Introducción al Álgebra Lineal

Año 2016

Práctica 5: Transformaciones lineales

Ejercicio 1. Determinar cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales:

(*a*) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, f(x_1, x_2) = (0, x_1)$

(*b*) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, f(x_1, x_2) = (2x_1 - 5, x_1 + x_2)$

(*c*) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \,/\, f(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2, x_2, x_1)$

(*d*) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, f(x_1, x_2) = x_1.x_2$

(*e*) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{3\times 2} \,/\, f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 + x_2 \\ 0 & -x_2 \\ -x_1 & 0 \end{pmatrix}$

(*f*) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R} \,/\, f(A) = \det(A)$.

(*g*) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \langle x, v\rangle$ con $v \in \mathbb{R}^3$.

(*h*) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \,/\, f(x) = (A.x^t)^t$ con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 + x_3)$ y sean $v = (2, 3)$, $S = \text{Gen}\{(1, 2, 1)\}$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^2 \,/\, 3x_1 - 2x_2 = 0\}$. Describir $f(S)$, $f^{-1}(\{v\})$ y $f^{-1}(T)$.

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$f(x_1, x_2) = (-3x_1 + x_2, 6x_1 - 2x_2) \; .$$

(*a*) Decidir cuáles de los siguientes vectores pertenecen a $\text{Nu}(f)$:

- $(5, 15)$
- $(3, 4)$
- $(1, 1)$
- $(0, 0)$

(*b*) Decidir cuáles de los siguientes vectores pertenecen a $\text{Im}(f)$:

- $(1, -2)$
- $(-6, 12)$
- $(5, 0)$
- $(0, 0)$

(*c*) Mostrar 4 vectores que pertenezcan a $\text{Im}(f)$.

(*d*) Mostrar 4 vectores que pertenezcan a $\text{Nu}(f)$.

Ejercicio 4. En cada uno de los siguientes ítems hallar bases de $\text{Nu}(f)$ y de $\text{Im}(f)$.

(*a*) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/\, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0)$.

(*b*) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/\, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3, 7x_1 + 8x_2 + 9x_3)$.

(*c*) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \,/\, f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_3 + x_4, x_1 - x_3 + x_4, 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4)$.

(*d*) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{3\times 2} \,/\, f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \\ d & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5. Decidir cuáles de las transformaciones lineales del ejercicio anterior son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

Ejercicio 6. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y sea $g_A : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definida por $g_A(X) = A.X$.

(*a*) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ determinar si g_A es un isomorfismo y si A es inversible.

(*b*) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ determinar si g_A es un isomorfismo y si A es inversible.

(*c*) Demostrar que g_A es un isomorfismo si y sólo si A es inversible.

Ejercicio 7. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definidas por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_1 + x_2)$ y $g(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$. Calcular $g \circ f$ y $f \circ g$.

Ejercicio 8. Calcular las inversas de los siguientes isomorfismos

(*a*) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$

(*b*) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 3x_1 + 5x_2)$

(*c*) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/\, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3, x_1 + x_2 + x_3)$

(*d*) $f : \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^{3\times 2} \,/\, f(A) = A^t$

(*e*) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4 \,/\, f(A) = (A_{11} - A_{12}, A_{11} + A_{12}, A_{22}, A_{21})$

Ejercicio 9. En cada uno de los siguientes ítems calcular $\dim(\mathrm{Nu}(f))$ y $\dim(\mathrm{Im}(f))$.

(*a*) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \,/\, f(x) = x$.

(*b*) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ tal que f es un monomorfimo.

(*c*) $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^5$ tal que f es un epimorfimo.

(*d*) $f : \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^{2\times 2} \,/\, f(X) = 0$.

(*e*) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\mathrm{Nu}(f) \supseteq \mathrm{Gen}\{(1, 1, 2), (3, 2, -1)\}$ y $(1, 0, -1, 0) \in \mathrm{Im}(f)$.

Ejercicio 10. En cada uno de los siguientes ítems decidir si existe una transformación lineal f que satisfaga las condiciones pedidas. En caso afirmativo, hallar la expresión de una transformación lineal f que cumpla lo pedido.

(*a*) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(2, 1) = (1, 2)$ y $f(-1, 0) = (1, 1)$.

(*b*) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(1, 2) = (0, 0, 1)$ y $f(2, 2) = (0, 2, 0)$.

(*c*) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(1, 1, 1) = (1, 0, 0)$, $f(1, 1, 0) = (2, 4, 0)$ y $f(0, 1, 0) = (1, 2, 0)$.

(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,0) = (-1,3)$ y $f(2,0) = (3,6)$.

(e) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(0,1,1) = (1,2,3)$, $f(-1,2,1) = (-1,0,1)$ y $f(-1,3,2) = (0,2,3)$.

Ejercicio 11. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2+x_3, x_1+x_2-x_3, x_1+x_2)$ y sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la única transformación lineal que cumple $g(1,1,1) = (-1,1,0)$, $g(1,1,0) = (0,1,1)$ y $g(1,0,0) = (1,0,1)$.

(a) Calcular $h = g \circ f$ y $t = f \circ g$.

(b) Hallar una base del núcleo y una base de la imagen de cada una de las transformaciones lineales f, g, h y t.

Ejercicio 12. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_{EE}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Calcular $f(1,-2)$ y $f(3,-1)$.

(b) Hallar la expresión de f.

(c) Hallar bases de $\mathrm{Nu}(f)$ y de $\mathrm{Im}(f)$.

Ejercicio 13. En cada uno de los siguientes ítems hallar $M_{BB'}(f)$

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x_1,x_2) = (3x_1+x_2, 2x_1-x_2, x_1+x_2)$, B es la base canónica de $\mathbb{R}^2$, B' es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(x_1,x_2) = (2x_1-x_2, x_2)$, $B = \{(-1,0),(0,1)\}$, $B' = \{(1,1),(0,1)\}$.

(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1-x_2, x_1+x_2+x_3)$, $B = \{(1,-1,2),(0,2,-1),(0,0,1)\}$, $B' = \{(2,1),(1,-1)\}$.

(d) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1-x_3, 2x_4, x_2+x_3)$,
$B = \{(1,-1,2,0),(0,2,-1,1),(0,0,2,1),(0,0,0,-1)\}$, B' es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 14. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_{EE}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y sea $B = \{(1,0,2),(0,1,1),(2,1,0)\}$.

(a) Hallar la expresión de f.

(b) Hallar $M_{BE}(f)$ y $M_{BB}(f)$.

($*$)**Ejercicio 15.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sea B una base de $\mathbb{V}$. Sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal. Demostrar que f es un isomorfismo si y sólo si la matriz $M_{BB}(f)$ es inversible.

Ejercicio 16. Sea $B = \{v_1,v_2,v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinar si f es un isomorfismo.