Introducción al Álgebra Lineal

Año 2014

Práctica 2: Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

Ejercicio 1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales aplicando el método de eliminación de Gauss.

$$(a)\ \begin{cases} -x+y-z=1 \\ -2x+y+3z=10 \\ 3x+y+2z=3 \end{cases}$$

$$(b)\ \begin{cases} y+2z=6 \\ 3x-3y-3z=-15 \\ x+3y+3z=11 \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} 3y+z=-9 \\ 3x+y=-8 \\ 3x+7y+2z=-26 \end{cases}$$

$$(d)\ \begin{cases} 3x+y+3z=15 \\ -x+3y-z=-5 \\ 2x+4y+2z=9 \end{cases}$$

$$(e)\ \begin{cases} -x_1+3x_2-2x_3=-17 \\ -2x_1-3x_2=14 \\ -3x_1-x_2-2x_3=1 \end{cases}$$

$$(f)\ \begin{cases} x_1+x_2-3x_3=2 \\ -3x_1+x_2+x_3=6 \end{cases}$$

$$(g)\ \begin{cases} \frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+x_3=5 \\ -\frac{1}{3}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{3}x_3=-\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$(h)\ \begin{cases} 3x_2+x_3-x_4=3 \\ x_1+x_2-2x_3=6 \\ -2x_1+x_2+2x_3-x_4=9 \end{cases}$$

$$(i)\ \begin{cases} x_1+3x_2+x_3-x_4=0 \\ 3x_1+x_2+3x_3=-2 \\ 2x_1+6x_2+2x_3-2x_4=2 \end{cases}$$

$$(j)\ \begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_2+x_3=1 \\ x_3+x_4=1 \\ x_1+x_4=1 \end{cases}$$

$$(k)\ \begin{cases} x_1+x_3+x_4=-5 \\ x_1-x_3+x_4=-1 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=-3 \\ 2x_1+2x_3=-2 \end{cases}$$

$$(l)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 8x_2 & & & + & 7x_4 & & & = & 9 \\ -2x_1 & + & 16x_2 & - & x_3 & - & 20x_4 & & & = & -24 \\ 2x_1 & - & 16x_2 & + & 6x_3 & + & 50x_4 & + & x_5 & = & 51 \end{array}\right.$$

$$(m)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & & & + & 4x_3 & + & 5x_4 & & & = & 0 \\ -2x_1 & - & x_2 & - & 10x_3 & - & 16x_4 & & & = & -6 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 20x_3 & + & 46x_4 & + & x_5 & = & 33 \end{array}\right.$$

$$(n)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 6x_1 & & & - & x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 6x_4 & = & -6 \\ 16x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 & - & 4x_4 & = & 12 \end{array}\right.$$

$$(\tilde{n})\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & & & + & x_4 & = & -1 \\ & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & & & = & -3 \end{array}\right.$$

$$(o)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & + & 2x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & 4 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & -2 \end{array}\right.$$

$$(p)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$(q)\left\{\begin{array}{crcrcrcrcr} & x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ - & x_1 & & & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ & x_1 & + & x_2 & & & & & = & 0 \end{array}\right.$$

Ejercicio 2. En cada uno de los siguientes items hallar todos los valores de a tales que el sistema dado tenga solución única, infinitas soluciones o no tenga solución.

$$(a)\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & = & 4 \\ 4x_1 & + & ax_2 & = & 8 \end{array}\right.$$

$$(b)\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 10x_2 & = & a \end{array}\right.$$

$$(c)\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & 3 \\ ax_1 & + & 4x_2 & = & 5 \end{array}\right.$$

$$(d)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & (a^2-8)x_3 & = & a \end{array}\right.$$

Ejercicio 3. Ariel, Bárbara y Cecilia van juntos a cenar. Ariel come dos hamburguesas y un pancho y toma dos gaseosas. Bárbara come una hamburguesa y un pancho y toma una gaseosa. Cecilia come dos panchos y toma una gaseosa. Al terminar, piden las cuentas por separado. Ariel debe pagar \$32, Bárbara \$19 y Cecilia \$17. ¿Cuáles son los precios de la hamburguesa, del pancho y de la gaseosa?

Ejercicio 4. Hallar $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ pase por los puntos $(1, 4)$, $(-1, 6)$ y $(2, 9)$.

Ejercicio 5. Hallar un polinomio $P(x)$ de grado menor o igual a 3 tal que $P(0) = 1$, $P(1) = 5$, $P(2) = 15$ y $P(-1) = -9$.

Ejercicio 6. En la combustión completa del metano ($\mathrm{CH_4}$), éste reacciona con oxígeno para dar como productos dióxido de carbono y agua. La ecuación química correspondiente es

$$a\,\mathrm{CH_4} + b\,\mathrm{O_2} \longrightarrow c\,\mathrm{CO_2} + d\,\mathrm{H_2O}$$

Balancear la ecuación anterior.

Ejercicio 7. El principal proceso en la producción del vino es la fermentación de la uva. Esta se produce cuando el azúcar de la uva reacciona con el oxígeno del aire para formar alcohol etílico, dióxido de carbono y agua, según la siguiente ecuación química

$$a\,\mathrm{C_6H_{12}O_6} + b\,\mathrm{O_2} \longrightarrow c\,\mathrm{C_2H_6O} + d\,\mathrm{CO_2} + e\,\mathrm{H_2O}$$

Balancear esta ecuación.

Ejercicio 8. Hallar $A, B \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{x-1}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Ejercicio 9. Hallar $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2}$$

para todo $x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$.

Ejercicio 10. Un químico desea preparar 24 cm^3 de una solución que contenga los líquidos A, B, C en partes iguales. Dispone de un recipiente donde hay A y C mezclados por partes iguales; otro en el que hay A y B mezclados en la proporción 2 : 3 y un tercero en el que hay B y C mezclados en la proporción 1 : 2. ¿Cuántos cm^3 de cada recipiente debe mezclar para obtener la solución deseada?
Nota: las cantidades X e Y están en proporción 2 : 3 si $\dfrac{X}{Y} = \dfrac{2}{3}$.

Ejercicio 11. Un auto viaja a 40 km/h si va cuesta arriba, a 80 km/h si va cuesta abajo y a 60 km/h en los demás casos. Tarda 5 horas y 30 minutos para ir de A a B y 5 horas para volver de B a A. La longitud del camino entre A y B es de 290 km. ¿Qué longitud tiene el camino cuesta arriba de A a B, qué longitud tiene el camino cuesta abajo de A a B y qué longitud tiene el camino llano entre A y B?

Ejercicio 12. Un auto viaja a 60 km/h si va cuesta arriba, a 90 km/h si va cuesta abajo y a 72 km/h en los demás casos. Tarda 5 horas para ir de A a B y 4 horas para volver de B a A. ¿Qué longitud tiene el camino entre A y B?

Ejercicio 13. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,
$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Efectuar, cuando sea posible, los siguientes cálculos:

(*a*) BA

(*b*) BC

(*c*) CB

(*d*) AB

(*e*) $BA - C$

(*f*) ED

(*g*) DA

(*h*) $EA + D$

(*i*) $AE + 3C$

Ejercicio 14. En cada uno de los siguientes items, determinar todas las matrices B que verifican la ecuación dada.

(*a*) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} . B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

(*b*) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(*c*) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} . B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(*d*) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} . B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

(*e*) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} . B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(*f*) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} . B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 15. Hallar todas las matrices $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} . A = A . \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 16. En cada uno de los siguientes items, hallar todas las matrices $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que $AX + B = BX + A$.

(*a*) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

(*b*) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 17. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(*a*) Hallar todas las matrices $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ tales que $AB = I$.

(*b*) ¿Existe alguna matriz $C \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ tal que $CA = I$?

Ejercicio 18. Determinar cuáles de las siguientes matrices son inversibles y exhibir la inversa cuando exista.

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(e) $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 19. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A^2 + A + I = 0$. Demostrar que A es inversible y que $A^{-1} = -I - A$.

Ejercicio 20. Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Sea $\mathcal{S}_0 = \{x \in \mathbb{R}^4 \ / \ Ax^t = 0\}$. Hallar todos los $x \in \mathcal{S}_0$ tales que $Bx^t = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 21. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.
Hallar dos vectores no paralelos v y w que pertenezcan al conjunto $\{x \in \mathbb{R}^4 \ / \ ABx^t = 0 \text{ y } Bx^t \neq 0\}$.

Ejercicio 22. Se sabe que $(1,3,1)$, $(2,2,4)$ y $(2,0,4)$ son soluciones de un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo $\mathcal{S}$.

(a) Hallar dos vectores no paralelos v y w que sean soluciones del sistema homogéneo asociado a $\mathcal{S}$.

(b) Hallar cuatro soluciones del sistema no homogéneo $\mathcal{S}$, distintas de las tres dadas.

(c) Demostrar que para todos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha + \beta + \gamma = 1$ se tiene que el vector $\alpha(1,3,1) + \beta(2,2,4) + \gamma(2,0,4)$ es una solución del sistema no homogéneo $\mathcal{S}$.

Ejercicio 23. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y sean $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^{3\times 1}$. Se sabe que $(0,2,2)$ y $(2,1,1)$ son soluciones de $Ax^t = b_1$ y que $(1,1,2)$ es solución de $Ax^t = b_2$.

(a) Hallar tres soluciones distintas del sistema $Ax^t = b_1 + b_2$.

(b) Hallar la ecuación paramétrica de una recta L de $\mathbb{R}^3$ tal que todo punto de L sea solución del sistema $Ax^t = b_1 + b_2$.

$(*)$**Ejercicio 24.** Hallar todas las matrices $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que para toda matriz $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ vale que $AB = BA$.

Ejercicio 25. Calcular los determinantes de las siguientes matrices.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

(f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & -5 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

(g) $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(h) $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 26. Calcular los determinantes de las siguientes matrices usando propiedades.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 27. En cada uno de los siguientes items hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que $\det(A) = 0$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & k+4 \\ k-2 & -4 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ 0 & k^2-1 & 2 \\ 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 28. Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Sabiendo que $\det(A) = 3$, calcular los determinantes de las siguientes matrices.

(a) $\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+3a_{11} & a_{22}+3a_{12} & a_{23}+3a_{13} \\ 4a_{31} & 4a_{32} & 4a_{33} \end{pmatrix}$

Ejercicio 29. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Calcular:

(a) $\det(AB)$ (b) $\det(A+B)$ (c) $\det(A^{10})$ (d) $\det(A^5B - A^5)$

Ejercicio 30. Decidir si las siguientes matrices son inversibles sin calcular la matriz inversa.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 31. Determinar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales las siguientes matrices son inversibles.

(a) $A = \begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ 2 & x-2 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & x & x+1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} x+1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & x-4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 32. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\det(A) = 5$. Calcular

(a) $\det(A^{-1})$ (b) $\det(2A)$ (c) $\det(3A^{-1})$ (d) $\det((3A)^{-1})$

Ejercicio 33. Demostrar que los siguientes sistemas tienen solución única.

(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_3 = 3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 2 \\ -x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

Ejercicio 34. En cada uno de los siguientes items determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que el sistema dado tenga solución única.

(a) $\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + kx_3 = 2 \end{cases}$

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ (2k-2)x_1 & + & 2kx_2 & + & x_3 & = & 0 \\ (k+2)x_1 & + & (k-3)x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$(c) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & - & x_2 & + & kx_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 3kx_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \end{array} \right.$$

Ejercicio 35. Hallar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el siguiente sistema tiene infinitas soluciones y resolver el sistema para cada uno de los valores de a hallados.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -4 \\ & & a^2x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & a \end{array} \right.$$

Ejercicio 36. En cada uno de los siguientes items determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que el sistema dado: (i) tenga solución única, (ii) tenga infinitas soluciones, (iii) no tenga solución.

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & & & + & x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ (k^2-3)x_1 & & & - & x_3 & = & k^2+k-1 \end{array} \right.$$

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & (k^2-8)x_3 & = & k+14 \end{array} \right.$$

Ejercicio 37. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & a+1 & a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}$. Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $Ax^t = x^t$ admite alguna solución no trivial.

Ejercicio 38. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Calcular adj(A).

(b) Calcular A^{-1}.