

Probabilidad y Estadística

FCEN – UNCuyo

Raúl MARINO

Florencia CODINA

Augusto NORTE

Marcelo E. ALBERTO

Bibliografía:

Probabilidad Estadística para Ingeniería y Ciencias

Walpole – Myers – Myers

Mc Graw - Hill

VARIABLES ESTADÍSTICAS

¿Qué es la Estadística?

La Estadística se ocupa de los métodos y procedimientos para recoger, clasificar, resumir, hallar regularidades y analizar los **datos**, siempre y cuando la variabilidad e incertidumbre sean una causa intrínseca de los mismos; así como de realizar **inferencias** a partir de ellos, con la finalidad de ayudar a la toma de decisiones y en su caso formular **predicciones**.

```
graph TD; A[ESTADÍSTICA] --> B[Estadística Descriptiva]; A --> C[Inferencia Estadística];
```

ESTADÍSTICA

Estadística Descriptiva

Inferencia Estadística

Estadística descriptiva

Describe, analiza y representa un grupo de datos utilizando métodos numéricos y gráficos que resumen y presentan la información contenida en ellos.

Ejemplo: en un estudio sobre *embarazo y diabetes* se midió el peso en kg de 30 mujeres mendocinas, con 35 semanas de gestación, de clase media, de 18 a 30 años de edad:

{75, 52, 92, 71, 51, 84, 75, 65, 81, 98, 60, 106, 113, 77, 91, 75, 65, 98, 73, 91, 80, 67, 61, 68, 85, 67, 67, 102, 73, 103}

Peso promedio = 78,87 kg

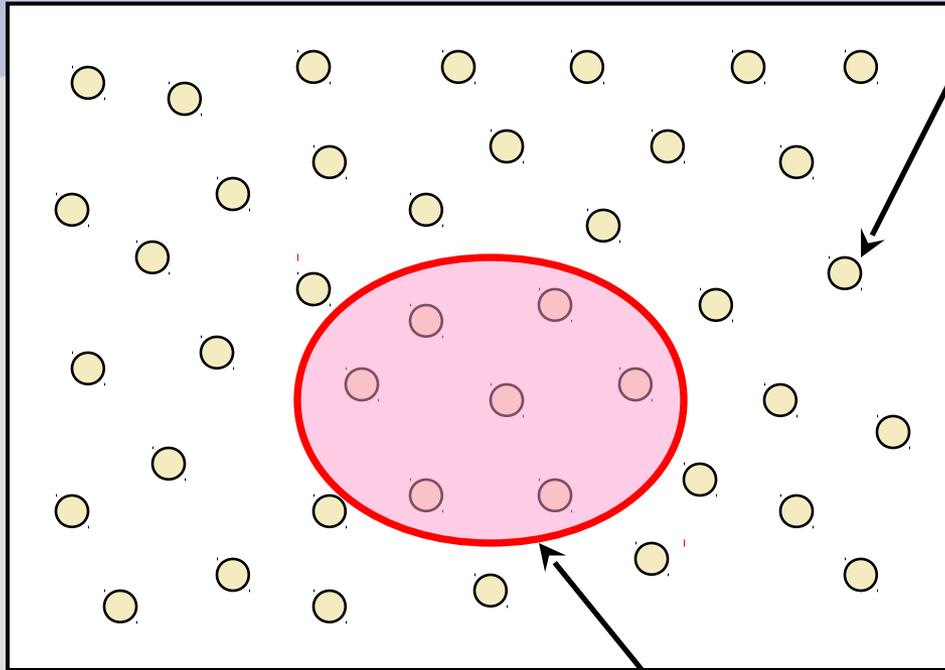
Estadística inferencial

Apoyándose en el cálculo de probabilidades y a partir de datos muestrales, efectúa estimaciones, toma decisiones, realiza predicciones u otras generalizaciones sobre un conjunto mayor de datos.

Ejemplo: con base en una muestra de 30 mujeres se estableció que el peso promedio en kg de las mujeres mendocinas, embarazadas, de clase media, de 18 a 25 años de edad está en el intervalo **[72,8 ; 84,9]**, con una probabilidad de error del 5%.

Unidad de Análisis =
Elemento = Individuo

Población



Muestra

Definiciones

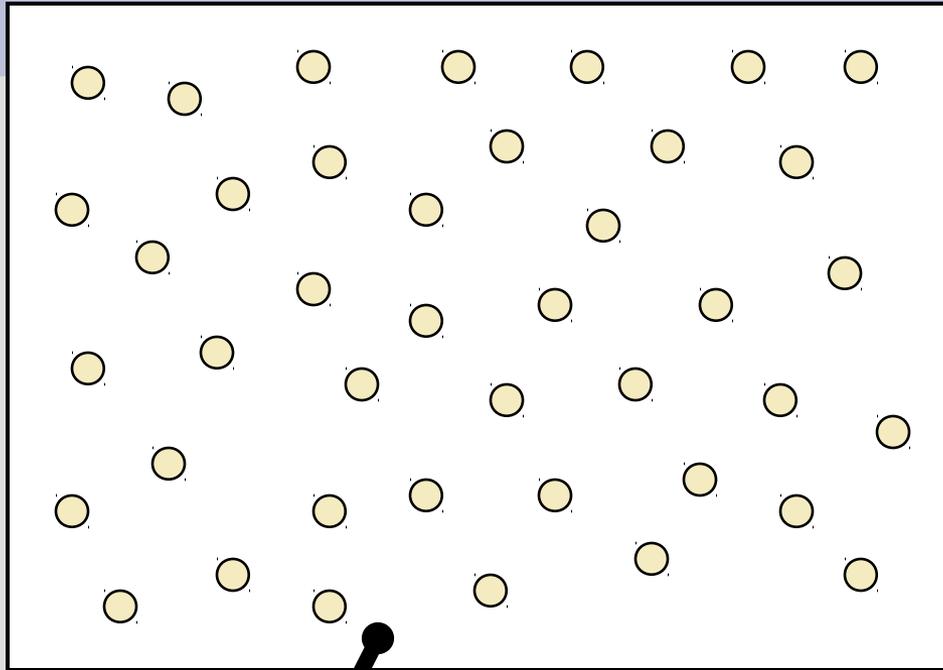
- Individuos: personas u objetos que contienen la información que se desea estudiar.
- Población: conjunto de individuos que poseen ciertas propiedades comunes.
- Muestra: subconjunto representativo de la población.

Promedio Poblacional:

Población

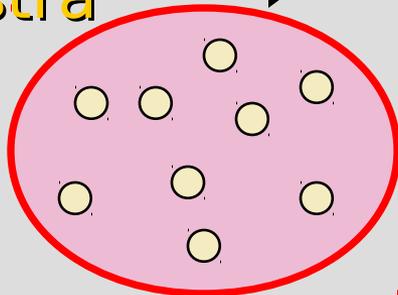
μ

Parámetro



Estadística

Muestra



Promedio Muestral:

\bar{x}

Definiciones

- Parámetro: función definida sobre los valores numéricos de características medibles de una población.
- Estadística (=estadígrafo): función definida sobre los valores observados de una muestra.

Problema Estadístico

- Una población de interés y un procedimiento de muestreo
- Los datos y su análisis matemático
- Las inferencias estadísticas que resulten del análisis
- La probabilidad de que esas inferencias sean erróneas

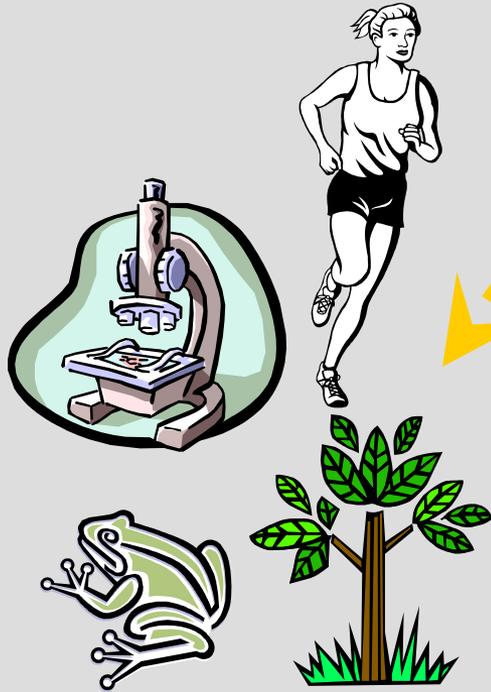
George Canavos

Organización de Datos

Esta faena es la ciencia: como se ve, consiste en dos operaciones distintas. Una puramente imaginativa, que el hombre pone de su propia y libérrima substancia; otra confrontadora con lo que no es el hombre, con lo que lo rodea, con los hechos, con los datos.

José Ortega y Gasset

Observación = Medición



Peso Corporal

Porcentaje de hojas atacadas

Número de leucocitos por mm^3

Velocidad de crecimiento

Volumen de Expiración
Forzada

**VARIABLES
ESTADÍSTICAS**



DATOS

Unidad de Análisis

[Unidad Experimental]

Definiciones

- Variable Estadística (carácter): propiedad, rasgo o cualidad de los elementos de la población.
- Modalidad: uno de los posibles valores que puede tomar una variable estadística.

Definiciones

- Soporte = Recorrido = Rango: conjunto de todas las posibles modalidades o valores.
- Clase: conjunto de modalidades en la que cada modalidad pertenece a una y sólo una de las clases.

Definiciones

Ejemplo: en el ejemplo de las embarazadas tenemos:

Variable: peso

Modalidades: 75, 52, 92, 71

Recorrido: $[0, \infty)$

Clase: $[51, 67]$

Tipos de Variables (o tipos de datos)

- ✦ **Cualitativas**: modalidades de tipo nominal (etiquetas).
 - dicotómicos = binarios
- ✦ **Ordinales**: modalidades de tipo nominal naturalmente ordenadas.
- ✦ **Numéricas**: modalidades numéricas que admiten operaciones aritméticas.
 - i. **Discretas**: número enteros
 - ii. **Continuas**: números reales

Tabla Estadística

Sea un grupo de n individuos en el que se observa una variable X con modalidades agrupadas en k clases: c_1, c_2, \dots, c_k . Para cada clase se definen:

Frecuencia Absoluta: el número n_i de observaciones con modalidades pertenecientes a la clase c_i .

Frecuencia Relativa: el número f_i definido como

$$f_i = n_i / n$$

Tabla Estadística

Frecuencia Absoluta Acumulada: el número N_i de observaciones con modalidades pertenecientes a cualquiera de las clases c_j con $j \leq i$

$$N_i = \sum_{j=1}^i n_j$$

Frecuencia Relativa Acumulada: el número F_i definido como

$$F_i = \sum_{j=1}^i \frac{n_j}{n}$$

Tabla Estadística

- Distribución de Frecuencias: función que asigna a cada clase una y sólo una frecuencia.
- Tabla estadística: una forma de representación ordenada de la distribución de frecuencias

Tabla Estadística

Modali.	Frec. Abs.	Frec. Rel.	Frec. Abs. Acumu.	Frec. Rel. Acumu.
C	n_i	f_i	N_i	F_i
c_1	n_1	$f_1 = \frac{n_1}{n}$	$N_1 = n_1$	$F_1 = \frac{N_1}{n} = f_1$
...
c_j	n_j	$f_j = \frac{n_j}{n}$	$N_j = n_1 + \dots + n_j$	$F_j = \frac{N_j}{n} = f_1 + \dots + f_j$
...
c_k	n_k	$f_k = \frac{n_k}{n}$	$N_k = n$	$F_k = 1$
	n	1		

Ejemplo 1: en una muestra de 400 insectos se observó el sexo de cada uno y se contaron 275 hembras y 125 machos.

La variable observada es:

$X :=$ sexo del insecto

Es de tipo “cualitativa” (binaria o dicotómica)

Las clases son “hembra” y “macho”

Las frecuencias absolutas son 275 y 125 respectivamente

Las frecuencias relativas son 0,6875 y 0,3125 respectivamente

Tabla Estadística

X: "Sexo de los insectos"

Clase	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Hembra	275	0,6875
Macho	125	0,3125
Total	400	1,0000

Ejemplo 2: en una muestra de 80 flores se observo el color de la corola de cada una y se contaron 29 rojas 37 blancas y 14 rosadas.

La variable observada es:

$X :=$ color de la corola

Es de tipo “cualitativa” (politómica)

Las clases son “roja”, “rosada” y “blanca”

Las frecuencias absolutas son 29, 37 y 14 respectivamente

Las frecuencias relativas son 0,3625; 0,4625 y 0,1750 respectivamente

Tabla Estadística

X: "color de la corola"

Clase	F. A.	F. R.
Roja	29	0,3625
Blanca	37	0,4625
Rosada	14	0,1750
Total	80	1,0000

Ejemplo 3: en 40 sitios se observó la presencia de cierta especie de gramínea. Según la cantidad de plantas se anotó como “predominante”, “abundante”, “moderada”, “escasa” y “ausente”. Se contaron 9, 21, 6, 3 y 1 sitios respectivamente.

X:=presencia de la especie de gramínea

Es de tipo “ordinal” (cuasicuantitativa)

Las clases son “predominante”, “abundante”, “moderada”, “escasa” y “ausente”

Las frecuencias absolutas son 9, 21, 6, 3 y 1 respectivamente

Las frecuencias relativas son 0,225; 0,525; 0,150; 0,075 y 0,025 respectivamente

Tabla Estadística

X: "Presencia de una especie de gramínea en distintos sitios"

Clase	F. A.	F.A. Acum.	F. R.	F. R.Acum.
Predominante	9	9	0,225	0,225
Abundante	21	30	0,525	0,750
Moderada	6	36	0,150	0,900
Escasa	3	39	0,075	0,975
Ausente	1	40	0,025	1,000
Total	40	-	1,000	-

Ejemplo 4: en 30 preparados de cierto tejido se contaron las células de tipo HL.

X : = número de células HL

Es de tipo “cuantitativa discreta”

Las clases son

Las frecuencias absolutas son.....

Las frecuencias relativas son.....

Tabla Estadística

X: "número de células HL"

Clase	F. A.	F.A. Acum.	F. R.	F.R. Acum.
2	12	12	0,400	0,400
3	9	21	0,300	0,700
4	5	26	0,167	0,867
5	3	29	0,100	0,967
6	1	30	0,033	1,000
Total	30	-	1,000	-

Ejemplo 5: a través de una cliserie se tomaron muestras de suelo en 40 sitios y se midió el contenido de nitrógeno del suelo expresado en gramos de N_2O_5 cada 100g de suelo.

$X :=$ contenido de nitrógeno del suelo expresado en gramos de N_2O_5 cada 100g de suelo

Es de tipo “cuantitativa continua”

Las clases son intervalos de números reales no negativos.....

Las frecuencias absolutas son.....

Las frecuencias relativas son.....

Tabla Estadística

X: "contenido de Nitrógeno en el suelo expresado como g de N_2O_5 cada 100g de suelo"

Clase	Punto Medio	F. A.	F.A. Acumulada	F. R.	F.R. Acumulada
[0.0;0.3]	0,15	31	31	0,775	0,775
(0.3;0.6]	0,45	7	38	0,175	0,950
(0.6;0.9]	0,75	1	39	0,025	0,975
(0.9;1.2]	1,05	0	39	0,000	0,975
(1.2;1.5]	1,35	1	40	0,025	1,000
Total	-	40	-	1,000	-

Representación Gráfica

- El tipo de gráfico utilizado debe ajustarse al tipo de variable estadística en estudio.

Datos Binarios

X: "Sexo de los insectos"

Diagrama de Barras

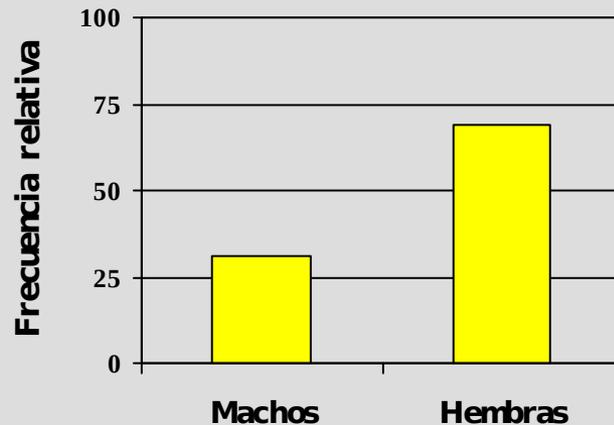


Diagrama de Barras

Diagrama Circular (Piechart)

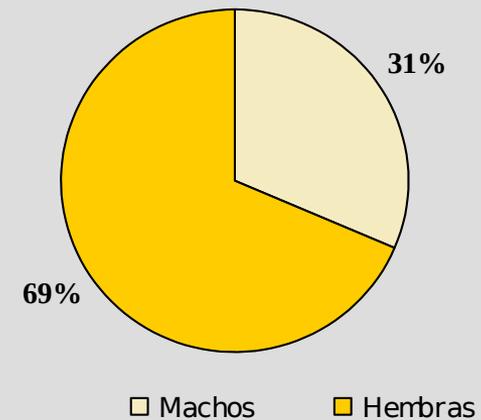


Diagrama de Sectores

Datos Nominales

X: "color de la corola"

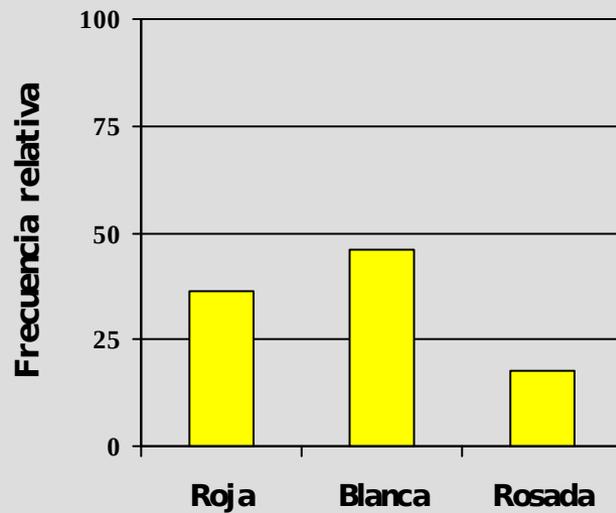


Diagrama de Barras

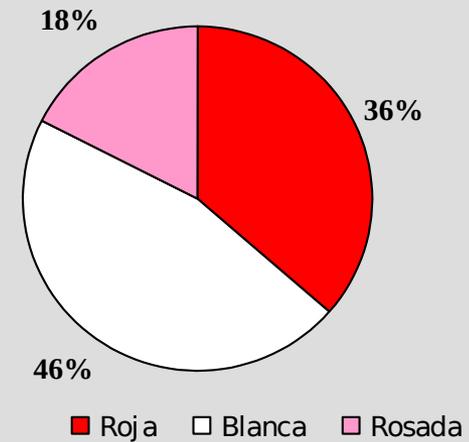
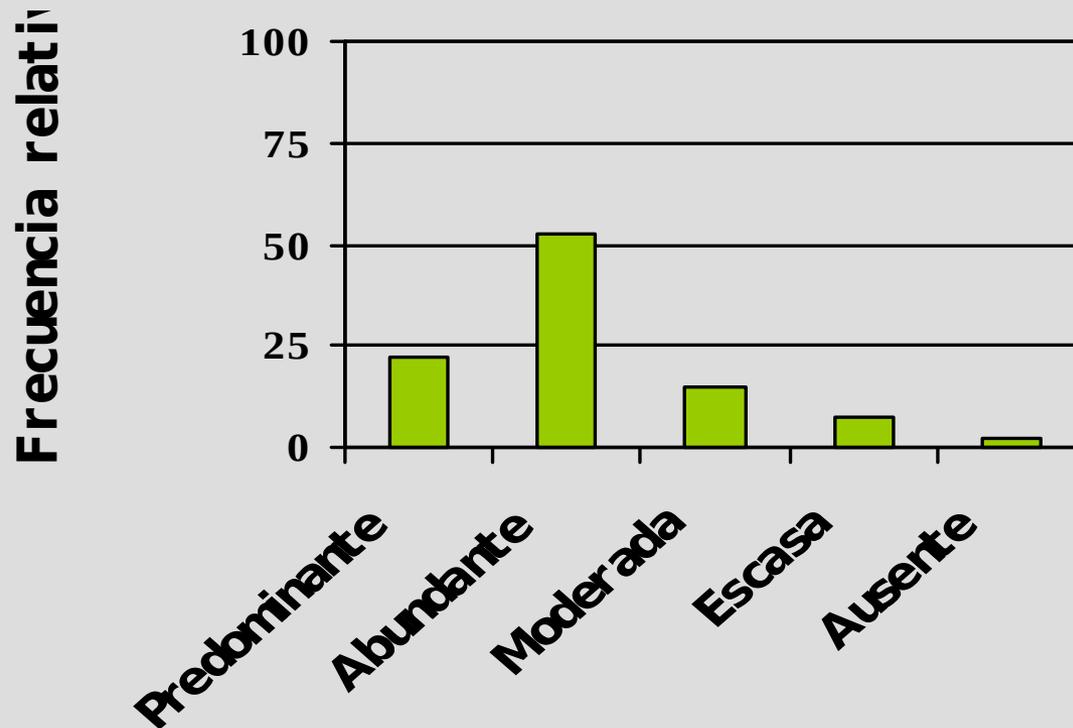


Diagrama de Sectores

Datos Ordinales

X: "Presencia de una especie de gramínea en distintos sitios"

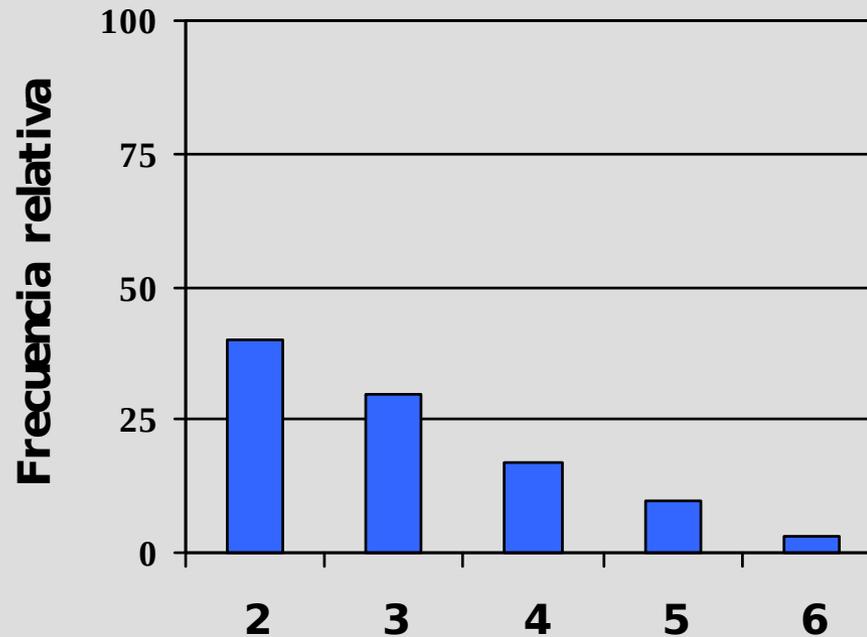
Diagrama de barras



Datos Numéricos Discretos

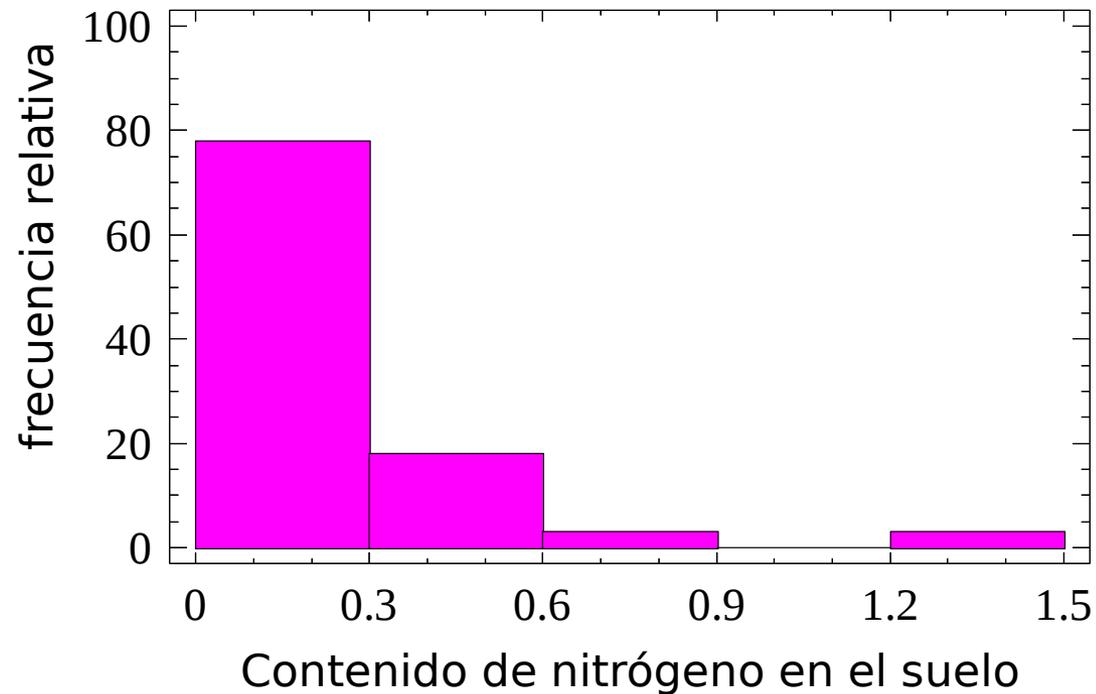
X: "Recuento de células en microscopio"

Diagrama de barras



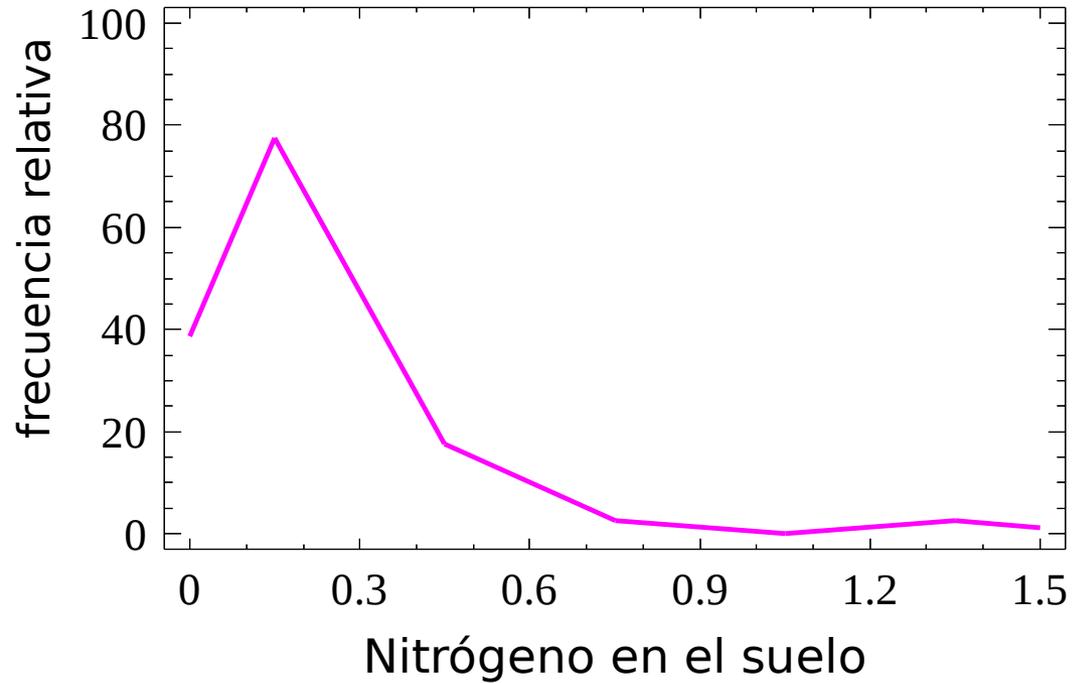
Datos Numéricos Continuos

Histograma



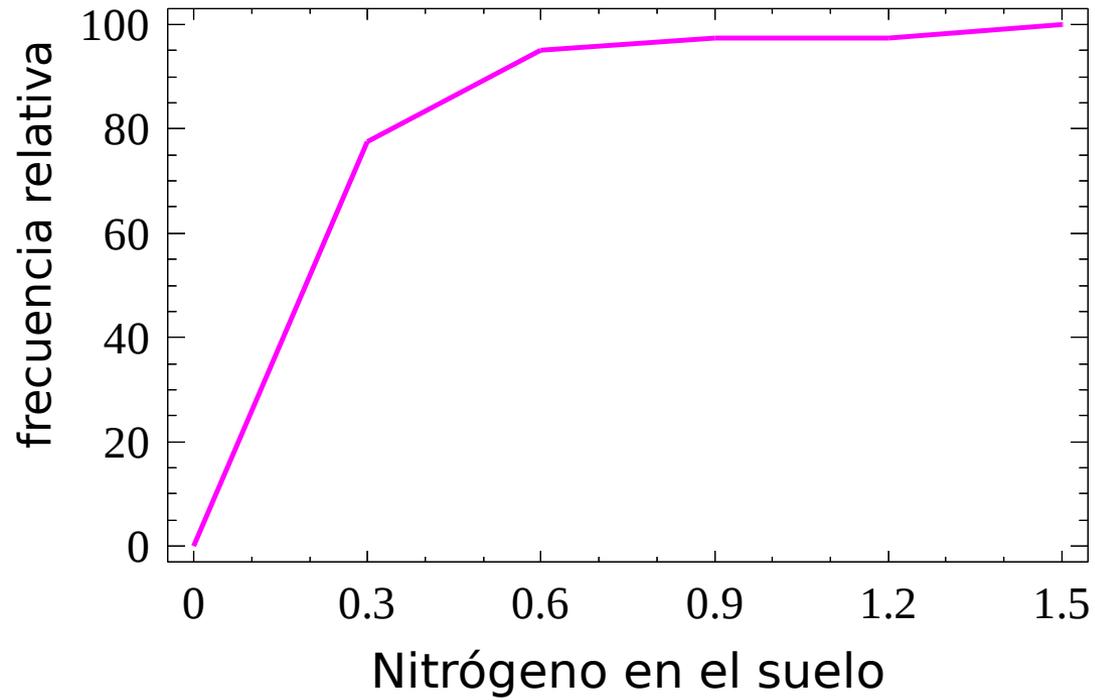
Datos Numéricos Continuos

Polígono de Frecuencia



Datos Numéricos Continuos

Polígono de Frecuencia Acumulada

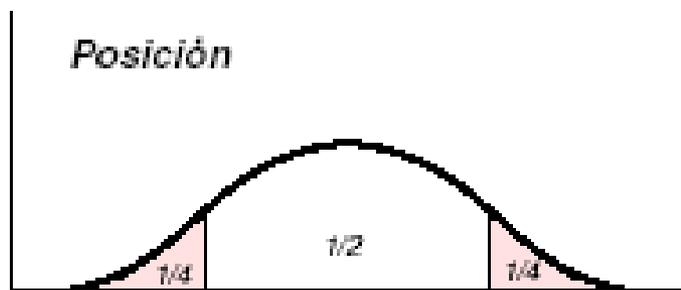
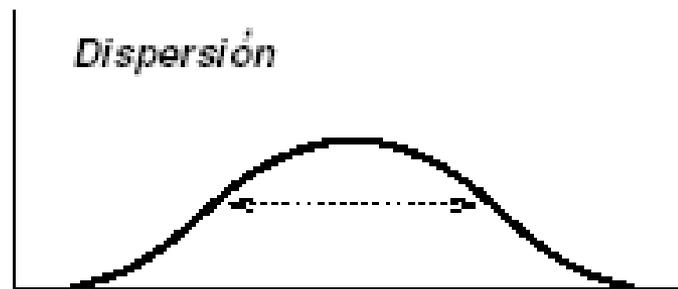
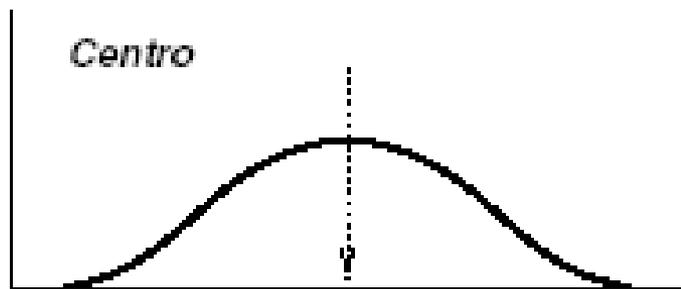


En síntesis:

Tipo de variable	Diagrama
V. Cualitativa	Barras, sectores, pictogramas
V. Discreta	Diferencial (barras) Integral (en escalera)
V. Continua	Diferencial (histograma, polígono de frecuencias) Integral (diagramas acumulados)

Medidas de Resumen

- Tendencia Central
- Dispersión = Variación
- Posición
- Asimetría = Sesgo
- Curtosis = Apuntamiento



Tendencia Central

Para un conjunto de ***n*** datos organizados en ***k*** clases se definen:

- **Media aritmética:** $\bar{x} = \sum_{i=1}^k x_i f_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i$
- **Mediana:** dato que ocupa la posición central en el conjunto ordenado de los datos.
- **Moda:** el valor con la mayor frecuencia.

Dispersión

- **Rango**

$$X_{max} - X_{min}$$

- **Varianza:**

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

- **Desviación Estándar = Desviación Típica:**

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Dispersión

- **Error estándar**

$$ee = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

- **Coeficiente de Variación**

$$CV = \frac{s}{x}$$

Medidas de Posición (Estadísticas de Orden)

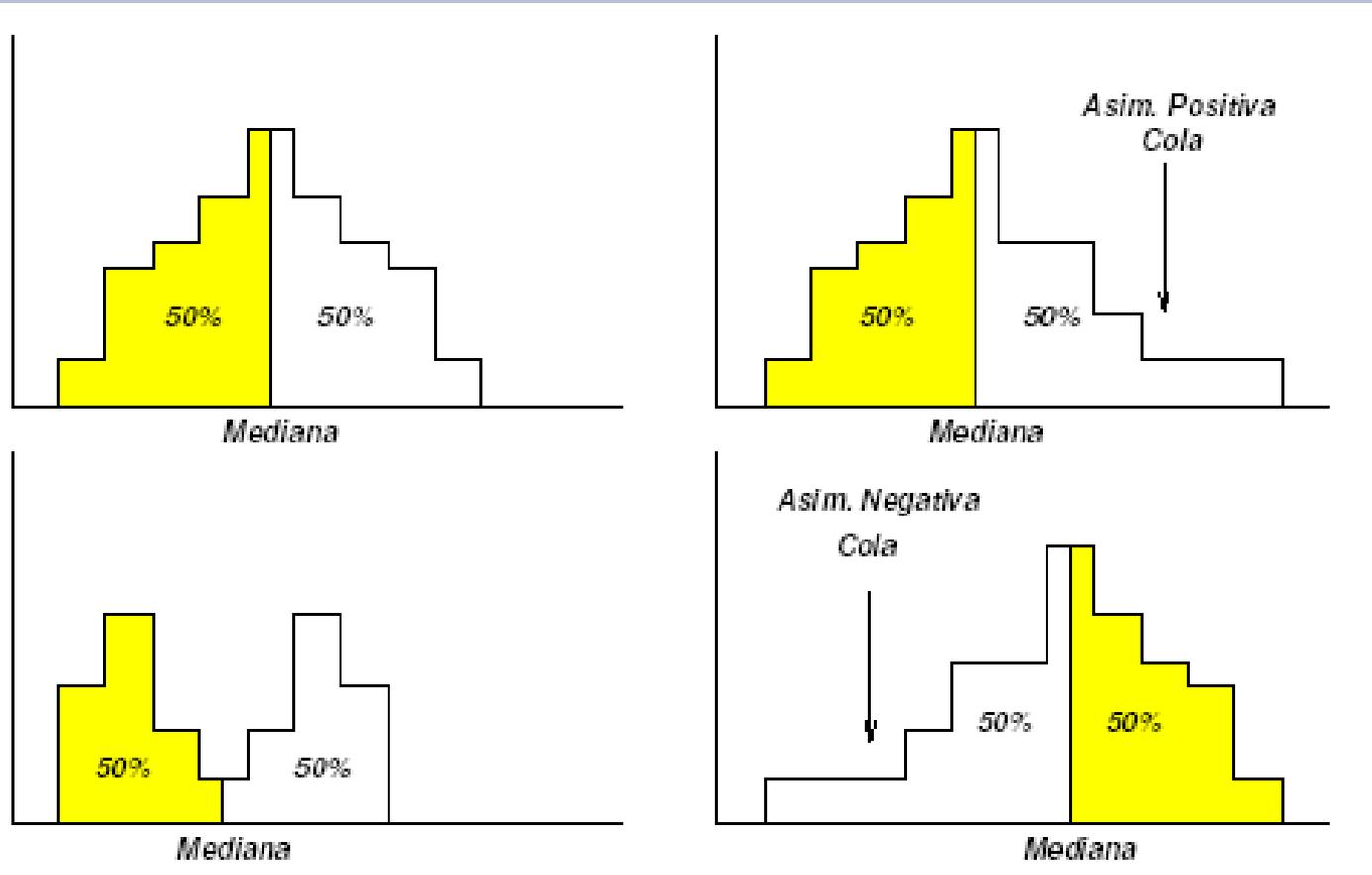
- **Percentilo:** el valor que deja por debajo de sí el k% de los datos.

$$P_k = l_{i-1} + a_i \frac{\frac{nk}{100} - N_{i-1}}{n_i}$$

$$P_k \in (l_{i-1}; l_i]$$

- **Mediana:** el valor que deja por debajo de sí el 50% de los datos.
- **Cuartiles:** dividen a la muestra en cuatro partes con igual proporción de observaciones (25% c/u).

Asimetría



Asimetría

Momento Ordinario de orden p

$$\mu_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p$$

Momento Centrado de orden p

$$m_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(x_i - \bar{x} \right)^p$$

Asimetría

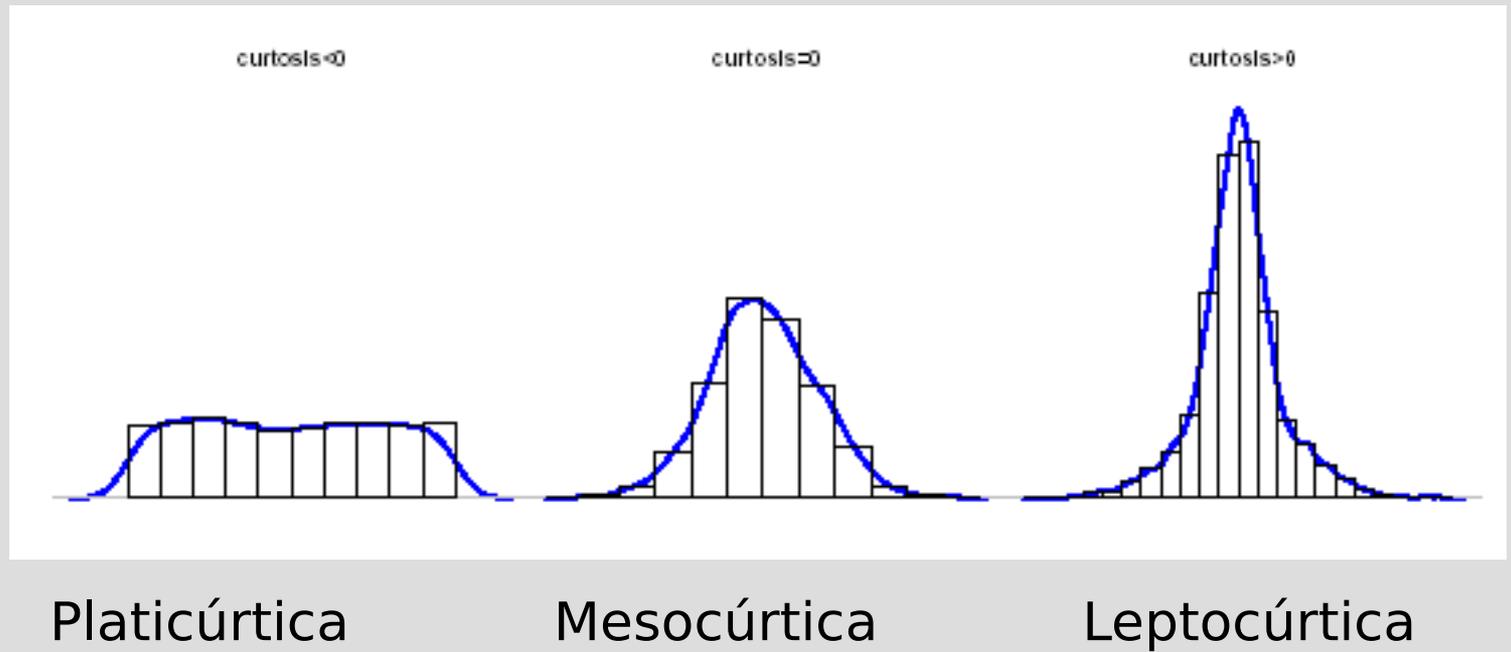
Índice de Asimetría basado en el Momento Central de tercer orden

$$m_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3$$

Índice de Yule-Bowley

$$As = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1}$$

Curtosis



Curtosis

$$\gamma_2 = \frac{m_4}{S^4} - 3$$

(tomando como patrón de referencia a la Distribución Normal o Distribución de Gauss)

Leptocúrtica: Cuando $\gamma_2 > 0$, o sea, si la distribución de frecuencias es más apuntada que la normal;

Mesocúrtica: Cuando $\gamma_2 = 0$, es decir, cuando la distribución de frecuencias es tan apuntada como la normal;

Platicúrtica: Cuando $\gamma_2 < 0$, o sea, si la distribución de frecuencias es menos apuntada que la normal;

Nitrógeno en el suelo:

Count = 40

Average = 0.25175

Median = 0.175

Variance = 0.0544353

Standard deviation = 0.233314

Minimum = 0.08

Maximum = 1.43

Range = 1.35

Lower quartile = 0.145

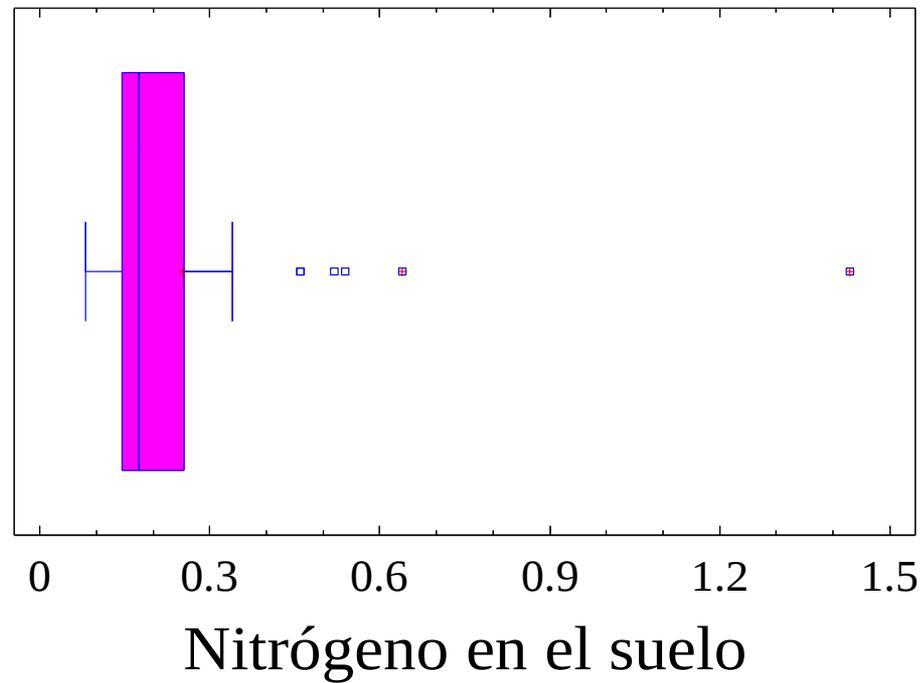
Upper quartile = 0.255

Std. skewness = 9.42623

Std. kurtosis = 21.4986

Nitrógeno en el suelo:

Box-and-Whisker Plot



Relaciones entre la media y la desviación estándar

Distribución Normal:

Intervalo

Porcentaje de datos incluidos el Intervalo

$$\left[\bar{x} - s ; \bar{x} + s \right]$$

68%

$$\left[\bar{x} - 2s ; \bar{x} + 2s \right]$$

95%

$$\left[\bar{x} - 3s ; \bar{x} + 3s \right]$$

99%

Relaciones entre la media y la desviación estándar

Desigualdad de Chebyshev:

$$|x - \bar{x}| \leq k s$$



$$100 \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) \%$$

Variables Bidimensionales

Ejemplo 6

Sobre 22 muestras de agua de pozo tomadas en el departamento de Lavalle se midieron las siguientes variables

X:=contenido de catión sodio

Y:=contenido de anión sulfato

Los datos son los siguientes:

obs.	Y(SO4)	X(Na)	obs.	Y(SO4)	X(Na)
1	384.00	103.50	12	268.80	161.00
2	3880.80	2530.00	13	974.40	632.50
3	2356.80	920.00	14	662.40	15.64
4	643.20	345.00	15	1488.00	805.00
5	1972.80	517.50	16	278.40	184.00
6	744.00	230.00	17	2059.20	230.00
7	998.40	402.50	18	984.00	460.00
8	6000.00	3220.00	19	1656.00	287.50
9	3840.00	1840.00	20	264.00	57.50
10	326.00	230.00	21	1593.60	575.00
11	825.60	402.50	22	484.80	276.00

Se tienen las siguientes medidas de resumen:

Medida	Y(SO4)	X(Na)
Media	1485.69	655.69
Desviación Estándar	1449.78	823.34
Min	264.00	15.64
Q1	524.40	230.00
Mediana	979.20	373.75
Q3	1893.60	618.13
Max	6000.00	3220.00
I QR	1369.20	388.13

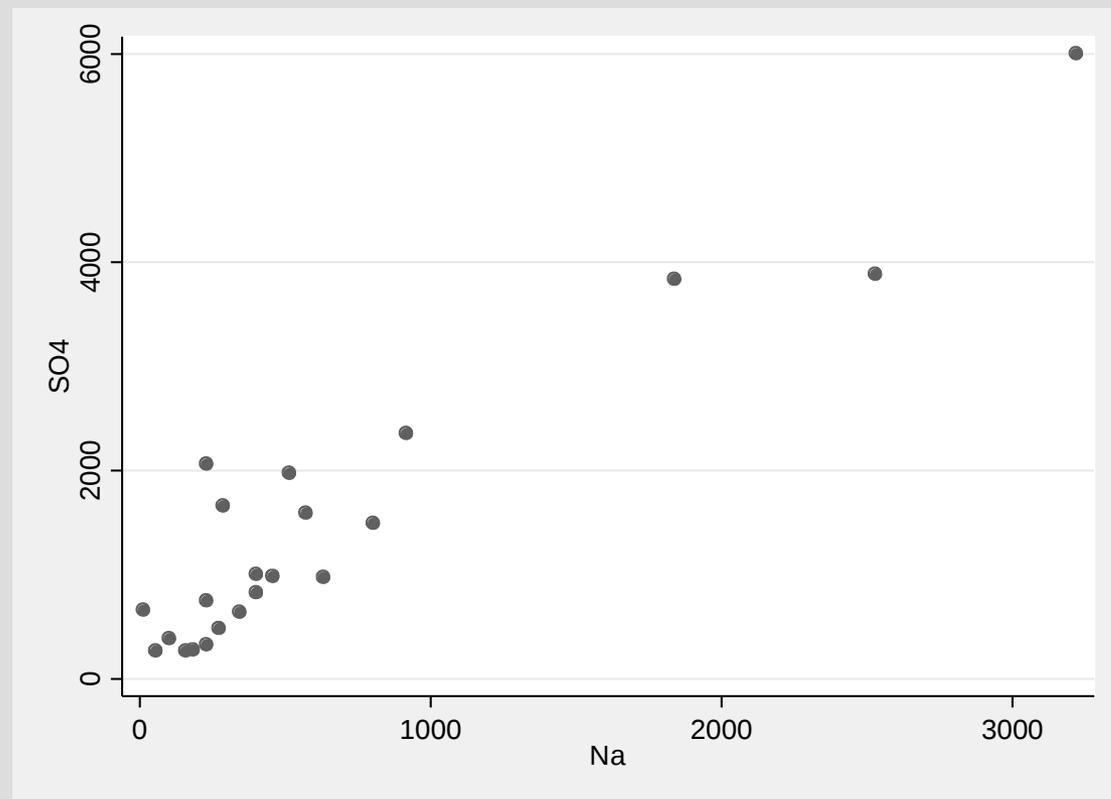
Ambas variables constituyen un “vector”
o variable bidimensional:

$$(X, Y)$$

Cada individuo está caracterizado por un
“par ordenado” de observaciones.

$$\text{Individuo } i \rightarrow (x_i, y_i)$$

Un gráfico adecuado es el “diagrama de dispersión” (scatterplot)



Puedemedir la variación conjunta de ambas variables mediante la "covarianza"

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Con el inconveniente de que sus unidades son el producto de las de X por las de Y .

S_{xy} puede tomar cualquier valor real

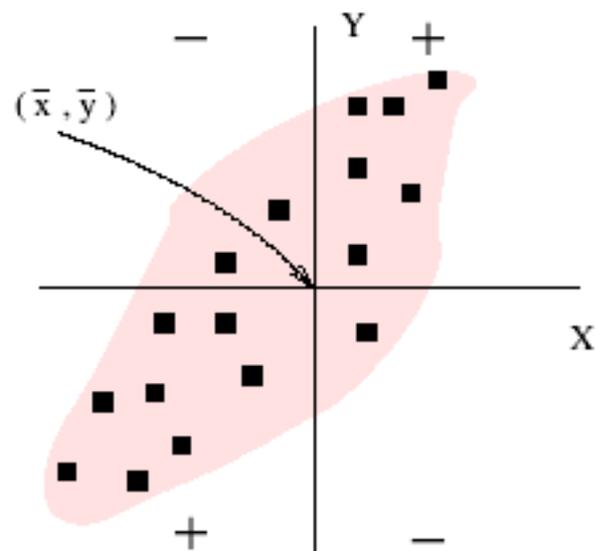
Si $S_{xy} = 0$ las variables X e Y

son no correlacionadas.

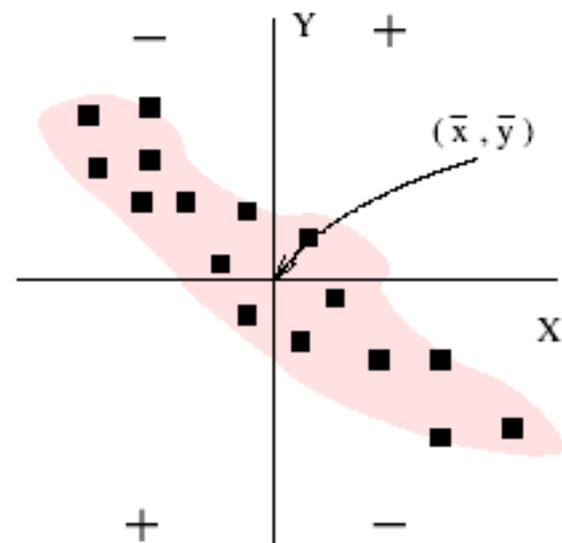
La covarianza mide la *relación lineal* entre ambas variables.

$S_{xy} > 0$ indica relación lineal directa

$S_{xy} < 0$ indica relación lineal inversa

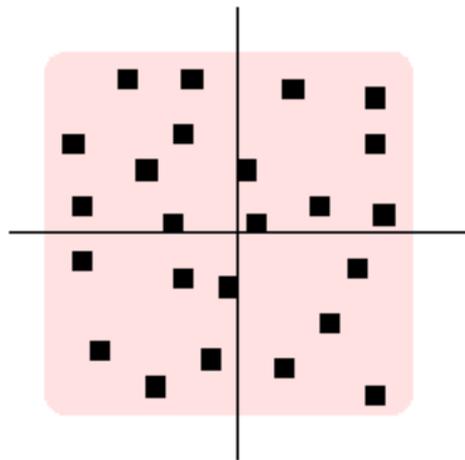


Cuando X crece, Y crece
Casi todos los puntos pertenecen
a los cuadrantes primero y tercero



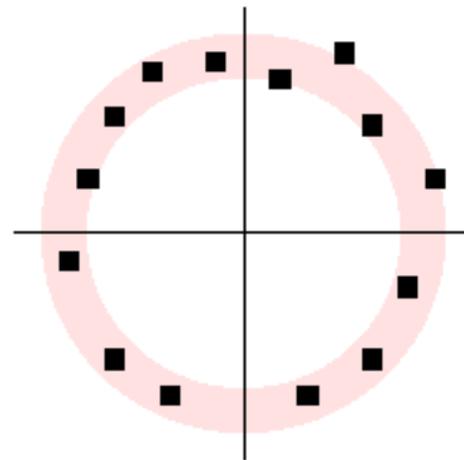
Cuando X crece, Y decrece
Casi todos los puntos pertenecen
a los cuadrantes segundo y cuarto

$$S_{xy}=0$$



Las dos variables son independientes.

$$S_{xy}=0$$



Hay dependencia entre las dos variables, aunque la covarianza sea nula.

El coeficiente de correlación lineal de Pearson resuelve el problema de las unidades de medida mediante la estandarización de las variables

$$R = \frac{S_{XY}}{S_X S_Y}$$

R puede tomar valores en $[0;1]$

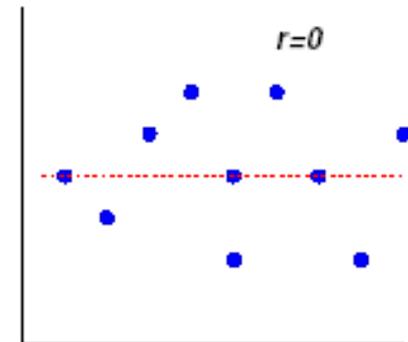
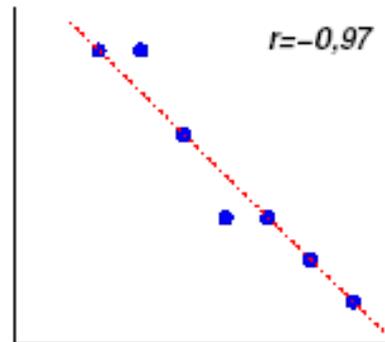
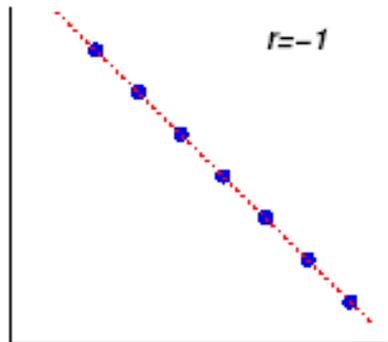
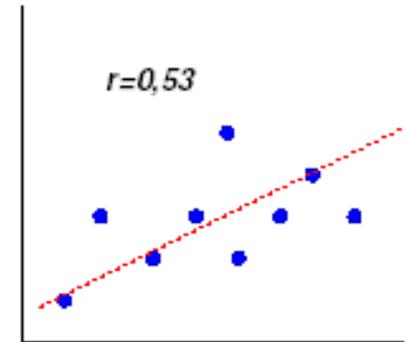
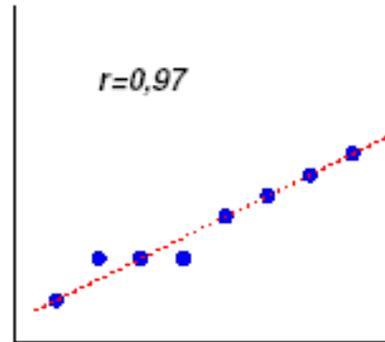
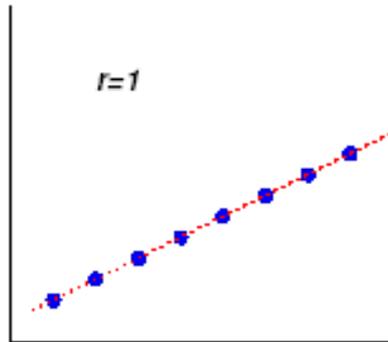
Si $R = 0$ las variables X e Y
son *no correlacionadas*.

El coef. de correlación lineal de
Pearson mide la *relación*
lineal entre ambas variables.

$0 < R \leq 1$ indica relación lineal directa

$-1 \leq R < 0$ indica relación lineal inversa

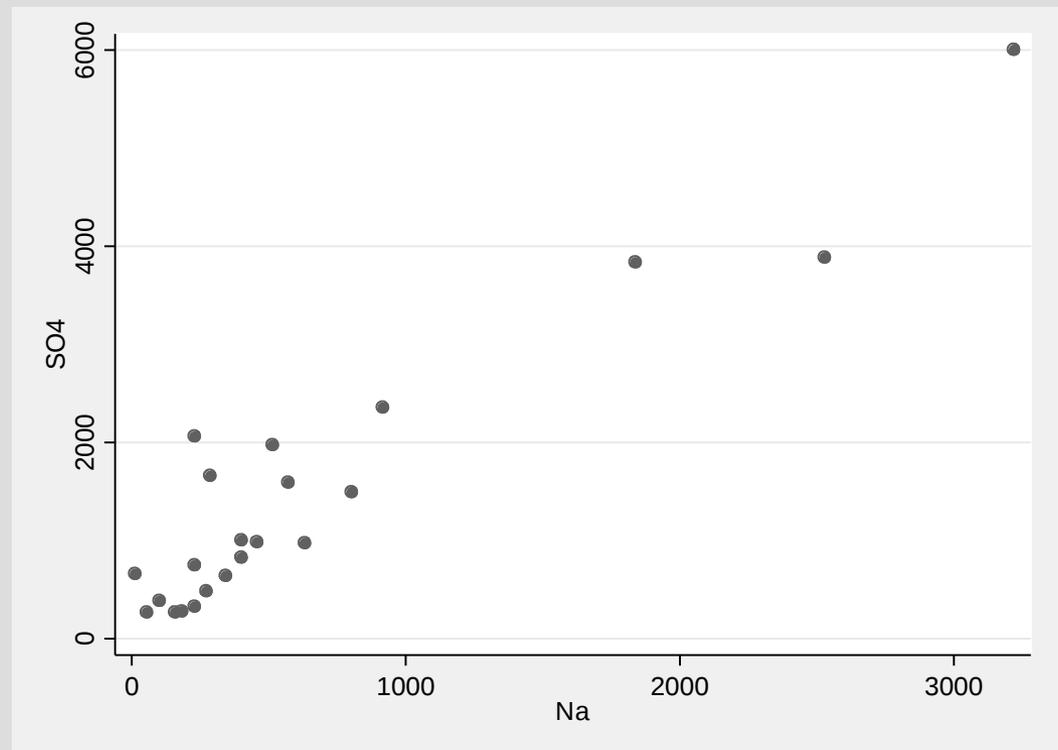
Relación Lineal



Para el ejemplo tiene

$$S_{XY} = 1.1 \times 10^6$$

$$R = 0.9411$$



Relación Funcional

$Y :=$ variable dependiente

$X :=$ variable independiente

$$Y = f(X)$$

Consideremos el caso de $f()$
lineal

Función Lineal

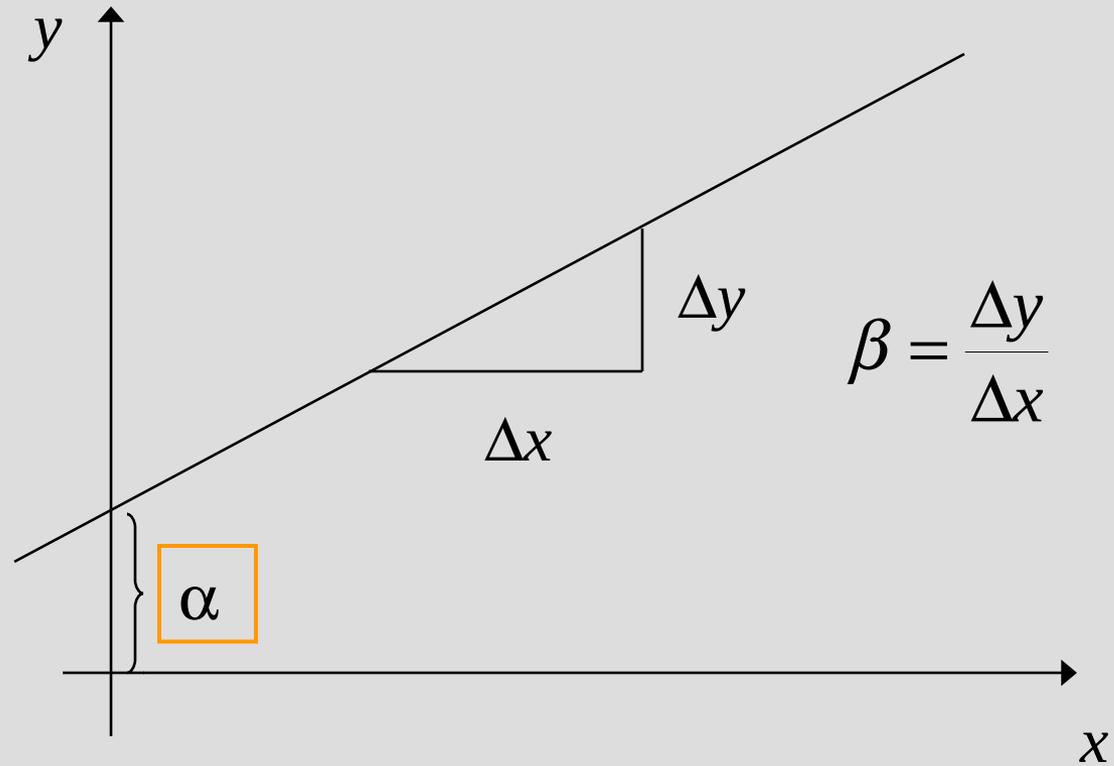
Ecuación de la línea recta

$$Y = \alpha + \beta X$$

α : = ordenada al origen (intercepto)

β : = pendiente

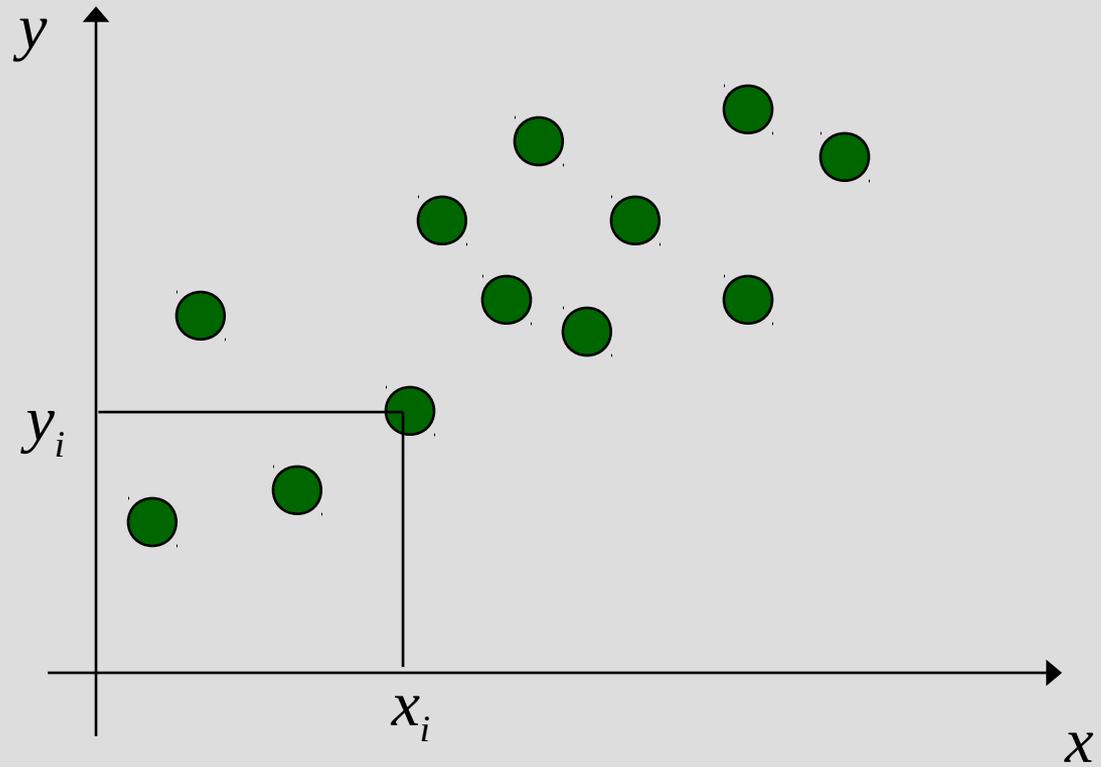
Función Lineal



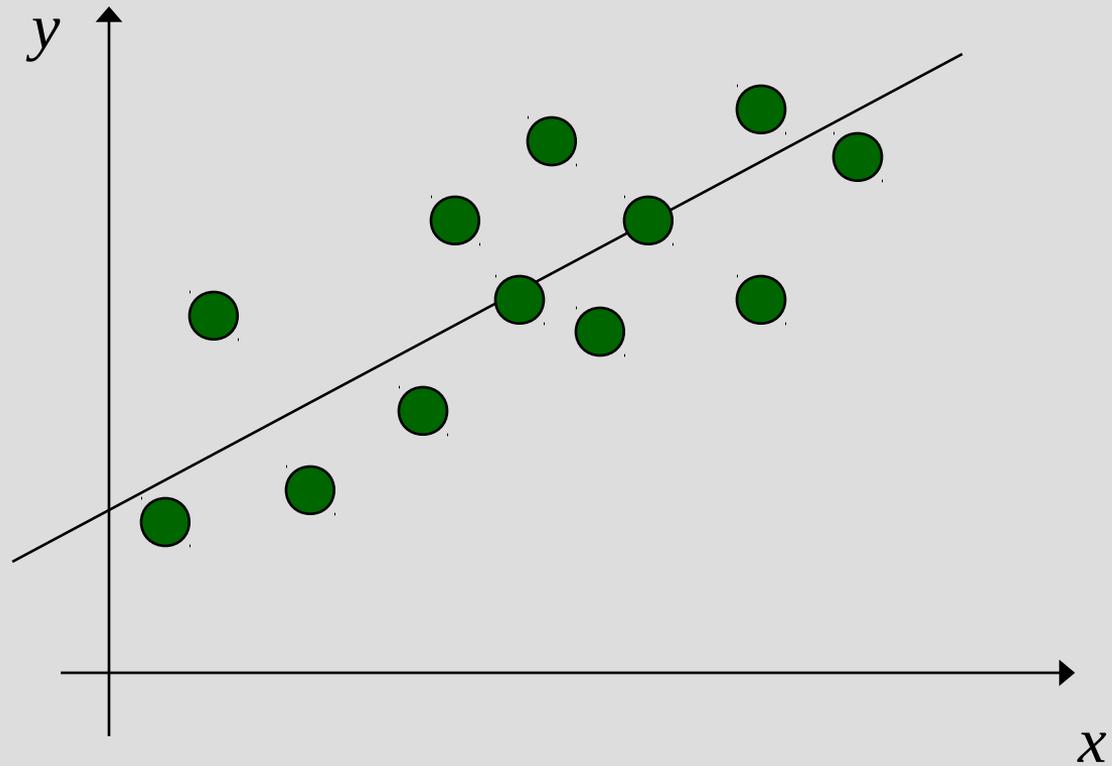
Datos

Observación	X	Y
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
...
i	x_i	y_i
...
n	x_n	y_n

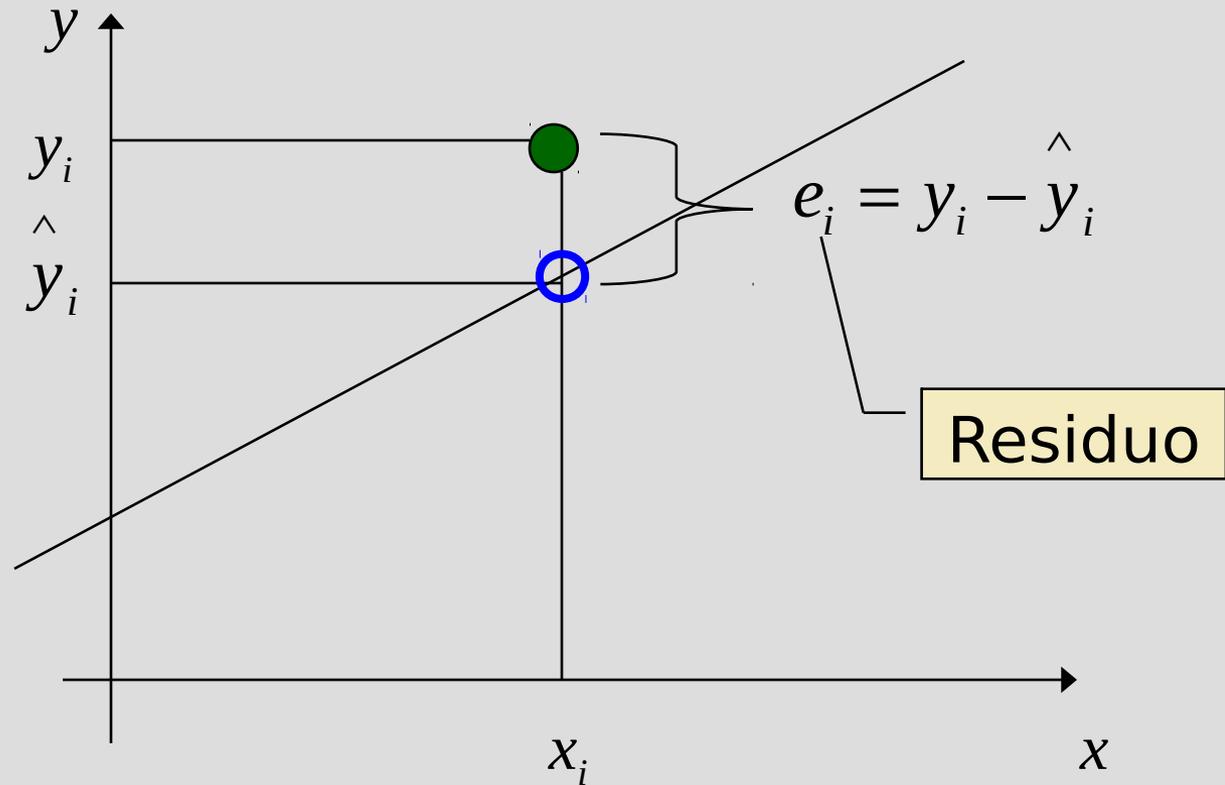
Datos



Recta de Ajuste



Para un punto particular



Residuos

Se define el "residuo" para la i -ésima observación como:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i$$

Para puntos por encima de la recta $e_i > 0$
y por debajo $e_i < 0$.

Criterio de Mínimos Cuadrados

Se quiere encontrar α y β tales que se *minimice* la suma de cuadrados de residuos para los n puntos

$$Q = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \hat{y}_i \right)^2$$

Criterio de Mínimos Cuadrados

Dado que $\hat{y}_i = \alpha + \beta x_i$ resulta que se debe **minimizar**

$$Q = \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha - \beta x_i)^2$$

respecto a α y β .

Criterio de Mínimos Cuadrados

Resolviendo se obtienen los **estimadores de mínimos cuadrados** cuyas formas son:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{S_{XY}}{S_{XX}}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x}$$

Bondad de Ajuste

La bondad del ajuste se evalúa por el *coeficiente de determinación*

$$R^2 = \frac{\text{Variabilidad explicada por el modelo}}{\text{Variabilidad Total}}$$

Bondad de Ajuste

La variabilidad total $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ se descompon
en la variabilidad explicada por el modelo

$$\sum_{i=1}^n \left(\hat{y}_i - \bar{y} \right)^2$$

y la variabilidad residual

$$\sum_{i=1}^n \left(y_i - \hat{y}_i \right)^2$$

Bondad de Ajuste

De modo que:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n \left(\hat{y}_i - \bar{y} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(y_i - \hat{y}_i \right)^2$$

$$SC(\text{Total}) = SC(\text{Reg}) + SC(\text{Res})$$

Bondad de Ajuste

Así

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\hat{y}_i - \bar{y} \right)^2}{\sum_{i=1}^n \left(y_i - \bar{y} \right)^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \left(y_i - \hat{y}_i \right)^2}{\sum_{i=1}^n \left(y_i - \bar{y} \right)^2}$$

Bondad de Ajuste

Así

$$R^2 = \frac{SC(Regr)}{SC(Total)} = 1 - \frac{SC(Res)}{SC(Total)}$$

Bondad de Ajuste

El coeficiente de determinación tiene la propiedad de tomar valores entre 0 y 1.

$$0 \leq R^2 \leq 1$$

0 → Ausencia de Ajuste Lineal

1 → Ajuste Lineal Perfecto

Bondad de Ajuste

En el caso del modelo lineal el coeficiente de determinación, R^2 , coincide con el cuadrado del coeficiente de correlación lineal de Pearson, R .

En el caso de ajuste no lineal esto no es así !!!