Introducción al Álgebra Lineal

Año 2012

Práctica 4: Transformaciones Lineales

Ejercicio 1. Determinar cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales (t.l.):

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (0, x_1)$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - 5, x_1 + x_2)$

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2, x_2, x_1)$

(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1.x_2$

(e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{3\times 2}$, $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 + x_2 \\ 0 & -x_2 \\ -x_1 & 0 \end{pmatrix}$

(f) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$, $f(A) = \det(A)$

(g) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$, con $\mathbf{v} = (2, 1, -3)$

(h) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$, con $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$

Ejercicio 2. Decidir si existe una t.l. f que satisface las condiciones dadas; en caso afirmativo, si es única, encontrar la expresión de $f(\mathbf{x})$.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(2, 1) = (1, 2)$, $f(-1, 0) = (1, 1)$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(1, 3) = (0, 0, 1)$, $f(3, 1) = (0, 0, 2)$

(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(1, 2, 1) = (2, 0)$, $f(-1, 0, 1) = (1, 3)$, $f(0, 2, 2) = (3, 3)$

(d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$f(0, 1, 1) = (1, 2, 3)$, $f(-1, 2, 1) = (-1, 0, 1)$, $f(-1, 3, 2) = (0, 2, 3)$

(e) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(1, 1, 1) = (1, 0, 0)$, $f(1, 1, 0) = (2, 4, 0)$, $f(1, 0, 0) = (1, 2, 0)$

Ejercicio 3.

(a) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la t.l. definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 + x_3)$ y sean $\mathbf{v} = (2, 3)$, $\mathbb{S} = \langle (1, 2, 1) \rangle$, $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \ / \ 3x_1 - 2x_2 = 0\}$. Describir $f(\mathbb{S})$, $f^{-1}(\mathbf{v})$ y $f^{-1}(\mathbb{T})$.

(b) Sea $f : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definida por

$$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{22} + a_{33} & 0 \\ a_{31} & a_{12} \end{pmatrix}$$

y sean

$$\mathbb{S} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle;$$

$$\mathbb{T} = \{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ / \ a_{11} - a_{12} = a_{21} = 0\}.$$

Describir $f(\mathbb{S})$ y $f^{-1}(\mathbb{T})$.

Ejercicio 4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la t.l. definida por

$$f(x_1, x_2) = (-3x_1 + x_2, 6x_1 - 2x_2).$$

(a) ¿Cuáles de los siguientes vectores pertenecen a $\operatorname{Nu} f$?
$(5, 15)$ $(3, 4)$ $(1, 1)$ $(0, 0)$

(b) ¿Cuáles de los siguientes vectores pertenecen a $\operatorname{Im} f$?
$(1, -2)$ $(-6, 12)$ $(5, 0)$ $(0, 0)$

(c) Mostrar 4 vectores que pertenezcan a $\operatorname{Im} f$.

(d) Mostrar 4 vectores que pertenezcan a $\operatorname{Nu} f$.

Ejercicio 5. Hallar bases de $\operatorname{Nu} f$ y de $\operatorname{Im} f$ en cada caso.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0)$

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1+2x_2+3x_3, 4x_1+5x_2+6x_3, 7x_1+8x_2+9x_3)$

(c) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,
$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_3 + x_4, x_1 - x_3 + x_4, 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4)$

(d) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{3\times 2}, f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} + a_{12} \\ a_{21} & a_{21} + a_{22} \\ a_{22} & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 6. Decidir cuáles de las transformaciones lineales del ejercicio anterior son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

Ejercicio 7. Sea $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ la transformación lineal definida por $f(X) = AX$; en cada caso determinar si f es isomorfismo y si A es inversible.

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 8. En caso caso definir una t.l. que verifique:

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{Nu} f = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0\}$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\operatorname{Nu} f = \langle(1, 3)\rangle$, $\operatorname{Im} f = \langle(0, 1)\rangle$

(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $(1, 0, 3) \in \operatorname{Nu} f$ y f es epimorfismo.

(d) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\operatorname{Nu} f = \operatorname{Im} f = \langle(2, 5, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\rangle$

(e) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ no nula, tal que $I \in \operatorname{Nu} f$ y f no es epimorfismo.

(f) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\operatorname{Nu} f = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \ / \ x_1 + x_2 = x_3 \ ; \ x_1 + x_3 = x_4\}$

(g) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{Nu} f + \operatorname{Im} g = \mathbb{R}^4$, donde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ está dada por $g(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 0, x_1 - x_2, x_1 + x_2)$.

Ejercicio 9. Calcular $\dim \operatorname{Nu} f$ y $\dim \operatorname{Im} f$ en los siguientes casos:

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ monomorfismo.

(b) $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^5$ epimorfismo.

(c) $f : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8, f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

(d) $f : \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^{3\times 2}$ $f(X) = 0$.

(e) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\langle(1, 2, 3, 4), (-1, 2, 1, 0)\rangle \subset \operatorname{Nu} f$ y $(1, 0, -1, 0) \in \operatorname{Im} f$.

Ejercicio 10. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dadas por: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_1 + x_2)$, $g(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$. Calcular $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Ejercicio 11. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ las transformaciones lineales tales que: $f(1,1,1) = (-1,1,0)$, $f(1,1,0) = (0,1,1)$, $f(1,0,0) = (1,0,1)$, $g(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2+x_3, x_1+x_2-x_3, x_1+x_2)$

(a) Calcular $h = g \circ f$ y $t = f \circ g$.

(b) Determinar núcleo e imagen de f, g, h y t.

Ejercicio 12. Calcular las inversas de los siguientes isomorfismos:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad f(x_1,x_2) = (x_1+2x_2, 3x_1-5x_2)$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad f(x_1,x_2) = (x_1+x_2, x_1-x_2)$

(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2, x_1-x_3, x_1+x_2+x_3)$

(d) $f : \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^{3\times 2} \quad f(A) = A^t$

(e) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4 \quad f(a_{ij}) = (a_{11}-a_{12}, a_{11}+a_{12}, a_{22}, a_{21})$

Ejercicio 13. Sean $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \ / \ x_1 - x_2 = x_3; x_1 + x_2 = x_4\}$, $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \ / \ 2x_1 = x_3 + x_4\}$. Definir una transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que se verifique simultáneamente: $\mathrm{Nu}\, f = \mathbb{S}$ y $\mathrm{Nu}(f \circ f) = \mathbb{T}$.

Ejercicio 14. Escribir la matriz(*) de cada una de las siguientes t.l. e indicar a qué espacio de matrices pertenece.

(a) $f(x_1,x_2) = (3x_1 - x_2, x_2)$

(b) $g(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2-5x_3, x_2+x_3)$

(c) $h(x_1,x_2) = (x_1+x_2, 2x_1+x_2, x_1+3x_2)$

(*) (en bases canónicas)

Ejercicio 15. Si la matriz(*) de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es $M(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

(a) Calcular $f(1,2,0)$, $f(0,0,0)$, $(5,7,2)$.

(b) Hallar bases de $\mathrm{Nu}\, f$ e $\mathrm{Im}\, f$.

(*) (en bases canónicas)

Ejercicio 16. Escribir la matriz $M_E(f)$ en cada caso:

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la t.l. tal que $f(1,0,0) = (2,-1,0,1)$, $f(0,1,0) = (2,1,3,0)$, $f(0,0,1) = (0,-4,-2,6)$

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que $f(2,0,0) = (4,2,2)$, $f(0,3,0) = (1,1,1)$, $f(0,0,3) = (0,-1,0)$

Ejercicio 17. En cada caso hallar $M_{BB'}(f)$

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad f(x_1,x_2) = (3x_1+x_2, 2x_1-x_2, x_1+x_2)$, $B = E$, base canónica de $\mathbb{R}^2$; $B' = E'$, base canónica de $\mathbb{R}^3$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad f(x_1,x_2) = (2x_1-x_2, x_2)$,
$B = \{(-1,0),(0,1)\}$, $B' = \{(1,1),(0,1)\}$

(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad f(x_1,x_2,x_3) = (x_1-x_2, x_1+x_2+x_3)$,
$B = \{(1,-1,2),(0,2,-1),(0,0,1)\}$, $B' = \{(2,1),(1,-1)\}$

(d) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \quad f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1-x_3, 2x_4, x_2+x_3)$,
$B = \{(1,-1,2,0),(0,2,-1,1),(0,0,2,1),(0,0,0,-1)\}$, $B' = E$

Ejercicio 18. Sean $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ y $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ bases de $\mathbb{R}^2$, y sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la t.l. tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Hallar $M_{B''B'}(f)$ donde $B'' = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\}$.

Ejercicio 19. Sea $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ la t.l. definida por $f(X) = AX$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular $M_{\mathcal{E}}(f)$.

Ejercicio 20. Sean $B = \{(0,0,2),(0,1,-1),(2,1,0)\}$, $B' = \{(1,0,0,0),(1,1,1,0),(1,-1,0,1),(0,1,1,1)\}$ y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcular $f(0,2,-1)$.

(b) Hallar una base de $\operatorname{Im} f$ y una base de $\operatorname{Nu} f$.

Ejercicio 21. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, con $B = \{(-1,0),(1,-1)\}$ y $B' = \{(2,1,0),(1,0,-1),(0,-2,3)\}$. Definir $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\operatorname{Nu} g = \operatorname{Im} f$ y hallar $M_{B'B}(g)$.

Ejercicio 22. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal que en las bases $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ y $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ tiene matriz

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcular: $f(0)$, $f(\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_3)$, $f(\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4)$

(b) Dar bases de $\operatorname{Nu} f$ e $\operatorname{Im} f$.

(c) Calcular $f^{-1}(\mathbf{w}_1)$.

Ejercicio 23. Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$, y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar si f es isomorfismo.

Ejercicio 24. Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$, y $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ base de $\mathbb{R}^4$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hallar base de $\operatorname{Nu} f$ y de $\operatorname{Im} f$.

Ejercicio 25. Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$, y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $2a^2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 3a\mathbf{v}_3 \in \operatorname{Im} f$.

Ejercicio 26. Sean $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ bases de $\mathbb{R}^3$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\}$, con $\mathbf{z}_1 = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\mathbf{z}_2 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3$, $\mathbf{z}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$.

(a) Probar que C es base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Hallar $M_{CB'}(f)$.

Ejercicio 27. Sean las transformaciones lineales
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + 2x_2)$;
$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tal que $M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, y
$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tal que $M(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(a) Hallar $M(g \circ h)$, $M(h \circ g)$ y $M(h \circ f)$.

(b) Hallar $M_{BB'}(h \circ f)$, $M_{B'B}(f \circ g)$ y $M_B(g \circ h)$ con $B = \{(1,-1), (1,2)\}$ y $B' = \{(1,1,-1), (1,-1,0), (-1,0,0)\}$.

Ejercicio 28. Sea $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ la t.l. dada por:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Hallar una base B_1 para $\operatorname{Nu} f$ y encontrar un conjunto B_2 de vectores de $\mathbb{R}^5$ tal que $B = B_1 \bigcup B_2$ es una base de $\mathbb{R}^5$.

(b) Probar que los transformados de los vectores de B_2 por f, son linealmente independientes y extender este conjunto a una base B de $\mathbb{R}^4$.

(c) Calcular $M_{BB'}(f)$.

Ejercicio 29. Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular $(f \circ f)(3\mathbf{v}_1)$ y $(f \circ f)(\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2)$

(b) Hallar $\dim \operatorname{Nu}(f \circ f)$ y $\dim \operatorname{Im}(f \circ f)$.

Ejercicio 30. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal dada por $f(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2, 2x_1 - x_2)$. Sin calcular f^{-1}, hallar:

(a) $M(f^{-1})$.

(b) $M_{B'B}(f^{-1})$ con $B = \{(1,1), (2,1)\}$ y $B' = \{(-1,2), (0,1)\}$.

Ejercicio 31. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y sea $B = \{(1,0,2), (0,1,1), (2,1,0)\}$.

(a) Hallar $M_{BE}(f)$ y $M_B(f)$.

(b) Hallar $M_{BE}(f^{-1})$.

Ejercicio 32. Sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tal que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y sean $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y $B' = \{-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2\}$ bases de $\mathbb{V}$. Hallar $M_{B'B}(f)$, $M_{BB'}(f)$, $M_{B'}(f)$.

Ejercicio 33. Sean $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tal que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $g : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tal que $M_{B'}(g) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y $B' = \{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\}$ bases de $\mathbb{V}$.

(a) Hallar $M_{BB'}(g \circ f)$ y $M_{B'B}(g \circ f)$.

(b) Hallar $M_{BB'}(g^{-1})$.