Introducción al Álgebra Lineal

Año 2016

Práctica 2: Vectores

Ejercicio 1. Sean $A = (2, 4)$ y $B = (5, 3)$.

(a) Hallar un vector equivalente al vector $\overrightarrow{AB}$ con origen en $(-1, 1)$.

(b) Hallar un vector equivalente al vector $\overrightarrow{AB}$ con extremo en $(3, -1)$.

(c) Graficar el vector $\overrightarrow{AB}$ y todos los vectores hallados en los items anteriores en un mismo sistema de ejes cartesianos.

Ejercicio 2. En cada uno de los siguientes casos hallar un punto Q tal que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea equivalente al vector $\overrightarrow{PQ}$.

(a) $A = (1, 2)$, $B = (-1, 3)$, $P = (4, 4)$.

(b) $A = (0, 0)$, $B = (3, 2)$, $P = (1, -1)$.

Ejercicio 3. Sean $A = (3, 2)$, $B = (-1, 5)$ y $C = (2, 2)$, vectores de $\mathbb{R}^2$.

(a) Calcular $A + B$, $-2A + 2B$, $3C + B$ y $B - C$.

(b) Graficar todos los vectores en un mismo sistema de ejes cartesianos.

Ejercicio 4. Determine

(a) (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tal que:

1) x+y=(5,0)
2) 2x-3y=(-10,15)

(b) x,y y z pertenecientes a $\mathbb{R}$ tal que $(a, b, c) = x * (1, 0, 0) + y * (0, 1, 0) + z * (0, 0, 1)$.

Ejercicio 5. Graficar en el plano el conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \|(x, y)\| = 1\}$.

Ejercicio 6.

(a) Sea $A = (1, k, 0)$. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que $\|A\| = 2$.

(b) Sea $B = k(2, 2, 1)$. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que $\|B\| = 1$.

(c) Sean $P = (1, 1, 1)$ y $Q = (k, -k, 2)$. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que $d(P, Q) = 2$.

Ejercicio 7. Sean $v = (2, -1, 1)$; $w = (1, 0, 2)$ y $u = (-2, -2, 1)$. Calcular.

(a) $\|v\| + \|w\|$ (b) $\|3v + 3u\|$ (c) $\left\|\frac{1}{\|w\|}w\right\|$

Ejercicio 8. En cada uno de los siguientes items encontrar los dos vectores unitarios que tienen la misma dirección que el vector A.

(a) $A = (2, -3, 6)$

(b) $A = (a, b, c)$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

Ejercicio 9. Sean $A = (1, 2, 1)$ y $B = (1, 0, -1)$. Hallar un vector de longitud 5, de origen $(0, 0, 0)$ y que tenga la misma dirección y sentido que el vector $\overrightarrow{AB}$.

Ejercicio 10. Sean $A = (1, 1, 1)$; $B = (1, -1, 0)$; $C = (2, -1, -1)$; $D = (2, 3, -1)$ y $E = (-1, 0, 2)$. Calcular:

(a) $\langle A, B\rangle$

(b) $\langle A, B + C\rangle$

(c) $\langle A, 2B - 3C\rangle$

(d) $\langle D, A + E\rangle$

Ejercicio 11. ¿ Es verdad que si $\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle$ y $u \neq \overrightarrow{0}$, entonces $v = w$?

Ejercicio 12. Encontrar todos los vectores:

(a) (x, y) de $\mathbb{R}^2$ ortogonales a (-2, 3).

(b) (x, y) de $\mathbb{R}^2$ ortogonales a (1,1) y (1,-1).

(c) (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ ortogonales a (1,-1,-1) y (0,1,-1).

Ejercicio 13. Sean $A = (1, -2)$ y $B = (3, 4)$. Hallar todos los vectores (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tales que $\langle A, (x, y)\rangle = \langle A, B\rangle$. Graficar.

Ejercicio 14.

(a) Encontrar un vector ortogonal a $(1, 1)$ de longitud 8. ¿Es único?

(b) Encontrar todos los vectores ortogonales a $(0, 0, 1)$ de longitud 1. Dibujarlos.

Ejercicio 15. En cada uno de los siguientes items hallar el ángulo que forman los vectores A y B

(a) $A = (1, 1)$, $B = (-1, 0)$

(b) $A = (1, 2)$, $B = (-2, 1)$

(c) $A = (1, \sqrt{3})$, $B = (-2, 2\sqrt{3})$

(d) $A = (2, 1, 1)$, $B = (1, -1, 2)$

Ejercicio 16.

(a) Sea $A = (1, 1)$. Hallar todos los $B \in \mathbb{R}^2$ tal que el ángulo entre A y B sea $\frac{\pi}{4}$ y $\|B\| = 1$.

(b) Sea $A = (-1, 0)$. Hallar todos los $B \in \mathbb{R}^2$ tal que el ángulo entre A y B sea $\frac{\pi}{3}$ y $\|B\| = 2$.

Ejercicio 17. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $A \in \mathbb{R}^n$ un vector de norma 3. Sea $B \in \mathbb{R}^n$ un vector que forma un ángulo de $45°$ con A y tal que $A - B$ es ortogonal a A. Calcular $\|B\|$.

Ejercicio 18. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $A, B \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que

(*a*) $\|A - B\| = \|A + B\|$ si y sólo si $\langle A, B\rangle = 0$.

(*b*) $\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2$ si y sólo si $\langle A, B\rangle = 0$.

Interpretar ambas proposiciones geométricamente.

Ejercicio 19. Sean $A = (1, 2, 2)$, $B = (-1, 1, 2)$ y $C = (-2, 2, -1)$. Calcular:

(*a*) $A \times C$

(*b*) $B \times C$

(*c*) $(A \times B) \times C$

(*d*) $\langle A \times B, C\rangle$

Ejercicio 20. Sean $A = (2, -1, -2)$ y $B = (-3, 2, 4)$. Hallar un vector de $\mathbb{R}^3$ que sea ortogonal a A y a B y que tenga longitud 5. ¿Es único?

Ejercicio 21. Sea $A = (2, 1, 5)$.

(*a*) Determinar si existe $B \in \mathbb{R}^3$ tal que $A \times B = (2, 1, -1)$.

(*b*) Determinar si existe $B \in \mathbb{R}^3$ tal que $A \times B = (3, 1, -1)$.

(*c*) Para cada uno de los items anteriores responder las siguientes preguntas.

1) En caso de existir, ¿es única la solución?
2) ¿Se puede determinar la existencia o no existencia de B sin calcularlo? ¿Cómo?

Ejercicio 22. Sean $A = (1, 0, 1)$ y $C = (-2, 1, 2)$. Determinar todos los $B \in \mathbb{R}^3$ tales que $A \times B = C$ y $\langle A, B\rangle = 1$.

Ejercicio 23. Sean $A = (2, 2, 0)$ y $B = (x, y, z)$. Determinar una condición necesaria y suficiente sobre x, y, z para que $A \times B = 0$

Ejercicio 24.

(*a*) Sean $A = (1, 1, 0)$, $B = (1, 3, 2)$ y $C = (2, -1, 1)$. Calcular el área del paralelogramo que tiene por dos de sus lados a los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

(*b*) Sean $A = (1, 1)$ y $B = (3, 0)$. Calcular el área del paralelogramo de vértices O, A, B y $A + B$. Graficar.

(*c*) Calcular el área del triángulo de vértices $A = (1, 3, -2)$, $B = (1, 5, 0)$ y $C = (1, 1, -2)$.

Ejercicio 25.

(*a*) Encontrar una ecuación paramétrica de la recta que pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(2, 3)$.

(*b*) Encontrar una ecuación paramétrica de la recta que pasa por el origen y es paralela a la recta que contiene a los puntos $A = (2, -2, 1)$ y $B = (-3, 2, 1)$.

(c) Encontrar ecuaciones paramétricas de dos rectas distintas L_1 y L_2 que pasen por $(3, 2, -1)$ y sean perpendiculares a la recta de ecuación: $X = t(2, 2, -2) + (1, 0, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 26. Encontrar la intersección de los siguientes pares de rectas.

(a) $L_1 : X = t(2, -2, 1) + (3, 0, 2)$, $t \in \mathbb{R}$ y $L_2 : X = t(2, 1, -1) + (-1, 1, 2)$, $t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 27. Calcule la proyección ortogonal de u sobre v.

(a) $u = (2, 3)$, $v = (-2, 1)$

(b) $u = (0, -1, 6)$, $v = (-1, -3, 5)$

(c) $u = (-2, -1, 0, 1)$, $v = (0, 0, -1, 3)$

Ejercicio 28. Sean $v, w \in \mathbb{R}^n$ con $v \neq 0$. Demostrar que $w - p_v(w)$ es perpendicular a v.

Ejercicio 29. Sea L la recta de ecuación paramétrica $X = t\,.\,(2, -1) + (1, -3)$, $t \in \mathbb{R}$ y sea $P = (-4, 1)$.

(a) Hallar las coordenadas del punto de la recta L que se encuentra a menor distancia de P.

(b) Calcular $d(P, L)$.

Ejercicio 30. Hallar una ecuación del plano perpendicular al vector N que contiene al punto P.

(a) $N = (1, 2, -1)$; $P = (5, 3, 3)$.

Ejercicio 31. En cada uno de los siguientes items, hallar una ecuación del plano que contiene a los puntos A, B y C.

(a) $A = (1, 1, 0)$; $B = (2, 3, 0)$; $C = (-1, -2, 0)$.

(b) $A = (2, -1, 3)$; $B = (2, 1, 1)$; $C = (1, 3, 2)$.

Ejercicio 32. Sea Π el plano de $\mathbb{R}^3$ descripto por la ecuación $x + y - 2z = 2$.

(a) Hallar dos puntos distintos de Π.

(b) Hallar un plano Π_2 paralelo a Π que pase por el punto $P = (1, 1, -2)$.

Ejercicio 33. Sea L la recta de $\mathbb{R}^3$ de ecuación paramétrica $X = t(1, -1, 3) + (0, 2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ y sea $A = (1, 2, -3)$.

(a) Hallar una ecuación del plano Π que contiene a la recta L y al punto A.

(b) Hallar una ecuación de la recta L' que es perpendicular a Π y que pasa por el punto A.

(c) Calcular $L \cap \Pi$ y $L' \cap \Pi$.

Ejercicio 34. Sea Π el plano de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $2x - y + 4z = 6$.

(a) Encontrar una ecuación de la recta L perpendicular al plano Π y que pasa por el punto $R = (-1, 3, 2)$.

(b) Sea Q el punto de intersección de la recta L con el plano Π. Hallar las coordenadas de Q.

(c) Calcular $\|R - Q\|$ y $d(R, \Pi)$.

Ejercicio 35. Sea $A = (2, -3)$ y sea L la recta definida por la ecuación $X = t(3, 4)$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Sea P el punto de la recta L que está a menor distancia de A. Hallar las coordenadas del punto P.

(b) Calcular $\langle P - A, (3, 4)\rangle$. Interpretar el resultado geométricamente.

Ejercicio 36.

(a) Describir el conjunto de puntos P de $\mathbb{R}^3$ tales que $d(P, (1, 1, 0)) = 1$.

(b) Describir el conjunto de puntos P de $\mathbb{R}^3$ tales que P pertenece al plano de ecuación $z = 0$ y $d(P, (1, 1, 0)) = 1$.