Topología General

Primer semestre de 2016

Práctica 4: Axiomas de separación y compacidad

Axiomas de separación.

Ejercicio 1. Sea X un espacio topológico. Definimos en X la relación de equivalencia $\sim$ por $x \sim y$ si y sólo si para todo $U \subseteq X$ abierto vale que $x \in U \Leftrightarrow y \in U$. Demostrar que el espacio cociente $X/\sim$ es T_0.

Ejercicio 2. Decimos que un espacio topológico X es un *espacio de Alexandroff* si cumple que toda intersección de abiertos de X es un abierto en X.
Sea X un espacio de Alexandroff.

(a) Demostrar que para todo $x \in X$ existe un abierto minimal $U_x \subseteq X$ que contiene a x (es decir, demostrar que para todo $x \in X$ existe $U_x \subseteq X$ abierto tal que $x \in U_x$ y que cumple que para todo $U \subseteq X$ abierto tal que $x \in U$ vale que $U_x \subseteq U$).

(b) Demostrar que el conjunto de abiertos minimales $\{U_x : x \in X\}$ es una base para la topología de X.

(c) Si X es T_0 demostrar que la relación $\leq$ en X definida por $x \leq y$ si y sólo si $U_x \subseteq U_y$ es una relación de orden.

(d) Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Para cada $a \in A$, sea $S_a = \{b \in A : b \leq a\}$. Sea $\mathcal{B} = \{S_a : a \in A\}$. Demostrar que $\mathcal{B}$ es base para una topología en A.

(e) Demostrar que existe una correspondencia biunívoca entre espacios de Alexandroff T_0 y conjuntos parcialmente ordenados.

Ejercicio 3.

(a) Demostrar que los subespacios de espacios T_2 son T_2.

(b) Demostrar que un producto de espacios T_2 es T_2.

Ejercicio 4. Sean X e Y espacios topológicos y sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Sea $E = \{x \in X \ / \ f(x) = g(x)\}$. Supongamos que Y es T_2.

(a) Demostrar que E es cerrado en X.

(b) Demostrar que si existe $A \subseteq X$ denso en X tal que $f|_A = g|_A$ entonces $f = g$.

(c) Dar ejemplos que muestren que los resultados anteriores no son ciertos si Y no es T_2.

Ejercicio 5. Sea X un espacio topológico regular. Demostrar que todo par de puntos de X tienen entornos cuyas clausuras son disjuntas.

Ejercicio 6. Sea X un conjunto totalmente ordenado y sea $\mathcal{T}$ la topología del orden en X. Demostrar que $(X, \mathcal{T})$ es regular.

Ejercicio 7. Sea J un conjunto de índices. Demostrar que $\prod_{j\in J}\mathbb{R}$ con la topología caja es completamente regular.

Ejercicio 8. Demostrar que un subespacio cerrado de un espacio topológico normal es normal.

Ejercicio 9. Sea X un espacio topológico normal. Demostrar que todo par de cerrados disjuntos de X tienen entornos cuyas clausuras son disjuntas.

Ejercicio 10. Sea X un espacio topológico T_1. Demostrar que X es normal si y sólo si para todo $A \subseteq X$ cerrado y para todo $U \subseteq X$ abierto tal que $A \subseteq U$ existe $V \subseteq X$ abierto tal que $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Ejercicio 11. Sea $\{X_j\}_{j\in J}$ una familia de espacios topológicos. Demostrar que si $\prod_{j\in J} X_j$ es Hausdorff, o regular o normal, entonces cada X_j lo es.

Ejercicio 12. Sea X un conjunto con dos topologías $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$. Supongamos que $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}'$. Si X es regular o normal con alguna de las topologías, ¿qué se puede decir sobre la otra?

Compacidad.

Ejercicio 13. Sea X un conjunto y sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ topologías en X.

(*a*) Supongamos que $\mathcal{T}' \supseteq \mathcal{T}$. ¿La compacidad de X respecto de alguna de estas topologías implica la compacidad de X respecto de la otra?

(*b*) Demostrar que si X es compacto y Hausdorff tanto para $\mathcal{T}$ como para $\mathcal{T}'$ entonces $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ o no son comparables.

Ejercicio 14.

(*a*) Mostrar que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es compacto en la topología del complemento finito.

(*b*) ¿Es $[0, 1]$ compacto como subespacio de $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_c$ definida por

$$\mathcal{T}_c = \{U : \mathbb{R} \setminus U \text{ es numerable o todo } \mathbb{R}\}?$$

Ejercicio 15. Sea X un espacio topológico T_2.

(*a*) Sea $K \subseteq X$ un subespacio compacto y sea $x_0 \in X - K$. Demostrar que existen $U, V \subseteq X$ abiertos disjuntos tales que $x_0 \in U$ y $K \subseteq V$.

(*b*) Sean $A, B \subseteq X$ subespacios compactos tales que $A \cap B = \varnothing$. Demostrar que existen $U, V \subseteq X$ abiertos disjuntos tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

Ejercicio 16. Sean X e Y espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función continua. Demostrar que si X es compacto e Y es Hausdorff entonces f es cerrada.

Ejercicio 17. Sean X e Y espacios topológicos, con Y compacto y Hausdorff. Sea $f : X \to Y$ una función. Demostrar que f es continua si y sólo si el gráfico de f, $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$, es cerrado en $X \times Y$.
Sugerencia: Si G_f es cerrado y V es un entorno abierto de $f(x_0)$, encontrar un entorno abierto U de x_0 tal que $U \times (Y \setminus V)$ no corte a G_f.

Ejercicio 18. Sea X un espacio topológico completamente regular y sean $A, B \subseteq X$ cerrados. Demostrar que si A es compacto existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$.

Ejercicio 19. Mostrar que $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto.

Ejercicio 20. Mostrar que si $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ es localmente compacto, entonces cada X_α es localmente compacto y todos los X_α, salvo una cantidad finita, son compactos.

Ejercicio 21. Sea X un espacio localmente compacto y sea $f : X \to Y$ una función continua.

(*a*) Demostrar que si f es abierta entonces $f(X)$ es localmente compacto.

(*b*) Dar un ejemplo que muestre que el item anterior puede no ser cierto si f no es abierta.

Ejercicio 22. Sea X un espacio topológico y sea X^* su compactificación a un punto. Demostrar que:

(*a*) X^* es compacto.

(*b*) $X \subseteq X^*$ es un subespacio.

(*c*) $\infty \in \overline{X}$ si y sólo si X no es compacto.

(*d*) Si X es T_2 y localmente compacto entonces X^* es T_2.

Ejercicio 23. Probar que la compactificación a un punto de $\mathbb{N}$ es homeomorfa a $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ con la topología que hereda como subespacio de $\mathbb{R}$.

Ejercicio 24. Demostrar que todo espacio topológico localmente compacto y Hausdorff es completamente regular.