Introducción al Álgebra Lineal

Año 2013

Práctica 3: Espacios vectoriales

Ejercicio 1. En cada uno de los siguientes items decidir si el subconjunto S es un subespacio del espacio $\mathbb{V}$ que se indica.

(*a*) $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x_1 - 5x_2 = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$.

(*b*) $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x_2 = 1\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$.

(*c*) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - x_2 = x_3 + x_2\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.

(*d*) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1^2 - 4x_3^2 = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.

(*e*) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \,/\, x_1 - 3x_3 + x_4 = 0 \text{ y } 2x_2 + x_4 - x_5 = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^5$.

(*f*) $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x_1 - 4x_2 \leq 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$.

(*g*) $S = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \,/\, A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(*h*) $S = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \,/\, A \text{ tiene alguna fila nula}\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Ejercicio 2. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Demostrar que $\mathbb{S}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, Ax^t = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 3. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Demostrar que $S = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \,/\, A.X = X.A\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Ejercicio 4. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sean $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$.

(*a*) Demostrar que $S_1 = \{\alpha v_1 \,/\, \alpha \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

(*b*) Demostrar que $S_2 = \{\alpha v_1 + \beta v_2 \,/\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

Ejercicio 5. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sean $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{V}$. Sea $S = \mathrm{Gen}(\{v_1, v_2, \ldots, v_n\})$. Demostrar que S es un subespacio de $\mathbb{V}$.

Ejercicio 6. En cada uno de los siguientes items decidir si el vector v pertenece al subespacio S que se indica.

(*a*) $v = (\frac{3}{2}, 3, \frac{9}{4})$, $S = \mathrm{Gen}(\{(2, 4, 3)\})$.

(*b*) $v = (1, 0, 1)$, $S = \mathrm{Gen}(\{(1, 2, 3), (4, -1, 2)\})$.

(*c*) $v = (4, -1, 7)$, $S = \mathrm{Gen}(\{(1, -1, 2), (2, 1, 3)\})$.

(*d*) $v = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \mathrm{Gen}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$.

(*e*) $v = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \mathrm{Gen}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$.

Ejercicio 7. En cada uno de los siguientes items decidir si el conjunto A genera el espacio vectorial $\mathbb{V}$.

(a) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $A = \{(1,-1,1),(0,1,-1),(0,0,1),(1,2,3)\}$.

(b) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(c) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$, $A = \{(1,1,1,-1),(0,-1,1,2),(1,1,0,1),(3,2,1,2)\}$.

(d) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$, $A = \{(2,2,1,0),(1,0,1,3),(1,1,0,1),(3,2,4,-5)\}$.

Ejercicio 8. En cada uno de los siguientes items decidir si el conjunto A de vectores del espacio $\mathbb{V}$ indicado es linealmente independiente o linealmente dependiente.

(a) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $A = \{(1,-1,1),(0,1,-1),(0,0,1),(1,2,3)\}$.

(b) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $A = \{(1,-2,1),(3,1,-1),(7,0,-1)\}$.

(c) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(d) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(e) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$, $A = \{(1,1,1,-1),(0,-1,1,2),(1,1,0,1),(3,2,1,2)\}$.

(f) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$, $A = \{(2,2,1,0),(1,0,1,3),(1,1,0,1),(3,2,4,-5)\}$.

Ejercicio 9. Hallar tres vectores u, v, w de $\mathbb{R}^3$ tales que el conjunto $\{u,v,w\}$ sea linealmente dependiente pero los conjuntos $\{u,v\}$, $\{u,w\}$, $\{v,w\}$ sean linealmente independientes.

Ejercicio 10. En cada uno de los siguientes items hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que el conjunto dado sea linealmente independiente.

(a) $\{(0,1,3),(-1,1,k),(1,-2,0)\}$.

(b) $\{(1,-1,2),(k,k-1,k+6),(k-1,k,1)\}$.

(c) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = \left\{ \begin{pmatrix} k-1 & k+1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & k+1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & k \end{pmatrix} \right\}$.

Ejercicio 11. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ tales que el conjunto $\{v_1, v_2\}$ es linealmente independiente.

(a) Sea $w \in \text{Gen}(\{v_1, v_2\})$. Decidir si $\{v_1, v_2, w\}$ es linealmente independiente o linealmente dependiente.

(b) Sea $u \in \mathbb{V}$. Demostrar que si $u \notin \text{Gen}(\{v_1, v_2\})$ entonces $\{v_1, v_2, u\}$ es linealmente independiente.

Ejercicio 12.

(a) Sean $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ y sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Demostrar que el conjunto $\{(a,b),(c,d)\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

(b) Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ y sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz cuyas columnas son los vectores u, v y w (en ese orden). Demostrar que el conjunto $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

Ejercicio 13. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Sean $u, v, w \in \mathbb{V}$ tales que el conjunto $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente.

(a) Demostrar que el conjunto $\{2u + v + 2w, v + 3w, u + v + w\}$ es linealmente independiente.

(b) Demostrar que el conjunto $\{u + 2v + 3w, u + v - w, 2u + 5w\}$ es linealmente independiente.

Ejercicio 14. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Sean $u, v, w \in \mathbb{V}$ tales que el conjunto $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente.

(a) Hallar todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que el conjunto $\{u+\alpha v+5w, v+(\alpha+1)w, u+v+2w\}$ sea linealmente independiente.

(b) Hallar todos los valores de $\beta \in \mathbb{R}$ tales que el conjunto $\{3u + v + \beta w, u - 2w, u + \beta v - 2w\}$ sea linealmente independiente.

Ejercicio 15. Hallar una base y la dimensión de cada uno de los siguientes subespacios.

(a) $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x_1 - 5x_2 = 0\}$

(b) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$

(c) $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \,/\, 2x_1 - 2x_3 = 2x_1 + x_2 + 2x_4 = x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0\}$

(d) $S = \{x \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 = x_3 + x_4 = 2x_2 + x_3\}$

(e) $S = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,/\, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . X = X . \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

(f) $S = \mathrm{Gen}(\{(1,-1,3),(3,1,1)\})$

(g) $S = \mathrm{Gen}(\{(2,6,-1),(-1,-3,\frac{1}{2})\})$

(h) $S = \mathrm{Gen}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right\}\right)$

Ejercicio 16. Decidir, sin hacer cuentas, si los siguientes conjuntos ordenados de vectores son bases de $\mathbb{R}^3$.

(a) $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$

(b) $\{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,0)\}$

(c) $\{(1,0,1),(0,1,1),(0,2,2)\}$

(*d*) $\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\}$

(*e*) $\{(1,0,1),(1,2,3),(0,0,1),(1,1,1)\}$

Ejercicio 17. En cada uno de los siguientes items decidir si es posible extender el conjunto de vectores a una base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. En caso afirmativo, extender el conjunto dado a una base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ de dos formas distintas.

(*a*) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right\}$

(*b*) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}\right\}$

(*c*) $\left\{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

Ejercicio 18. En cada uno de los siguientes items decidir si es posible extraer una base de $\mathbb{R}^3$ del conjunto de vectores dado. En caso afirmativo, extraer dos bases de $\mathbb{R}^3$ distintas del conjunto dado.

(*a*) $\{(1,0,1),(1,2,3),(0,0,1),(1,1,1)\}$

(*b*) $\{(1,0,1),(1,2,3),(3,2,5),(4,4,8)\}$

(*c*) $\{(2,1,1),(1,2,0),(0,0,3),(1,4,5)\}$

Ejercicio 19. En cada uno de los siguientes items hallar dos bases distintas del espacio vectorial $\mathbb{V}$ que contengan una base de S.

(*a*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $S = \text{Gen}(\{(1,0,1),(1,3,3),(2,3,4)\})$.

(*b*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$, $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \text{ y } 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 0\}$.

(*c*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 3}$, $S = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 3} \,/\, A_{11} + A_{12} = A_{13} - A_{23} = A_{11} + A_{12} - A_{13} + A_{23} = 0\}$.

Ejercicio 20. Consideremos las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$: $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $B' = \{(0,1,0),(1,0,0),(0,0,1)\}$ y $B'' = \{(-1,1,0),(4,-2,1),(0,0,3)\}$.

(*a*) Hallar las coordenadas del vector $(2,3,-1)$ con respecto a las bases B, B' y B''.

(*b*) Sean $x,y,z \in \mathbb{R}$. Hallar las coordenadas del vector (x,y,z) con respecto a las bases B, B' y B''.

Ejercicio 21. Hallar las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ en la base
$B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right\}$.

Ejercicio 22. Sea $B = \{v_1,v_2,v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sean w_1, w_2 y w_3 los vectores de $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas en la base B son $(1,-2,3)$, $(0,2,-1)$ y $(0,0,2)$ respectivamente. Determinar si $\{w_1,w_2,w_3\}$ es linealmente independiente.

Ejercicio 23. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Sea $k \in \mathbb{R}$ y sea

$$S_k = \text{Gen}(\{v_1 - v_2\ ,\ v_1 + v_4\ ,\ 3v_1 + v_2 + kv_4\}).$$

Hallar todos los valores de k tales que $\dim(S_k) = 3$.

Ejercicio 24. En cada uno de los siguientes ítems hallar una base y la dimensión de $S \cap T$.

(*a*) $S = \{x \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}$
$T = \{x \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - 2x_2 - x_3 = 0\}$

(*b*) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$
$T = \text{Gen}\{(0, -3, 0), (1, 1, 1)\}$

(*c*) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + 2x_4 = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$
$T = \text{Gen}(\{(4, 0, 3, 1), (0, 1, 0, 1)\})$

(*d*) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + x_2 = 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$
$T = \text{Gen}(\{(0, 1, 1, 0), (2, 1, 0, 1)\})$

(*e*) $S = \text{Gen}\{(1, 1, 2), (1, -2, 0)\}$
$T = \text{Gen}\{(4, 0, -2), (2, 0, -1)\}$

(*f*) $S = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$
$T = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$

Ejercicio 25. Para cada uno de los ítems del ejercicio anterior hallar una base y la dimensión de $S + T$.

Ejercicio 26. Para cada uno de los ítems del ejercicio 24determinar en qué casos $\mathbb{V} = S \oplus T$ donde $\mathbb{V}$ es respectivamente:

(*a*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$
(*b*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$
(*c*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$
(*d*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$
(*e*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$
(*f*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$

Ejercicio 27.

(*a*) Sean S, T y W los subespacios de $\mathbb{R}^2$ definidos por $S = \text{Gen}\{(1, 1)\}$, $T = \text{Gen}\{(1, 3)\}$ y $W = \text{Gen}\{(1, 0)\}$. Demostrar que $\mathbb{R}^2 = S \oplus T$ y que $\mathbb{R}^2 = S \oplus W$.

(*b*) Sean S y T los subespacios de $\mathbb{R}^3$ definidos por

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x_1 - x_2 + x_3 = x_2 = 0\} \ \text{ y } \ T = \{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_2 - 5x_3 = x_1 + x_2 = 0\}\ .$$

Determinar si $\mathbb{R}^3 = S \oplus T$.

(c) Sean S y T los subespacios de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ definidos por

$$S = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } T = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \right\}.$$

Determinar si $\mathbb{R}^{2\times 2} = S \oplus T$.

Ejercicio 28. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sean S y T subespacios de $\mathbb{V}$. Demostrar que si $\mathbb{V} = S \oplus T$ entonces $\dim(\mathbb{V}) = \dim(S) + \dim(T)$. ¿Es cierta la recíproca?

Ejercicio 29. En cada uno de los siguientes ítems hallar dos subespacios distintos T y T' de $\mathbb{V}$ tales que $\mathbb{V} = S \oplus T = S \oplus T'$.

(a) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$

$S = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$

$S = \{x \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + x_2 - x_3 = 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\}$

(c) $\mathbb{V} = \{x \in \mathbb{R}^4 \,/\, -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$

$S = \text{Gen}\{(1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0)\}$

Ejercicio 30. Sean S y T los subespacios de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ definidos por

$$S = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } T = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,/\, A_{12} = A_{11} + 2A_{21} - A_{22} = 0\}.$$

(a) Demostrar que $\mathbb{R}^{2\times 2} = S \oplus T$.

(b) Escribir $w = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ como $w = s + t$ con $s \in S$ y $t \in T$.

(c) Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Escribir $w = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ como $w = s + t$ con $s \in S$ y $t \in T$.

Ejercicio 31. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sean S y T subespacios de $\mathbb{V}$. Demostrar que $\mathbb{V} = S \oplus T$ si y sólo si para todo $v \in \mathbb{V}$ existen únicos $s \in S$ y $t \in T$ tales que $v = s + t$.

Ejercicio 32. En cada uno de los siguientes ítems hallar un subespacio W de $\mathbb{V}$ tal que $W \supseteq T$ y $\mathbb{V} = S \oplus W$.

(a) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$

$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - x_2 + x_3 = x_1 + x_2 = 0\}$

$T = \{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = x_2 - x_3 = 0\}$

(*b*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,/\, a+b+c = b+c = a+d = 0 \right\}$$

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,/\, a-b+c+2d = b+c = a-2b+2d = 0 \right\}$$

Ejercicio 33. Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_2 = x_1 - x_3 = 0\}$

(*a*) Hallar un subespacio $T \subseteq \mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente que $S \cap T = \mathrm{Gen}\{(1,0,1,1)\}$ y $S + T = \mathbb{R}^4$. Verificar que el subespacio T hallado cumpla las condiciones pedidas.

(*b*) ¿Puede elegirse T tal que $\dim(T) = 2$?

Ejercicio 34. Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_3 - x_4 = 0\}$

(*a*) Hallar un subespacio $T \subseteq \mathbb{R}^4$ de dimensión 2 tal que $\dim(S \cap T) = 1$. Verificar que el subespacio T hallado cumpla las condiciones pedidas.

(*b*) Para el subespacio T hallado en el ítem (a) calcular $S + T$.

(*c*) ¿Depende $S + T$ de la elección del subespacio T hecha en el ítem (a)? ¿Por qué?

Ejercicio 35. Sean $S = \{x \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0\}$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_3 = 0\}$. Hallar un subespacio $W \subseteq \mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente que $W \subseteq T$, $\dim(W \cap S) = 1$ y $W + S = \mathbb{R}^4$. Verificar que el subespacio W hallado cumpla las condiciones pedidas.

Ejercicio 36. Sea $S = \mathrm{Gen}\{(0,-3,1,0),(1,1,1,1),(4,-2,6,4)\}$ y sea $T \subseteq \mathbb{R}^4$ un subespacio de dimensión 2 tal que $S \cap T = \{0\}$. Demostrar que $S_1 + S_2 = \mathbb{R}^4$.

Ejercicio 37. Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + x_2 = x_1 - x_3 - x_4 = 0\}$.

(*a*) Decidir si existe un subespacio $T \subseteq \mathbb{R}^4$ de dimensión 2 tal que $S \cap T = \mathrm{Gen}\{(1,0,1,1)\}$ y $S + T = \mathbb{R}^4$.

(*b*) Decidir si existe un subespacio $T \subseteq \mathbb{R}^4$ de dimensión 1 tal que $S + T = \mathbb{R}^4$.

(*c*) Decidir si existe un subespacio $T \subseteq \mathbb{R}^4$ de dimensión 3 tal que $S \cap T = \{0\}$.