Introducción al Álgebra Lineal

Año 2014

Práctica 5: Autovectores y autovalores

Ejercicio 1. Calcular el polinomio característico de cada una de las siguientes matrices:

$(a)\ \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad(b)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad(c)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2. Calcular los autovalores de cada una de las siguientes matrices y los subespacios asociados a cada uno de ellos.

$(a)\ \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$ $\quad(b)\ \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad(c)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

$(d)\ \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad(e)\ \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad(f)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$(g)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad(h)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

Ejercicio 3. Sea $k \in \mathbb{R}$ y sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Hallar todos los valores de k tales que la matriz A tiene a 1 como autovalor.

(b) Para los valores de k hallados en el ítem anterior calcular todos los autovalores de A.

Ejercicio 4. En cada uno de los siguientes ítems decidir si la matriz A es diagonalizable y en caso afirmativo hallar matrices C y D tales que $A = CDC^{-1}$ y D es diagonal.

$(a)\ \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad(b)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$(c)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & 6 \\ 5 & -5 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad(d)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$(e)\ \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 5.

(a) Sea $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular A^{14}.

(b) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular A^{10}.

Ejercicio 6. Sea $k \in \mathbb{R}$ y sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ k & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Se sabe que -2 es un autovalor de la matriz A. Decidir si A es diagonalizable.

Ejercicio 7.

(*a*) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_{EE}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(*b*) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_{EE}(f) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ -6 & -2 & 8 \end{pmatrix}$. Hallar una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 8. Sea $B = \{(1,-1,0),(0,0,1),(-3,2,1)\}$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_{BE}(f) = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -12 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Decidir si f es diagonalizable y en caso afirmativo encontrar una base B' de $\mathbb{R}^3$ tal que $M_{B'B'}(f)$ sea diagonal.

Ejercicio 9. Sea $B = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Decidir si f es diagonalizable y en caso afirmativo encontrar una base B' de $\mathbb{R}^3$ tal que $M_{B'B'}(f)$ sea diagonal.

Ejercicio 10. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(*a*) Hallar los autovalores y autovectores de f.

(*b*) ¿Es f diagonalizable?

Ejercicio 11. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B' = \{v_1 + v_2, v_3, v_2 - v_1\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(*a*) Hallar los autovalores de f.

(*b*) ¿Es f diagonalizable?

Ejercicio 12. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{V}$. Sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ la transformación lineal tal que $f(v_1) = -v_1 - 2v_2$, $f(v_2) = v_1 + 2v_2$ y $f(v_3) = 2v_3$. Hallar una base de autovectores de f.

Ejercicio 13. Sea $B = \{(1, 0, -1), (0, 2, 1), (-1, 3, 2)\}$, sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ 0 & b & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Hallar todos los valores de a y b tales que $f(-1, -1, 0) = (-1, -1, 0)$.

(b) Para los valores de a y b hallados en el ítem anterior, ¿es f diagonalizable?

Ejercicio 14. Sean $S = \{x \in \mathbb{R}^4 \,/\, 3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0\}$ y $T = \text{Gen}\{(1, 1, 0, -1), (-1, 0, 1, 0)\}$. Hallar la expresión de una transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que sus autovalores sean 3, -2 y 0, $\text{Im}(f) = T$ y $\text{Nu}(f) \subseteq S$.

Ejercicio 15. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, sean B y B' bases de $\mathbb{V}$ y sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal.

(a) Demostrar que las matrices $M_{BB}(f)$ y $M_{B'B'}(f)$ tienen los mismos autovalores.

(b) Demostrar que $M_{BB}(f)$ es diagonalizable si y sólo si $M_{B'B'}(f)$ lo es.