) Hay una matriz C tal que $AC = I$

(*d*) Cada fila y cada columna de A tienen un pivote.

(*e*) A^T es un producto de matrices elementales.

Ejercicio 22. Calcular los determinantes de las siguientes matrices.

(*a*) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(*b*) $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

(*c*) $D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 23. En cada uno de los siguientes items hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que $\det(A) = 0$.

(*a*) $A = \begin{pmatrix} 2 & k+4 \\ k-2 & -4 \end{pmatrix}$

(*b*) $A = \begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ 0 & k^2-1 & 2 \\ 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 24. Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Sabiendo que $\det(A) = 3$, calcular los determinantes de las siguientes matrices.

(*a*) $\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

(*b*) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{pmatrix}$

Ejercicio 25. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Calcular:

(*a*) $\det(AB)$ (*b*) $\det(A+B)$ (*c*) $\det(A^{10})$ (*d*) $\det(A^5B - A^5)$

Ejercicio 26. Decidir si las siguientes matrices son inversibles sin calcular la matriz inversa.

$(a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$(b)\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$(c)\ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 27. Determinar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la siguiente matriz es inversible.

$(a)\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & x & x+1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 28. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, determine la matriz X tal que $2X - 4B = 3A$.

Ejercicio 29. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Calcular $\operatorname{adj}(A)$.

(b) Calcular A^{-1}.

Ejercicio 30. En cada uno de los siguientes items determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que el sistema dado tenga solución única.

$(a)\ \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + kx_3 = 2 \end{cases}$

$(b)\ \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ (2k-2)x_1 + 2kx_2 + x_3 = 0 \\ (k+2)x_1 + (k-3)x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

$(c)\ \begin{cases} 3x_1 - x_2 + kx_3 = 2 \\ x_1 + 3kx_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$