# Introducción al Álgebra Lineal

*Año 2014*

**Práctica 3**: Espacios vectoriales

**Ejercicio 1.** En cada uno de los siguientes items decidir si el subconjunto $S$ es un subespacio del espacio $\mathbb{V}$ que se indica.

(*a*) $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x_1 - 5x_2 = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$.

(*b*) $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x_2 = 1\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$.

(*c*) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - x_2 = x_3 + x_2\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.

(*d*) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1^2 - 4x_3^2 = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.

(*e*) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \,/\, x_1 - 3x_3 + x_4 = 0 \text{ y } 2x_2 + x_4 - x_5 = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^5$.

(*f*) $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x_1 - 4x_2 \leq 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$.

(*g*) $S = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \,/\, A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(*h*) $S = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \,/\, A \text{ tiene alguna fila nula}\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{3\times 3}$.

**Ejercicio 2.** Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Demostrar que $\mathbb{S}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, Ax^t = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

**Ejercicio 3.** Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Demostrar que $S = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \,/\, A.\,X = X.\,A\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

**Ejercicio 4.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sean $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$.

(*a*) Demostrar que $S_1 = \{\alpha v_1 \,/\, \alpha \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

(*b*) Demostrar que $S_2 = \{\alpha v_1 + \beta v_2 \,/\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

**Ejercicio 5.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sean $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{V}$. Sea $S = \text{Gen}(\{v_1, v_2, \ldots, v_n\})$. Demostrar que $S$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

**Ejercicio 6.** En cada uno de los siguientes items decidir si el vector $v$ pertenece al subespacio $S$ que se indica.

(*a*) $v = (\frac{3}{2}, 3, \frac{9}{4})$, $S = \text{Gen}(\{(2, 4, 3)\})$.

(*b*) $v = (1, 0, 1)$, $S = \text{Gen}(\{(1, 2, 3), (4, -1, 2)\})$.

(*c*) $v = (4, -1, 7)$, $S = \text{Gen}(\{(1, -1, 2), (2, 1, 3)\})$.

(*d*) $v = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \text{Gen}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$.

(*e*) $v = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \text{Gen}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$.

**Ejercicio 7.** En cada uno de los siguientes items decidir si el conjunto $A$ genera el espacio vectorial $\mathbb{V}$.

(*a*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $A = \{(1,-1,1),(0,1,-1),(0,0,1),(1,2,3)\}$.

(*b*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(*c*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$, $A = \{(1,1,1,-1),(0,-1,1,2),(1,1,0,1),(3,2,1,2)\}$.

(*d*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$, $A = \{(2,2,1,0),(1,0,1,3),(1,1,0,1),(3,2,4,-5)\}$.

**Ejercicio 8.** En cada uno de los siguientes items decidir si el conjunto $A$ de vectores del espacio $\mathbb{V}$ indicado es linealmente independiente o linealmente dependiente.

(*a*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $A = \{(1,-1,1),(0,1,-1),(0,0,1),(1,2,3)\}$.

(*b*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $A = \{(1,-2,1),(3,1,-1),(7,0,-1)\}$.

(*c*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(*d*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(*e*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$, $A = \{(1,1,1,-1),(0,-1,1,2),(1,1,0,1),(3,2,1,2)\}$.

(*f*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$, $A = \{(2,2,1,0),(1,0,1,3),(1,1,0,1),(3,2,4,-5)\}$.

**Ejercicio 9.** Hallar tres vectores $u$, $v$, $w$ de $\mathbb{R}^3$ tales que el conjunto $\{u,v,w\}$ sea linealmente dependiente pero los conjuntos $\{u,v\}$, $\{u,w\}$, $\{v,w\}$ sean linealmente independientes.

**Ejercicio 10.** En cada uno de los siguientes items hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que el conjunto dado sea linealmente independiente.

(*a*) $\{(0,1,3),(-1,1,k),(1,-2,0)\}$.

(*b*) $\{(1,-1,2),(k,k-1,k+6),(k-1,k,1)\}$.

(*c*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = \left\{ \begin{pmatrix} k-1 & k+1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & k+1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & k \end{pmatrix} \right\}$.

**Ejercicio 11.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ tales que el conjunto $\{v_1, v_2\}$ es linealmente independiente.

(*a*) Sea $w \in \text{Gen}(\{v_1, v_2\})$. Decidir si $\{v_1, v_2, w\}$ es linealmente independiente o linealmente dependiente.

(*b*) Sea $u \in \mathbb{V}$. Demostrar que si $u \notin \text{Gen}(\{v_1, v_2\})$ entonces $\{v_1, v_2, u\}$ es linealmente independiente.

**Ejercicio 12.**

($a$) Sean $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ y sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Demostrar que el conjunto $\{(a,b),(c,d)\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

($b$) Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ y sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz cuyas columnas son los vectores $u$, $v$ y $w$ (en ese orden). Demostrar que el conjunto $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

**Ejercicio 13.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Sean $u, v, w \in \mathbb{V}$ tales que el conjunto $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente.

($a$) Demostrar que el conjunto $\{2u + v + 2w, v + 3w, u + v + w\}$ es linealmente independiente.

($b$) Demostrar que el conjunto $\{u + 2v + 3w, u + v - w, 2u + 5w\}$ es linealmente independiente.

**Ejercicio 14.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Sean $u, v, w \in \mathbb{V}$ tales que el conjunto $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente.

($a$) Hallar todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que el conjunto $\{u+\alpha v+5w, v+(\alpha+1)w, u+v+2w\}$ sea linealmente independiente.

($b$) Hallar todos los valores de $\beta \in \mathbb{R}$ tales que el conjunto $\{3u + v + \beta w, u - 2w, u + \beta v - 2w\}$ sea linealmente independiente.

**Ejercicio 15.** Hallar una base y la dimensión de cada uno de los siguientes subespacios.

($a$) $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x_1 - 5x_2 = 0\}$

($b$) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$

($c$) $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \,/\, 2x_1 - 2x_3 = 2x_1 + x_2 + 2x_4 = x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0\}$

($d$) $S = \{x \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 = x_3 + x_4 = 2x_2 + x_3\}$

($e$) $S = \left\{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,/\, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . X = X. \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

($f$) $S = \mathrm{Gen}(\{(1, -1, 3), (3, 1, 1)\})$

($g$) $S = \mathrm{Gen}(\{(2, 6, -1), (-1, -3, \frac{1}{2})\})$

($h$) $S = \mathrm{Gen}\left(\left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\right\}\right)$

**Ejercicio 16.** Decidir, sin hacer cuentas, si los siguientes conjuntos ordenados de vectores son bases de $\mathbb{R}^3$.

($a$) $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$

($b$) $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 0)\}$

($c$) $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 2, 2)\}$

(*d*) $\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\}$

(*e*) $\{(1,0,1),(1,2,3),(0,0,1),(1,1,1)\}$

**Ejercicio 17.** En cada uno de los siguientes items decidir si es posible extender el conjunto de vectores a una base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. En caso afirmativo, extender el conjunto dado a una base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ de dos formas distintas.

(*a*) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right\}$

(*b*) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -7 \end{pmatrix} \right\}$

(*c*) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

**Ejercicio 18.** En cada uno de los siguientes items decidir si es posible extraer una base de $\mathbb{R}^3$ del conjunto de vectores dado. En caso afirmativo, extraer dos bases de $\mathbb{R}^3$ distintas del conjunto dado.

(*a*) $\{(1,0,1),(1,2,3),(0,0,1),(1,1,1)\}$

(*b*) $\{(1,0,1),(1,2,3),(3,2,5),(4,4,8)\}$

(*c*) $\{(2,1,1),(1,2,0),(0,0,3),(1,4,5)\}$

**Ejercicio 19.** En cada uno de los siguientes items hallar dos bases distintas del espacio vectorial $\mathbb{V}$ que contengan una base de $S$.

(*a*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $S = \text{Gen}(\{(1,0,1),(1,3,3),(2,3,4)\})$.

(*b*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$, $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \text{ y } 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 0\}$.

(*c*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 3}$, $S = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 3} \,/\, A_{11} + A_{12} = A_{13} - A_{23} = A_{11} + A_{12} - A_{13} + A_{23} = 0\}$.

**Ejercicio 20.** Consideremos las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$: $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $B' = \{(0,1,0),(1,0,0),(0,0,1)\}$ y $B'' = \{(-1,1,0),(4,-2,1),(0,0,3)\}$.

(*a*) Hallar las coordenadas del vector $(2,3,-1)$ con respecto a las bases $B$, $B'$ y $B''$.

(*b*) Sean $x,y,z \in \mathbb{R}$. Hallar las coordenadas del vector $(x,y,z)$ con respecto a las bases $B$, $B'$ y $B''$.

**Ejercicio 21.** Hallar las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ en la base
$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$.

**Ejercicio 22.** Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sean $w_1$, $w_2$ y $w_3$ los vectores de $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas en la base $B$ son $(1,-2,3)$, $(0,2,-1)$ y $(0,0,2)$ respectivamente. Determinar si $\{w_1, w_2, w_3\}$ es linealmente independiente.

**Ejercicio 23.** Sea $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Sea $k \in \mathbb{R}$ y sea

$$S_k = \text{Gen}(\{v_1 - v_2\ ,\ v_1 + v_4\ ,\ 3v_1 + v_2 + kv_4\}).$$

Hallar todos los valores de $k$ tales que $\dim(S_k) = 3$.

**Ejercicio 24.** En cada uno de los siguientes ítems hallar una base y la dimensión de $S \cap T$.

(*a*) $S = \{x \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}$
$T = \{x \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - 2x_2 - x_3 = 0\}$

(*b*) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$
$T = \text{Gen}\{(0, -3, 0), (1, 1, 1)\}$

(*c*) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + 2x_4 = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$
$T = \text{Gen}(\{(4, 0, 3, 1), (0, 1, 0, 1)\})$

(*d*) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + x_2 = 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$
$T = \text{Gen}(\{(0, 1, 1, 0), (2, 1, 0, 1)\})$

(*e*) $S = \text{Gen}\{(1, 1, 2), (1, -2, 0)\}$
$T = \text{Gen}\{(4, 0, -2), (2, 0, -1)\}$

(*f*) $S = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$
$T = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$

**Ejercicio 25.** Para cada uno de los ítems del ejercicio anterior hallar una base y la dimensión de $S + T$.

**Ejercicio 26.** Para cada uno de los ítems del ejercicio 24determinar en qué casos $\mathbb{V} = S \oplus T$ donde $\mathbb{V}$ es respectivamente:

(*a*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$
(*b*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$
(*c*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$
(*d*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$
(*e*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$
(*f*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$

**Ejercicio 27.**

(*a*) Sean $S$, $T$ y $W$ los subespacios de $\mathbb{R}^2$ definidos por $S = \text{Gen}\{(1, 1)\}$, $T = \text{Gen}\{(1, 3)\}$ y $W = \text{Gen}\{(1, 0)\}$. Demostrar que $\mathbb{R}^2 = S \oplus T$ y que $\mathbb{R}^2 = S \oplus W$.

(*b*) Sean $S$ y $T$ los subespacios de $\mathbb{R}^3$ definidos por

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x_1 - x_2 + x_3 = x_2 = 0\} \ \text{ y } \ T = \{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_2 - 5x_3 = x_1 + x_2 = 0\}\ .$$

Determinar si $\mathbb{R}^3 = S \oplus T$.

($c$) Sean $S$ y $T$ los subespacios de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ definidos por

$$S = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right\} \;\text{ y }\; T = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\right\}.$$

Determinar si $\mathbb{R}^{2\times 2} = S \oplus T$.

**Ejercicio 28.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sean $S$ y $T$ subespacios de $\mathbb{V}$. Demostrar que si $\mathbb{V} = S \oplus T$ entonces $\dim(\mathbb{V}) = \dim(S) + \dim(T)$. ¿Es cierta la recíproca?

**Ejercicio 29.** En cada uno de los siguientes ítems hallar dos subespacios distintos $T$ y $T'$ de $\mathbb{V}$ tales que $\mathbb{V} = S \oplus T = S \oplus T'$.

($a$) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$

$S = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

($b$) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$

$S = \{x \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + x_2 - x_3 = 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\}$

($c$) $\mathbb{V} = \{x \in \mathbb{R}^4 \,/ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$

$S = \text{Gen}\{(1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0)\}$

**Ejercicio 30.** Sean $S$ y $T$ los subespacios de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ definidos por

$$S = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\} \;\text{ y }\; T = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,/\, A_{12} = A_{11} + 2A_{21} - A_{22} = 0\}.$$

($a$) Demostrar que $\mathbb{R}^{2\times 2} = S \oplus T$.

($b$) Escribir $w = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ como $w = s + t$ con $s \in S$ y $t \in T$.

($c$) Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Escribir $w = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ como $w = s + t$ con $s \in S$ y $t \in T$.

**Ejercicio 31.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sean $S$ y $T$ subespacios de $\mathbb{V}$. Demostrar que $\mathbb{V} = S \oplus T$ si y sólo si para todo $v \in \mathbb{V}$ existen únicos $s \in S$ y $t \in T$ tales que $v = s + t$.

**Ejercicio 32.** En cada uno de los siguientes ítems hallar un subespacio $W$ de $\mathbb{V}$ tal que $W \supseteq T$ y $\mathbb{V} = S \oplus W$.

($a$) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$

$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - x_2 + x_3 = x_1 + x_2 = 0\}$

$T = \{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = x_2 - x_3 = 0\}$

($b$) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,/\, a+b+c = b+c = a+d = 0 \right\}$$

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,/\, a-b+c+2d = b+c = a-2b+2d = 0 \right\}$$

**Ejercicio 33.** Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_2 = x_1 - x_3 = 0\}$

($a$) Hallar un subespacio $T \subseteq \mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente que $S \cap T = \mathrm{Gen}\{(1,0,1,1)\}$ y $S + T = \mathbb{R}^4$. Verificar que el subespacio $T$ hallado cumpla las condiciones pedidas.

($b$) ¿Puede elegirse $T$ tal que $\dim(T) = 2$?

**Ejercicio 34.** Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_3 - x_4 = 0\}$

($a$) Hallar un subespacio $T \subseteq \mathbb{R}^4$ de dimensión 2 tal que $\dim(S \cap T) = 1$. Verificar que el subespacio $T$ hallado cumpla las condiciones pedidas.

($b$) Para el subespacio $T$ hallado en el ítem (a) calcular $S + T$.

($c$) ¿Depende $S + T$ de la elección del subespacio $T$ hecha en el ítem (a)? ¿Por qué?

**Ejercicio 35.** Sean $S = \{x \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0\}$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_3 = 0\}$. Hallar un subespacio $W \subseteq \mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente que $W \subseteq T$, $\dim(W \cap S) = 1$ y $W + S = \mathbb{R}^4$. Verificar que el subespacio $W$ hallado cumpla las condiciones pedidas.

**Ejercicio 36.** Sea $S = \mathrm{Gen}\{(0,-3,1,0),(1,1,1,1),(4,-2,6,4)\}$ y sea $T \subseteq \mathbb{R}^4$ un subespacio de dimensión 2 tal que $S \cap T = \{0\}$. Demostrar que $S + T = \mathbb{R}^4$.

**Ejercicio 37.** Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + x_2 = x_1 - x_3 - x_4 = 0\}$.

($a$) Decidir si existe un subespacio $T \subseteq \mathbb{R}^4$ de dimensión 2 tal que $S \cap T = \mathrm{Gen}\{(1,-1,1,0)\}$ y $S + T = \mathbb{R}^4$.

($b$) Decidir si existe un subespacio $T \subseteq \mathbb{R}^4$ de dimensión 1 tal que $S + T = \mathbb{R}^4$.

($c$) Decidir si existe un subespacio $T \subseteq \mathbb{R}^4$ de dimensión 3 tal que $S \cap T = \{0\}$.