
Introducción al Álgebra Lineal

Año 2012

Práctica 3: Espacios vectoriales

Ejercicio 1. En cada uno de los siguientes items decidir si el subconjunto S es un subespacio del espacio \mathbb{V} que se indica.

(a) $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / 2x_1 - 5x_2 = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$.

(b) $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_2 = 1\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$.

(c) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_2 = x_3 + x_2\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.

(d) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1^2 - 4x_3^2 = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.

(e) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 / x_1 - 3x_3 + x_4 = 0 \text{ y } 2x_2 + x_4 - x_5 = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$.

(f) $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / 2x_1 - 4x_2 \leq 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$.

(g) $S = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

(h) $S = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / A \text{ tiene alguna fila nula}\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Ejercicio 2. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Demostrar que $S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax^t = 0\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^n .

Ejercicio 3. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Demostrar que $S = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} / A.X = X.A\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Ejercicio 4. Sea \mathbb{V} un espacio vectorial y sean $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$.

(a) Demostrar que $S_1 = \{\alpha v_1 / \alpha \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de \mathbb{V} .

(b) Demostrar que $S_2 = \{\alpha v_1 + \beta v_2 / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de \mathbb{V} .

Ejercicio 5. Sea \mathbb{V} un espacio vectorial y sean $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{V}$. Sea $S = \text{Gen}(\{v_1, v_2, \dots, v_n\})$. Demostrar que S es un subespacio de \mathbb{V} .

Ejercicio 6. En cada uno de los siguientes items decidir si el vector v pertenece al subespacio S que se indica.

(a) $v = (\frac{3}{2}, 3, \frac{9}{4})$, $S = \text{Gen}(\{(2, 4, 3)\})$.

(b) $v = (1, 0, 1)$, $S = \text{Gen}(\{(1, 2, 3), (4, -1, 2)\})$.

(c) $v = (4, -1, 7)$, $S = \text{Gen}(\{(1, -1, 2), (2, 1, 3)\})$.

(d) $v = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \text{Gen} \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$.

(e) $v = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \text{Gen} \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$.

Ejercicio 7. En cada uno de los siguientes items decidir si conjunto A genera el espacio vectorial \mathbb{V} .

(a) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $A = \{(1, -1, 1), (0, 1, -1), (0, 0, 1), (1, 2, 3)\}$.

(b) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(c) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$, $A = \{(1, 1, 1, -1), (0, -1, 1, 2), (1, 1, 0, 1), (3, 2, 1, 2)\}$.

(d) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$, $A = \{(2, 2, 1, 0), (1, 0, 1, 3), (1, 1, 0, 1), (3, 2, 4, -5)\}$.

Ejercicio 8. En cada uno de los siguientes items decidir si el conjunto A de vectores del espacio \mathbb{V} indicado es linealmente independiente o linealmente dependiente.

(a) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $A = \{(1, -1, 1), (0, 1, -1), (0, 0, 1), (1, 2, 3)\}$.

(b) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $A = \{(1, -2, 1), (3, 1, -1), (7, 0, -1)\}$.

(c) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(d) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(e) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$, $A = \{(1, 1, 1, -1), (0, -1, 1, 2), (1, 1, 0, 1), (3, 2, 1, 2)\}$.

(f) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$, $A = \{(2, 2, 1, 0), (1, 0, 1, 3), (1, 1, 0, 1), (3, 2, 4, -5)\}$.

Ejercicio 9.

(a) Sean $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ y sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Demostrar que el conjunto $\{(a, b), (c, d)\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

(b) Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ y sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ la matriz cuyas columnas son los vectores u, v y w (en ese orden). Demostrar que el conjunto $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

Ejercicio 10. Hallar tres vectores u, v, w de \mathbb{R}^3 tales que el conjunto $\{u, v, w\}$ sea linealmente dependiente pero los conjuntos $\{u, v\}$, $\{u, w\}$, $\{v, w\}$ sean linealmente independientes.

Ejercicio 11. En cada uno de los siguientes items hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que el conjunto dado sea linealmente independiente.

(a) $\{(0, 1, 3), (-1, 1, k), (1, -2, 0)\}$.

(b) $\{(1, -1, 2), (k, k-1, k+6), (k-1, k, 1)\}$.

(c) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $A = \left\{ \begin{pmatrix} k-1 & k+1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & k+1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & k \end{pmatrix} \right\}$.

Ejercicio 12. Sea \mathbb{V} un espacio vectorial. Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ tales que el conjunto $\{v_1, v_2\}$ es linealmente independiente.

- (a) Sea $w \in \text{Gen}(\{v_1, v_2\})$. Decidir si $\{v_1, v_2, w\}$ es linealmente independiente o linealmente dependiente.
- (b) Sea $u \in \mathbb{V}$. Demostrar que si $u \notin \text{Gen}(\{v_1, v_2\})$ entonces $\{v_1, v_2, u\}$ es linealmente independiente.

Ejercicio 13. Sea \mathbb{V} un espacio vectorial. Sean $u, v, w \in \mathbb{V}$ tales que el conjunto $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente.

- (a) Demostrar que el conjunto $\{2u + v + 2w, v + 3w, u + v + w\}$ es linealmente independiente.
- (b) Demostrar que el conjunto $\{u + 2v + 3w, u + v - w, 2u + 5w\}$ es linealmente independiente.

Ejercicio 14. Sea \mathbb{V} un espacio vectorial. Sean $u, v, w \in \mathbb{V}$ tales que el conjunto $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente.

- (a) Hallar todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que el conjunto $\{u + \alpha v + 5w, v + (\alpha + 1)w, u + v + 2w\}$ sea linealmente independiente.
- (b) Hallar todos los valores de $\beta \in \mathbb{R}$ tales que el conjunto $\{3u + v + \beta w, u - 2w, u + \beta v - 2w\}$ sea linealmente independiente.

Ejercicio 15. Hallar una base y la dimensión de cada uno de los siguientes subespacios.

- (a) $S = \{x \in \mathbb{R}^2 / 2x_1 - 5x_2 = 0\}$
- (b) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$
- (c) $S = \{x \in \mathbb{R}^5 / 2x_1 - 2x_3 = 2x_1 + x_2 + 2x_4 = x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0\}$
- (d) $S = \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 = x_3 + x_4 = 2x_2 + x_3\}$
- (e) $S = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
- (f) $S = \text{Gen}(\{(1, -1, 3), (3, 1, 1)\})$
- (g) $S = \text{Gen}(\{(2, 6, -1), (-1, -3, \frac{1}{2})\})$
- (h) $S = \text{Gen} \left(\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right\} \right)$

Ejercicio 16. Decidir, sin hacer cuentas, si los siguientes conjuntos ordenados de vectores son bases de \mathbb{R}^3 .

- (a) $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$
- (b) $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 0)\}$
- (c) $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$
- (d) $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 2, 2)\}$
- (e) $\{(1, 0, 1), (1, 2, 3), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$

Ejercicio 17. En cada uno de los siguientes items decidir si es posible extender el conjunto de vectores a una base de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. En caso afirmativo, extender el conjunto dado a una base de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ de dos formas distintas.

$$(a) \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(b) \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -7 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(c) \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejercicio 18. En cada uno de los siguientes items decidir si es posible extraer una base de \mathbb{R}^3 del conjunto de vectores dado. En caso afirmativo, extraer dos bases de \mathbb{R}^3 distintas del conjunto dado.

$$(a) \{(1, 0, 1), (1, 2, 3), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$$

$$(b) \{(1, 0, 1), (1, 2, 3), (3, 2, 5), (4, 4, 8)\}$$

$$(c) \{(2, 1, 1), (1, 2, 0), (0, 0, 3), (1, 4, 5)\}$$

Ejercicio 19. En cada uno de los siguientes items hallar dos bases distintas del espacio vectorial \mathbb{V} que contengan una base de S .

$$(a) \mathbb{V} = \mathbb{R}^3, S = \text{Gen}(\{(1, 0, 1), (1, 3, 3), (2, 3, 4)\}).$$

$$(b) \mathbb{V} = \mathbb{R}^4, S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \text{ y } 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 0\}.$$

$$(c) \mathbb{V} = \mathbb{R}^{2 \times 3}, S = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 3} / A_{11} + A_{12} = A_{13} - A_{23} = A_{11} + A_{12} - A_{13} + A_{23} = 0\}.$$

Ejercicio 20. Consideremos las siguientes bases de \mathbb{R}^3 : $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, $B' = \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ y $B'' = \{(-1, 1, 0), (4, -2, 1), (0, 0, 3)\}$.

(a) Hallar las coordenadas del vector $(2, 3, -1)$ con respecto a las bases B , B' y B'' .

(b) Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Hallar las coordenadas del vector (x, y, z) con respecto a las bases B , B' y B'' .

Ejercicio 21. Hallar las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ en la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ejercicio 22. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de \mathbb{R}^3 y sean w_1, w_2 y w_3 los vectores de \mathbb{R}^3 cuyas coordenadas en la base B son $(1, -2, 3)$, $(0, 2, -1)$ y $(0, 0, 2)$ respectivamente. Determinar si $\{w_1, w_2, w_3\}$ es linealmente independiente.

Ejercicio 23. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de \mathbb{R}^4 . Sea $k \in \mathbb{R}$ y sea

$$S_k = \text{Gen}(\{v_1 - v_2, v_1 + v_4, 3v_1 + v_2 + kv_4\}).$$

Hallar todos los valores de k tales que $\dim(S_k) = 3$.

Ejercicio 24. Hallar base y dimensión de $S \cap T$.

$$(a) \begin{aligned} S &= \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\} \\ T &= \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - 2x_2 - x_3 = 0\} \end{aligned}$$

$$(b) \begin{aligned} S &= \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ T &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

$$(c) S = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\} \quad T = \langle (0, -3, 0), (1, 1, 1) \rangle$$

$$(d) S = \langle (1, 1, 2), (1, -2, 0) \rangle \quad T = \langle (4, 0, -2), (2, 0, -1) \rangle$$

Ejercicio 25. Hallar base y dimensión de $S + T$, para los subespacios del ejercicio anterior.

Ejercicio 26. Determinar en qué casos es $V = S \oplus T$ para los subespacios del ejercicio 24, donde V es respectivamente

$$(a) V = \mathbb{R}^4 \quad (b) V = \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (c) V = \mathbb{R}^3 \quad (d) V = \mathbb{R}^3$$

Ejercicio 27.

(a) Sean en \mathbb{R}^2 , $S = \langle (1, 1) \rangle$, $T = \langle (1, 3) \rangle$, $W = \langle (1, 0) \rangle$. Probar $\mathbb{R}^2 = S \oplus T = S \oplus W$.

$$(b) \text{ Determinar si } \mathbb{R}^{2 \times 2} = S \oplus T, \text{ donde } S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$T = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(c) Determinar si $\mathbb{R}^3 = S \oplus T$, donde $S = \{x \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 - x_2 + x_3 = x_2 = 0\}$
 $T = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_2 - 5x_3 = x_1 + x_2 = 0\}$

Ejercicio 28.

(a) Si $V = S \oplus T$, probar que $\dim V = \dim S + \dim T$. ¿Es cierta la recíproca?

(b) Probar que $V = S \oplus T$ si y sólo si para todo $v \in V$ existen únicos $s \in S$ y $t \in T$ tales que $v = s + t$.

Ejercicio 29. Hallar dos subespacios distintos T y T' tales que $V = S \oplus T = S \oplus T'$.

(a) $V = \mathbb{R}^{2 \times 3}$ $S = \left\langle \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{array} \right) \right\rangle$

(b) $V = \mathbb{R}^4$

$S = \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 - x_3 = 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\}$

(c) $V = \{x \in \mathbb{R}^4 / -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ $S = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0) \rangle$

Ejercicio 30. Sean $S = \left\langle \left(\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{array} \right) \right\rangle$ y

$T = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / a_{12} = a_{11} + 2a_{21} - a_{22} = 0\}$.

(a) Probar que $\mathbb{R}^{2 \times 2} = S \oplus T$.

(b) Escribir $w = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ como $w = s + t$ con $s \in S$ y $t \in T$.

(c) Escribir $w = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ como $w = s + t$ con $s \in S$ y $t \in T$.

Ejercicio 31. Sean en V los subespacios S y T . Hallar un subespacio W tal que $T \subseteq W$ y $V = S \oplus W$.

(a) $V = \mathbb{R}^3$

$S = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_2 + x_3 = x_1 + x_2 = 0\}$

$T = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 = x_2 - x_3 = 0\}$

(b) $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$S = \{X \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / x_{11} + x_{12} + x_{21} = x_{12} + x_{21} = \text{Tr}(X) = 0\}$

$T = \{X \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / x_{11} - x_{12} + x_{21} + 2x_{22} = x_{12} + x_{21} = x_{11} - 2x_{12} + 2x_{22} = 0\}$

Ejercicio 32. Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^4 / x_2 = x_1 - x_3 = 0\}$.

(a) Encontrar un subespacio $T \subseteq \mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente: $S \cap T = \langle (1, 0, 1, 1) \rangle$ y $S + T = \mathbb{R}^4$.

(b) ¿Puede elegirse T tal que $\dim T = 2$?

Ejercicio 33. Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_3 - x_4 = 0\}$.

(a) Encontrar un subespacio T de dimensión 2 tal que $\dim(S \cap T) = 1$.

(b) Para el subespacio T hallado en (a), caracterizar $W = S + T$. ¿Depende W de la elección de T realizada en (a)?