Introducción al Álgebra Lineal

Año 2016

Práctica 3: Espacios vectoriales

Ejercicio 1. En cada uno de los siguientes items decidir si el subconjunto S es un subespacio del espacio $\mathbb{V}$ que se indica.

(*a*) $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x_1 - 5x_2 = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$.

(*b*) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - x_2 = x_3 + x_2\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.

(*c*) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1^2 - 4x_3^2 = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.

(*d*) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 = a - b, x_2 = b - c, x_3 = c - d, x_4 = d - a\}$ con a,b,c,d $\in \mathbb{R}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$.

(*e*) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \,/\, x_1 - 3x_3 + x_4 = 0 \;\text{ y }\; 2x_2 + x_4 - x_5 = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^5$.

(*f*) $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x_1 - 4x_2 \leq 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$.

(*g*) $S = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \,/\, A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Ejercicio 2. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Demostrar que $\mathbb{S}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, Ax^t = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 3. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Demostrar que $S = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \,/\, A.\,X = X.\,A\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Ejercicio 4. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sean $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$.

(*a*) Demostrar que $S_1 = \{\alpha v_1 \,/\, \alpha \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

(*b*) Demostrar que $S_2 = \{\alpha v_1 + \beta v_2 \,/\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

Ejercicio 5. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sean $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{V}$. Sea $S = \text{Gen}(\{v_1, v_2, \ldots, v_n\})$. Demostrar que S es un subespacio de $\mathbb{V}$.

Ejercicio 6. Determine si los conjuntos dados de n vectores son subespacios de $\mathbb{R}^n$.

(*a*) La recta determinada por los puntos cuyas coordenadas son: $(-1, -1)$, $(1, 1)$.

(*b*) El plano determinado por los puntos cuyas coordenadas son: $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(1, 1, 1)$.

Ejercicio 7. Sean $\mathbb{V}_1$ y $\mathbb{V}_2$ subespacios de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que la interseccion de $\mathbb{V}_1$ y $\mathbb{V}_2$ es también un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 8. En cada uno de los siguientes items decidir si el vector v pertenece al subespacio S que se indica.

(*a*) $v = (\frac{3}{2}, 3, \frac{9}{4})$, $S = \text{Gen}(\{(2, 4, 3)\})$.

(*b*) $v = (1, 0, 1)$, $S = \text{Gen}(\{(1, 2, 3), (4, -1, 2)\})$.

(*c*) $v = (4, 0, -4)$, $S = \text{Gen}(\{(1, 1, -1), (0, 1, 2), (-2, 1, 0)\})$.

(*d*) $v = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \text{Gen}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$.

(*e*) $v = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \text{Gen}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$.

Ejercicio 9. En cada uno de los siguientes items decidir si el conjunto A genera el espacio vectorial $\mathbb{V}$.

(*a*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $A = \{(1, -1, 1), (0, 1, -1), (0, 0, 1), (1, 2, 3)\}$.

(*b*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

(*c*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$, $A = \{(1, 1, 1, -1), (0, -1, 1, 2), (1, 1, 0, 1), (3, 2, 1, 2)\}$.

Ejercicio 10. Demuestre que los siguientes vectores pertenecen a $\text{Gen}\{v_1, v_2\})$

(*a*) $\vec{0}$

(*b*) v_1

(*c*) v_2

(*d*) $v_1 + v_2$

(*e*) $-2v_1$

(*f*) $3v_1 - 2v_2$

Ejercicio 11. En cada uno de los siguientes items decidir si el conjunto A de vectores del espacio $\mathbb{V}$ indicado es linealmente independiente o linealmente dependiente.

(*a*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $A = \{(1, -1, 1), (0, 1, -1), (0, 0, 1), (1, 2, 3)\}$.

(*b*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

(*c*) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$, $A = \{(2, 2, 1, 0), (1, 0, 1, 3), (1, 1, 0, 1), (3, 2, 4, -5)\}$.

Ejercicio 12. Compruebe que el conjunto $\{cos(x), sen(x)\}$ es linealmente independiente en $F(\mathbb{R})$. El conjunto $F(\mathbb{R})$ es el de todas las funciones de valor real definidas en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 13. Hallar tres vectores u, v, w de $\mathbb{R}^3$ tales que el conjunto $\{u, v, w\}$ sea linealmente dependiente pero los conjuntos $\{u, v\}$, $\{u, w\}$, $\{v, w\}$ sean linealmente independientes.

Ejercicio 14. En cada uno de los siguientes items hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que el conjunto dado sea linealmente independiente.

(*a*) $\{(0, 1, 3), (-1, 1, k), (1, -2, 0)\}$.

(*b*) $\{(1,-1,2),(k,k-1,k+6),(k-1,k,1)\}$.

(*c*) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^{2\times 2}$, $A=\left\{\begin{pmatrix} k-1 & k+1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & k+1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & k \end{pmatrix}\right\}$.

Ejercicio 15. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Sean $v_1,v_2\in\mathbb{V}$ tales que el conjunto $\{v_1,v_2\}$ es linealmente independiente.

(*a*) Sea $w\in\mathrm{Gen}(\{v_1,v_2\})$. Decidir si $\{v_1,v_2,w\}$ es linealmente independiente o linealmente dependiente.

(*b*) Sea $u\in\mathbb{V}$. Demostrar que si $u\notin\mathrm{Gen}(\{v_1,v_2\})$ entonces $\{v_1,v_2,u\}$ es linealmente independiente.

Ejercicio 16.

(*a*) Sean $(a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2$ y sea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Demostrar que el conjunto $\{(a,b),(c,d)\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\det(A)\neq 0$.

(*b*) Sean $u,v,w\in\mathbb{R}^3$ y sea $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz cuyas columnas son los vectores u, v y w (en ese orden). Demostrar que el conjunto $\{u,v,w\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\det(A)\neq 0$.

Ejercicio 17. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Sean $u,v,w\in\mathbb{V}$ tales que el conjunto $\{u,v,w\}$ es linealmente independiente.

(*a*) Hallar todos los valores de $\alpha\in\mathbb{R}$ tales que el conjunto $\{u+\alpha v+5w, v+(\alpha+1)w, u+v+2w\}$ sea linealmente independiente.

(*b*) Hallar todos los valores de $\beta\in\mathbb{R}$ tales que el conjunto $\{3u+v+\beta w, u-2w, u+\beta v-2w\}$ sea linealmente independiente.

Ejercicio 18. Hallar una base y la dimensión de cada uno de los siguientes subespacios.

(*a*) $S=\{x\in\mathbb{R}^2\,/\,2x_1-5x_2=0\}$

(*b*) $S=\{x\in\mathbb{R}^3\,/\,2x_1-x_2-x_3=0\}$

(*c*) $S=\{x\in\mathbb{R}^5\,/\,2x_1-2x_3=2x_1+x_2+2x_4=x_2+4x_3+2x_4=0\}$

(*d*) $S=\{x\in\mathbb{R}^4\,/\,x_1-x_2=x_3+x_4=2x_2+x_3\}$

(*e*) $S=\left\{X\in\mathbb{R}^{2\times 2}\,/\,\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.X=X.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

(*f*) $S=\mathrm{Gen}(\{(1,-1,3),(3,1,1)\})$

(*g*) $S=\mathrm{Gen}\left(\left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\right\}\right)$

Ejercicio 19. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar

(*a*) $\mathbb{R}^{10}$ tiene una base de 11 elementos.

(b) $\mathbb{R}^{10}$ tiene una base con sólo 10 elementos.

(c) $\mathbb{R}^{10}$ sólo tiene 10 elementos.

(d) $\mathbb{R}^{10}$ tiene un subespacio de dimensión 9.

(e) $\mathbb{R}^{10}$ sólo tiene un subespacio de dimensión 9.

(f) $\mathbb{R}^{10}$ es el único subespacio de dimensión 10 de $\mathbb{R}^{10}$.

(g) $\mathbb{R}^2$ es un subespacio bidimensional de $\mathbb{R}^{10}$.

Ejercicio 20. Decidir, sin hacer cuentas, si los siguientes conjuntos ordenados de vectores son bases de $\mathbb{R}^3$.

(a) $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$

(b) $\{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,0)\}$

(c) $\{(1,0,1),(0,1,1),(0,2,2)\}$

(d) $\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\}$

(e) $\{(1,0,1),(1,2,3),(0,0,1),(1,1,1)\}$

Ejercicio 21. En cada uno de los siguientes items decidir si es posible extender el conjunto de vectores a una base de $\mathbb{V}$. En caso afirmativo, extender el conjunto dado a una base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ de dos formas distintas.

(a) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$

(b) $\{(-1,0,1);(1,-1,0)\}$,$\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$

(c) $\{(-1,0,1,0);(1,-1,0,0);(0,-1,1,0)\}$,$\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$

Ejercicio 22. En cada uno de los siguientes items decidir si es posible extraer una base de $\mathbb{R}^3$ del conjunto de vectores dado. En caso afirmativo, extraer dos bases de $\mathbb{R}^3$ distintas del conjunto dado.

(a) $\{(1,0,1),(1,2,3),(0,0,1),(1,1,1)\}$

(b) $\{(1,0,1),(1,2,3),(3,2,5),(4,4,8)\}$

(c) $\{(2,1,1),(1,2,0),(0,0,3),(1,4,5)\}$

Ejercicio 23. Sea $\mathbb{V}$ el espacio generado por $v_1 = cos^2(x)$, $v_2 = sen^2(x)$, $v_3 = cos(2x)$

(a) Demuestre que $\mathbb{S} = \{v_1, v_2, v_3\}$ no es base para $\mathbb{V}$

(b) Halle una base para $\mathbb{V}$.

Ejercicio 24. Determine una base para los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$.

(a) El plano $3x - 2y + 5z = 0$.

(b) La recta determinada por los puntos $(0, y, z)$ tales que $y = -t$ y $z = 4t$ con $t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 25. Consideremos las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$: $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, $B' = \{(0,1,0), (1,0,0), (0,0,1)\}$ y $B'' = \{(-1,1,0), (4,-2,1), (0,0,3)\}$.

(a) Hallar las coordenadas del vector $(2, 3, -1)$ con respecto a las bases B, B' y B''.

(b) Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Hallar las coordenadas del vector (x, y, z) con respecto a las bases B, B' y B''.

Ejercicio 26. Hallar las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ en la base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$.

Ejercicio 27. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sean w_1, w_2 y w_3 los vectores de $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas en la base B son $(1, -2, 3)$, $(0, 2, -1)$ y $(0, 0, 2)$ respectivamente. Determinar si $\{w_1, w_2, w_3\}$ es linealmente independiente.

Ejercicio 28. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Sea $k \in \mathbb{R}$ y sea

$$S_k = \text{Gen}(\{v_1 - v_2\ ,\ v_1 + v_4\ ,\ 3v_1 + v_2 + kv_4\}).$$

Hallar todos los valores de k tales que $\dim(S_k) = 3$.