Introducción a la Matemática

Año 2014

Práctica Adicional: Funciones

Ejercicio 1. Decidir cuáles de las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Justifique.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-1)^2$.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4 - 3x$.

(c) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$.

(d) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$.

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$.

(f) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$.

(g) $f : \mathbb{R} \to (-\infty, 0]$ definida por $f(x) = -x^2$.

(h) $f : \mathbb{R} \to [-9, +\infty)$ definida por $f(x) = x^2 - 4x - 5$.

Ejercicio 2. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to A$ funciones tales que $f \circ g = \mathrm{Id}_B$.

(a) Demostrar que g es inyectiva.

(b) Demostrar que f es sobreyectiva.

Ejercicio 3. Sea $f : A \to B$ una función. Demostrar que si f tiene inversa entonces es biyectiva. *Sugerencia*: Utilice el ejercicio anterior.

Ejercicio 4. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones.

(a) Demostrar que si f y g son funciones pares entonces $f + g$ es una función par.

(b) Demostrar que si f y g son funciones impares entonces $f + g$ es una función impar.

(c) ¿Puede concluirse algo si f es una función par y g es una función impar? Justifique.

Ejercicio 5. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones.

(a) Demostrar que si f y g son funciones pares entonces $f . g$ es una función par.

(b) Demostrar que si f y g son funciones impares entonces $f . g$ es una función par.

(c) Demostrar que si f es una función par y g es una función impar entonces $f . g$ es una función impar.

Ejercicio 6. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones.

(a) Demostrar que si g es una función par entonces $f \circ g$ es una función par.

(b) Demostrar que si f es una función par y g es una función impar entonces $f \circ g$ es una función par.

(c) Demostrar que si f y g son funciones impares entonces $f \circ g$ es una función impar.

(d) ¿Es cierto que si f es una función par entonces $f \circ g$ es una función par? Justifique.

Ejercicio 7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Demostrar que si f es par e impar a la vez entonces f es la función nula (es decir, $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$).

Ejercicio 8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Demostrar que f se puede escribir como suma de una función par y una función impar.
Sugerencia: Considerar las funciones $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ y $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.