Topología General

Primer semestre de 2016

Práctica 3: Conexión y arcoconexión

Ejercicio 1. Sean $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ dos topologías en X. Si $\mathcal{T}' \supseteq \mathcal{T}$, ¿qué puede implicar la conexión de X en una de las topologías respecto de la conexión en la otra?

Ejercicio 2. Sea X un conjunto infinito y sea $\mathcal{T}$ la topología de complemento finito en X. Demostrar que $(X, \mathcal{T})$ es conexo.

Ejercicio 3. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$ un subconjunto. Definimos la *frontera de A* como $\partial A = \overline{A} - A^{\circ}$. ¿Es cierto que si X es conexo, entonces para todo subconjunto A de X propio no vacío se tiene $\partial A \neq \varnothing$? ¿Vale la recíproca?

Ejercicio 4. Sea X un espacio topológico y sea A un subconjunto de X. Sea C un subespacio conexo de X tal que $C \cap A \neq \varnothing$ y $C \cap (X - A) \neq \varnothing$. Demostrar que $C \cap \partial A \neq \varnothing$.

Ejercicio 5. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios conexos de X tales que $A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es conexo.

Ejercicio 6. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de subespacios conexos de X y sea A un subespacio conexo de X. Demostrar que si $A \cap A_\alpha \neq \varnothing$ para todo $\alpha \in \Lambda$, entonces $A \cup \displaystyle\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ es conexo.

Ejercicio 7. Considere los siguientes conjuntos con el orden lexicográfico y la topología del orden. Decidir cuáles son conexos.

(*a*) $\mathbb{N} \times [0,1)$ (*b*) $[0,1) \times \mathbb{N}$ (*c*) $[0,1) \times [0,1]$ (*d*) $[0,1] \times [0,1)$

Ejercicio 8.

(*a*) Sean X e Y espacios topológicos conexos. Demostrar que $X \times Y$ es conexo.

(*b*) Concluir que un producto finito de espacios topológicos conexos es conexo.

Ejercicio 9. Sean X e Y espacios topológicos y sea $q : X \to Y$ una función cociente. Supongamos que Y es conexo y que para todo $y \in Y$ el subespacio $q^{-1}(\{y\}) \subseteq X$ es conexo. Demostrar que X es conexo.

Ejercicio 10. Sea X un espacio topológico conexo y sea Y un espacio topológico totalmente disconexo. Demostrar que si $f : X \to Y$ es una función continua entonces f es constante.

Ejercicio 11.

(*a*) Mostrar que entre los espacios $(0,1), (0,1]$ y $[0,1]$ no hay dos homeomorfos.

(*b*) Supongamos que $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ son funciones subespacio (es decir, son iniciales e inyectivas). Mostrar que no necesariamente X e Y son homeomorfos.

Ejercicio 12.

(*a*) ¿Es el producto de espacios arcoconexos arcoconexo?

(*b*) Si $A \subseteq X$ y A es arcoconexo, ¿es $\overline{A}$ arcoconexo?

(*c*) Si $f : X \to Y$ es continua y X es arcoconexo, ¿es $f(X)$ arcoconexo?

Ejercicio 13. Mostrar que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$ no son homeomorfos si $n > 1$.

Ejercicio 14. Sea $K = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ y notemos por $-K$ al conjunto $\{-1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Determinar las componentes conexas y las componentes arcoconexas de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^2$.

$A = (K \times [0,1]) \cup (\{0\} \times [0,1])$.

$B = (A \setminus \{(0,1/2)\})$.

$C = B \cup ([0,1] \times \{0\})$.

$D = (K \times [0,1]) \cup (-K \times [-1,0]) \cup ([0,1] \times -K) \cup ([-1,0] \times K)$.

Ejercicio 15.

(*a*) Sea X un espacio topológico localmente arcoconexo. Demostrar que todo abierto conexo de X es arcoconexo.

(*b*) Concluir que si X es un espacio topológico localmente arcoconexo entonces X es conexo si y sólo si es arcoconexo.