Introducción al Álgebra Lineal

Año 2014

Práctica 4: Transformaciones lineales

Ejercicio 1. Determinar cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales:

(*a*) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, f(x_1, x_2) = (0, x_1)$

(*b*) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, f(x_1, x_2) = (2x_1 - 5, x_1 + x_2)$

(*c*) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \,/\, f(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2, x_2, x_1)$

(*d*) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, f(x_1, x_2) = x_1.x_2$

(*e*) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{3\times 2} \,/\, f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 + x_2 \\ 0 & -x_2 \\ -x_1 & 0 \end{pmatrix}$

(*f*) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R} \,/\, f(A) = \det(A)$.

(*g*) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \langle x, v \rangle$ con $v \in \mathbb{R}^3$.

(*h*) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \,/\, f(x) = (A.x^t)^t$ con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Ejercicio 2.

(*a*) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 + x_3)$ y sean $v = (2, 3)$, $S = \text{Gen}\{(1, 2, 1)\}$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^2 \,/\, 3x_1 - 2x_2 = 0\}$. Describir $f(S)$, $f^{-1}(\{v\})$ y $f^{-1}(T)$.

(*b*) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, 0, x_2 + x_3, x_1 - x_2)\ .$$

Sean $S = \text{Gen}\{(1, 0, -2), (1, 1, 0)\}$, $T = \{x \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = x_2 + x_3 + 3x_4 = 0\}$, $v = (2, 0, 1, -1)$ y $w = (2, 3, 1, 1)$. Describir $f(S)$, $f^{-1}(\{v\})$, $f^{-1}(\{w\})$ y $f^{-1}(T)$.

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$f(x_1, x_2) = (-3x_1 + x_2, 6x_1 - 2x_2)\ .$$

(*a*) Decidir cuáles de los siguientes vectores pertenecen a $\text{Nu}(f)$:

- $(5, 15)$
- $(3, 4)$
- $(1, 1)$
- $(0, 0)$

(*b*) Decidir cuáles de los siguientes vectores pertenecen a $\text{Im}(f)$:

- $(1, -2)$
- $(-6, 12)$
- $(5, 0)$
- $(0, 0)$

(*c*) Mostrar 4 vectores que pertenezcan a $\text{Im}(f)$.

(d) Mostrar 4 vectores que pertenezcan a $\mathrm{Nu}(f)$.

Ejercicio 4. En cada uno de los siguientes ítems hallar bases de $\mathrm{Nu}(f)$ y de $\mathrm{Im}(f)$.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/\, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0)$.

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/\, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3, 7x_1 + 8x_2 + 9x_3)$.

(c) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \,/\, f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_3 + x_4, x_1 - x_3 + x_4, 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4)$.

(d) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{3\times 2} \,/\, f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \\ d & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5. Decidir cuáles de las transformaciones lineales del ejercicio anterior son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

Ejercicio 6. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y sea $g_A : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definida por $g_A(X) = A.X$.

(a) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ determinar si g_A es un isomorfismo y si A es inversible.

(b) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ determinar si g_A es un isomorfismo y si A es inversible.

(c) Demostrar que g_A es un isomorfismo si y sólo si A es inversible.

Ejercicio 7. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definidas por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_1 + x_2)$ y $g(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$. Calcular $g \circ f$ y $f \circ g$.

Ejercicio 8. Calcular las inversas de los siguientes isomorfismos

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 3x_1 + 5x_2)$

(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/\, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3, x_1 + x_2 + x_3)$

(d) $f : \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^{3\times 2} \,/\, f(A) = A^t$

(e) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4 \,/\, f(A) = (A_{11} - A_{12}, A_{11} + A_{12}, A_{22}, A_{21})$

Ejercicio 9. En cada uno de los siguientes ítems calcular $\dim(\mathrm{Nu}(f))$ y $\dim(\mathrm{Im}(f))$.

(a) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \,/\, f(x) = x$.

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ tal que f es un monomorfimo.

(c) $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^5$ tal que f es un epimorfimo.

(d) $f : \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^{2\times 2} \,/\, f(X) = 0$.

(e) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\mathrm{Nu}(f) \supseteq \mathrm{Gen}\{(1, 1, 2), (3, 2, -1)\}$ y $(1, 0, -1, 0) \in \mathrm{Im}(f)$.

Ejercicio 10. En cada uno de los siguientes ítems decidir si existe una transformación lineal f que satisfaga las condiciones pedidas. En caso afirmativo, hallar la expresión de una transformación lineal f que cumpla lo pedido.

(*a*) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(2,1) = (1,2)$ y $f(-1,0) = (1,1)$.

(*b*) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(1,2) = (0,0,1)$ y $f(2,2) = (0,2,0)$.

(*c*) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(1,1,1) = (1,0,0)$, $f(1,1,0) = (2,4,0)$ y $f(0,1,0) = (1,2,0)$.

(*d*) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,0) = (-1,3)$ y $f(2,0) = (3,6)$.

(*e*) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(0,1,1) = (1,2,3)$, $f(-1,2,1) = (-1,0,1)$ y $f(-1,3,2) = (0,2,3)$.

(*f*) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(1,1) = (0,1,2)$ y $f(3,3) = (0,3,6)$.

(*g*) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,2,1) = (2,0)$, $f(-1,0,1) = (1,3)$ y $f(0,2,2) = (3,3)$.

Ejercicio 11. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2+x_3, x_1+x_2-x_3, x_1+x_2)$ y sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la única transformación lineal que cumple $g(1,1,1) = (-1,1,0)$, $g(1,1,0) = (0,1,1)$ y $g(1,0,0) = (1,0,1)$.

(*a*) Calcular $h = g \circ f$ y $t = f \circ g$.

(*b*) Hallar una base del núcleo y una base de la imagen de cada una de las transformaciones lineales f, g, h y t.

Ejercicio 12. En cada uno de los siguientes ítems hallar una transformación lineal f que satisfaga las condiciones pedidas.

(*a*) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Nu}(f) = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - 3x_2 + x_3 = 0\}$.

(*b*) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{Nu}(f) = \mathrm{Gen}\{(1,3)\}$ y $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Gen}\{(0,1)\}$.

(*c*) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $(1,1,1) \in \mathrm{Nu}(f)$ y f es un epimorfimo.

(*d*) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\mathrm{Nu}(f) = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Gen}\{(2,5,-1,0),(0,0,0,1)\}$.

(*e*) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ no nula tal que $I \in \mathrm{Nu}(f)$ y f no es epimorfismo.

(*f*) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\mathrm{Nu}(f) = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + x_2 = x_3 \;\text{ y }\; x_1 + x_3 = x_4\}$.

(*g*) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Nu}(f) + \mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}^4$ donde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ es la transformación lineal definida por $g(x_1,x_2) = (x_1+x_2, 0, x_1-x_2, x_1+x_2)$.

Ejercicio 13.

(*a*) Hallar la fórmula explícita de una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que verifique simultáneamente que $(1,0,3) \in \mathrm{Nu}f$ y que f sea un epimorfismo. Demostrar que la transformación lineal f hallada cumple las condiciones pedidas.

(*b*) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal que cumple simultáneamente que $(1,0,3) \in \mathrm{Nu}f$ y que f es un epimorfismo. ¿Es posible hallar un vector $w \in \mathrm{Nu}f$ tal que el conjunto $\{(1,0,3), w\}$ sea linealmente independiente?

Ejercicio 14. Sea $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 = x_3 \text{ y } x_1 + x_2 = x_4\}$ y sea $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, 2x_1 = x_3 + x_4\}$. Hallar una transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente que $\mathrm{Nu}(f) = S$ y $\mathrm{Nu}(f \circ f) = T$.

Ejercicio 15. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_{EE}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(*a*) Calcular $f(1, -2)$ y $f(3, -1)$.

(*b*) Hallar la expresión de f.

(*c*) Hallar bases de $\mathrm{Nu}(f)$ y de $\mathrm{Im}(f)$.

Ejercicio 16. En cada uno de los siguientes ítems hallar $M_{BB'}(f)$

(*a*) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, 2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$, B es la base canónica de $\mathbb{R}^2$, B' es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(*b*) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_2)$, $B = \{(-1, 0), (0, 1)\}$, $B' = \{(1, 1), (0, 1)\}$.

(*c*) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2 + x_3)$, $B = \{(1, -1, 2), (0, 2, -1), (0, 0, 1)\}$, $B' = \{(2, 1), (1, -1)\}$.

(*d*) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_3, 2x_4, x_2 + x_3)$,
$B = \{(1, -1, 2, 0), (0, 2, -1, 1), (0, 0, 2, 1), (0, 0, 0, -1)\}$, B' es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 17. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y sea $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ la transformación lineal definida por $f(X) = AX$. Hallar $M_{EE}(f)$.

Ejercicio 18. Hallar la matriz en bases canónicas de cada una de las transformaciones lineales definidas en los siguientes ítems e indicar a qué espacio de matrices pertenece.

(*a*) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x_1, x_2) = (3x_1 - x_2, x_2)$.

(*b*) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - 5x_3, x_2 + x_3)$.

(*c*) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2, x_1 + 3x_2)$.

(*d*) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal que verifica $f(1, 0, 0) = (2, 1, 0, 1)$, $f(0, 1, 0) = (2, 1, 3, 0)$ y $f(0, 0, 1) = (0, -4, -2, 6)$.

(*e*) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal que verifica $f(2, 0, 0) = (4, 2, 2)$, $f(0, 3, 0) = (1, 1, 1)$ y $f(0, 0, 3) = (0, -1, 0)$.

Ejercicio 19. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_{EE}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(*a*) Calcular $f(0, 1, 0)$, $f(0, 0, 0)$, $f(1, 2, 0)$ y $f(3, -1, -2)$.

(*b*) Hallar la expresión de f.

(c) Hallar bases de $\mathrm{Nu}(f)$ y de $\mathrm{Im}(f)$.

Ejercicio 20. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_{EE}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y sea $B = \{(1,0,2),(0,1,1),(2,1,0)\}$.

(a) Hallar la expresión de f.

(b) Hallar $M_{BE}(f)$ y $M_{BB}(f)$.

Ejercicio 21. Sean $B = \{(-1,0),(1,-1)\}$ y $B' = \{(2,1,0),(1,0,-1),(0,-2,3)\}$ y sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Hallar una base de $\mathrm{Im}(f)$.

(b) Hallar una transformación lineal $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{Nu}(g) = \mathrm{Im}(f)$.

(c) Para la transformación lineal g hallada en el ítem anterior calcular $M_{B'B}(g)$.

Ejercicio 22. Sea B la base de $\mathbb{R}^3$ definida por $B = \{(0,0,2),(0,1,-1),(2,1,0)\}$ y sea B' la base de $\mathbb{R}^4$ definida por $B' = \{(1,0,0,0),(1,1,1,0),(1,-1,0,1),(0,1,1,1)\}$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calcular $f(3,-1,2)$ y $f(1,-3,7)$.

(b) Hallar una base de $\mathrm{Im}(f)$.

(c) Hallar una base de $\mathrm{Nu}(f)$.

Ejercicio 23. Sea $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que

$$M_{EE}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Hallar una base B_1 de $\mathrm{Nu}(f)$.

(b) Hallar un conjunto B_2 de vectores de $\mathbb{R}^5$ tal que $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ y $B = B_1 \cup B_2$ sea una base de $\mathbb{R}^5$.

(c) Demostrar que $f(B_2)$ es un conjunto linealmente independiente.

(d) Extender el conjunto $f(B_2)$ a una base B' de $\mathbb{R}^4$.

(e) Hallar $M_{BB'}(f)$.

Ejercicio 24. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + 2x_2)$. Sean $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ las transformaciones lineales tales que

$$M_{EE}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_{EE}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Hallar $M_{EE}(g \circ h)$, $M_{EE}(h \circ g)$ y $M_{EE}(h \circ f)$.

(b) Sean $B = \{(1, -1), (1, 2)\}$ y $B' = \{(1, 1, -1), (1, -1, 0), (-1, 0, 0)\}$. Hallar $M_{BB'}(h \circ f)$, $M_{B'B}(f \circ g)$ y $M_{BB}(g \circ h)$.

Ejercicio 25. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $f(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2, 2x_1 - x_2)$. Sean $B = \{(1, 1), (2, 1)\}$ y $B' = \{(-1, 2), (0, 1)\}$.

(a) Demostrar que f es un isomorfismo.

(b) Sin calcular f^{-1} hallar $M_{EE}(f^{-1})$ y $M_{B'B}(f^{-1})$.

Ejercicio 26. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_{EE}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y sea $B = \{(1, 0, 2), (0, 1, 1), (2, 1, 0)\}$. Hallar $M_{BE}(f^{-1})$.

Ejercicio 27. Sean $B = \{v_1, v_2\}$ y $B' = \{w_1, w_2\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ y sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Sea $B'' = \{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$. Hallar $M_{B''B'}(f)$.

Ejercicio 28. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B' = \{w_1, w_2, w_3\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Sea $C = \{2v_1 - v_2 \,,\, v_1 + 2v_3 \,,\, v_1 + v_2 - v_3\}$.

(a) Demostrar que C es base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Hallar $M_{CB'}(f)$.

Ejercicio 29. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B' = \{-v_1 + v_2 - v_3 \,,\, v_1 + 2v_3 \,,\, v_2\}$ bases de $\mathbb{V}$. Sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ la transformación lineal tal que $M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
Hallar $M_{B'B}(f)$, $M_{BB'}(f)$ y $M_{B'B'}(f)$.

Ejercicio 30. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B' = \{v_3 \,,\, v_2 + v_3 \,,\, v_1 + v_2 + v_3\}$ bases de $\mathbb{V}$. Sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ la transformación lineal tal que $M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y sea $g : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ la transformación lineal tal que $M_{B'B'}(g) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Hallar $M_{BB'}(g \circ f)$ y $M_{B'B}(g \circ f)$.

(b) Hallar $M_{BB'}(g^{-1})$.

Ejercicio 31. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $B' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcular $f(0)$, $f(v_1 - 2v_2)$ y $f(v_1 + v_2 - v_3)$.

(b) Hallar una base de $\mathrm{Nu}(f)$ y una base de $\mathrm{Im}(f)$.

Ejercicio 32. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$ y sea $B' = \{w_1, w_2, w_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcular $f(v_1 - 2v_3)$ y $f(v_3 + v_4)$.

(b) Hallar una base de $\mathrm{Nu}(f)$ y una base de $\mathrm{Im}(f)$.

(c) Calcular $f^{-1}(\{w_1\})$.

Ejercicio 33. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinar si f es un isomorfismo.

Ejercicio 34. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcular $(f \circ f)(3v_1)$ y $(f \circ f)(v_1 - 2v_2)$.

(b) Calcular $\dim(\mathrm{Nu}(f \circ f))$ y $\dim(\mathrm{Im}(f \circ f))$.

Ejercicio 35. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que $2a^2 v_1 + 2v_2 + 3av_3 \in \mathrm{Im}(f)$.

($*$)**Ejercicio 36.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sea B una base de $\mathbb{V}$. Sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal. Demostrar que f es un isomorfismo si y sólo si la matriz $M_{BB}(f)$ es inversible.