Introducción al Álgebra Lineal

Año 2017

Práctica 2: Matrices y Determinantes

Ejercicio 1. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

Efectuar, cuando sea posible, los siguientes cálculos:

(*a*) $B + C$

(*b*) $A - 3B$

(*c*) $BA - C$

(*d*) $B \cdot C$

(*e*) $A \cdot 2B$

(*f*) $(1/2) \cdot C \cdot A$

(*g*) $A^t \cdot B$

(*h*) $(C \cdot A)^t$

(*i*) $4 \cdot A^t - C$

(*j*) $B^t + 4C$

Ejercicio 2. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, compruebe las siguientes propiedades:

(*a*) $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

(*b*) $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$

(*c*) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

Ejercicio 3. Un proyecto de investigación nutricional tiene como base de estudio a adultos y niños de ambos sexos. La composición de los participantes está dada por la matriz:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \textit{Adultos} & \textit{Ninos} \end{array} \\ \text{A=} & \begin{pmatrix} 80 & 120 \\ 100 & 200 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \textit{Hombres} \\ \textit{Mujeres} \end{array} \end{array}$$

El número de gramos diario de proteínas, grasa y carbohidratos que consume cada niño y adulto está dado por la matriz:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \textit{Prot.} & \textit{Grasa} & \textit{Carb.} \end{array} \\ \text{B=} & \begin{pmatrix} 20 & 20 & 20 \\ 10 & 20 & 30 \end{pmatrix} \begin{array}{r} \textit{Adultos} \\ \textit{Ninos} \end{array} \end{array}$$

(*a*) ¿Cuántos gramos de proteínas ingieren diaramiente todos los hombres (niños y adultos) del proyecto?

(*b*) ¿Cuántos gramos de grasas consumen a diario todas las mujeres (niñas y adultas) del proyecto?

Ejercicio 4. Hallar las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema:

$2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

X+Y=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 5. En cada uno de los siguientes items, determinar todas las matrices B que verifican la ecuación dada.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} . B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} . B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} . B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 6. Hallar todas las matrices $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} . A = A . \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 7. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Hallar todas las matrices $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ tales que $AB = I$.

(b) ¿Existe alguna matriz $C \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ tal que $CA = I$?

Ejercicio 8. Aplicando la definición de matriz inversa, encontrar, si es posible, la inversa de cada una de las siguientes matrices.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

(e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

Ejercicio 9. Determinar cuáles de las siguientes matrices son inversibles y en caso afirmativo calcular su inversa con el método de Gauss-Jordan.

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(e) $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 10. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A^2 + A + I = 0$. Demostrar que A es inversible y que $A^{-1} = -I - A$.

Ejercicio 11. Demostrar que si A y B son matrices cuadradas del mismo orden, entonces $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ si y sólo si $AB = BA$

Ejercicio 12. ¿Verdadero o falso? Justifique sus elecciones.

(a) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, la matriz X que cumple $3X - 2A = 5B$ es $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Las matrices A y B de orden 2, que cumplen $2A+B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $A-B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ son respectivamente: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad, entonces $B = (A - I)^2$ es la matriz nula de orden 2.

(d) Sea A una matriz de orden n, A es invertible si su forma escalonada reducida es una matriz identidad de orden n.

(e) Siendo A una matriz de orden mxn, A^t su matriz traspuesta y λ un escalar cualquiera, entonces $(\lambda A)^t = \lambda(A^t)$.

Ejercicio 13. Calcular los determinantes de las siguientes matrices.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 14. Calcular el valor de x en la ecuación $det(A) = 2$ siendo
$A = \begin{pmatrix} x-2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 15. Siendo $A^t = (1\ 2\ 3)$, calcula el determinante de la matriz $A^t \cdot A$.

Ejercicio 16. En cada uno de los siguientes items hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que $\det(A) = 0$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & k+4 \\ k-2 & -4 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ 0 & k^2-1 & 2 \\ 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 17. Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Sabiendo que $\det(A) = 3$, calcular los determinantes de las siguientes matrices.

(a) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{pmatrix}$

Ejercicio 18. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Calcular:

(*a*) $\det(AB)$ (*b*) $\det(A+B)$ (*c*) $\det(A^{10})$ (*d*) $\det(A^5B - A^5)$

Ejercicio 19. Decidir si las siguientes matrices son inversibles sin calcular la matriz inversa.

(*a*) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ (*b*) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 20. Determinar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la siguiente matriz es inversible.

(*a*) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & x & x+1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 21. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, determine la matriz X tal que $2X - 4B = 3A$.

Ejercicio 22. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(*a*) Calcular $\operatorname{adj}(A)$.

(*b*) Calcular A^{-1}.