1. Sea $f(x) = \cos(2x) + 3$:

a) Indicar dominio, imagen, ceros, ordenada al origen. **(12%)**

b) Hacer una restricción de dominio adecuada y encontrar la función inversa.**(4%)**

c) Indicar dominio e imagen de f^{-1} .**(3%)**

d) Bosquejar la gráfica de un periodo f y f^{-1}, en el siguiente gráfico.**(5%)**

Solución:

a)

- $Dom\ f: (-\infty; \infty)$
- $Img\ f: [2; 4]$

$\rightarrow$ *Se desplaza 3 unidades hacia arriba*

- $Ceros: No\ posee$

$\rightarrow y = 0 \notin\ Img\ f$

$\rightarrow cos(2x) + 3 = 0$

$$cos(2x) + 3 - 3 = 0 - 3$$
$$cos(2x) = -3\ ; no\ tiene\ soluc\acute{o}n, ya\ que -1 \leq \cos t \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$$

- $Ordenada\ al\ origen: y = 4$

$\rightarrow f(0) = cos(2.0) + 3$

$$f(0) = cos(0) + 3$$
$$f(0) = 1 + 3$$
$$f(0) = 4$$

b)

- *Restricción del dominio:* $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$\rightarrow Desplazamiento\ de\ fase = 0$

$\rightarrow Periodo = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Para restringir el dominio usamos la mitad del periodo $\frac{\pi}{2}$*, ya que para que exista su inversa la función debe ser biyectiva.*

- *Función inversa:* $f^{-1}(x) = \frac{\cos^{-1}(x-3)}{2}$

$\rightarrow f(x) = cos(2.x) + 3$

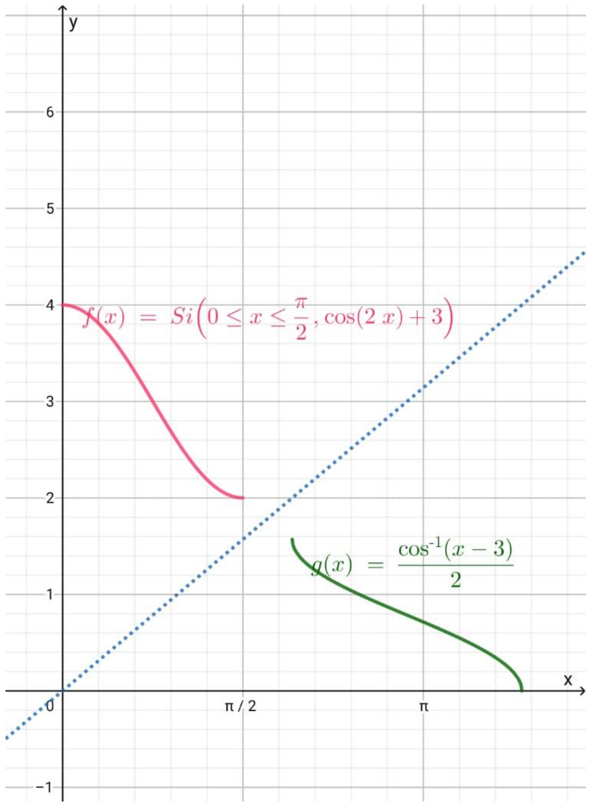
$$y = cos(2.x) + 3$$
$$y - 3 = cos(2.x) + 3 - 3$$

$$y - 3 = cos(2.x)$$
$$2x = cos^{-1}(y-3)$$
$$2x.\frac{1}{2} = cos^{-1}(y-3).\ \frac{1}{2}$$
$$x = \frac{cos^{-1}(y-3)}{2}$$
$$y = \frac{cos^{-1}(x-3)}{2}$$
$$f^{-1}(x) = \frac{cos^{-1}(x-3)}{2}$$

c)

- $Dom\ f^{-1}$: $[2;4]$
- $Img\ f^{-1}$: $\left[o;\frac{\pi}{2}\right]$

d) Gráfico



2. Encontrar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones: **(24%)**

a) $cos^2(x) = cos(x)$ con $x \in\ [0,\ \pi]$
b) $log_3[3 + log_3(3+x)] = 0$
c) $\log_5 x = \log_x 625$ (*Sugerencia: aplicar propiedad da cambio de base y propiedades de valor absoluto)*
d) $\log_5 x + \frac{\log_5 125}{\log_5 x} = \frac{7}{2}$

Solución:

a) $cos^2(x) = \cos(x)$ con $x \in\ [0,\ \pi]$

$cos^2(x) - cos(x) = cos(x) - cos(x)$ $\rightarrow$ Se resta cos(x) a ambos miembros

$cos^2(x) - cos(x) = 0$	$\rightarrow$ Se resuelve la suma
$cos(x)(cos(x) - 1) = 0$	$\rightarrow$ Se factoriza, aplicando factor común

$cos(x) = 0$	$\rightarrow$ Se iguala el primer factor cero
$\cos^{-1}(0) = x$	$\rightarrow$ Se determina cos (x)
$\boldsymbol{\frac{\pi}{2} = x_1}$	$\rightarrow$ Se determina x en el intervalo $[0,\ \pi]$

$cos(x) - 1 = 0$	$\rightarrow$ Se iguala el segundo factor a cero
$cos(x) - 1 + 1 = 0 + 1$	$\rightarrow$ Se suma uno a ambos miembros
$cos(x) = 1$	$\rightarrow$ Se resuelven las sumas
$\cos^{-1}(1) = x$	$\rightarrow$ Se determina cos (x)
$\boldsymbol{o = x_2}$	$\rightarrow$ Se determina x en el intervalo $[0,\ \pi]$

Verificación

$PM = cos^2\left(\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\right) =$	$\rightarrow$ Se reemplaza x por $\frac{\pi}{2}$ en el PM
$= \ 0^2 =$	$\rightarrow$ Se resuelve el coseno
$= 0$	$\rightarrow$ Se resuelve la potencia
$SM = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) =$	$\rightarrow$ Se reemplaza x por $\frac{\pi}{2}$ en el SM
$= 0$	$\rightarrow$ Se resuelve el coseno
Luego PM = SM	

$PM = cos^2(0) =$	$\rightarrow$ Se reemplaza x por 0 en el PM
$= \ 1^2 =$	$\rightarrow$ Se resuelve el coseno
$= 1$	$\rightarrow$ Se resuelve la potencia
$SM = \cos(0) =$	$\rightarrow$ Se reemplaza x por 0 en el SM
$= 1$	$\rightarrow$ Se resuelve el coseno
Luego PM = SM	

b) $log_3[3 + log_3(3 + x)] = 0$

$3 + log_3(3 + x) = 3^0$ → Se aplica la definición de logaritmo

$3 + log_3(3 + x) = 1$ → Se resuelve la potencia

$3 + log_3(3 + x) - 3 = 1 - 3$ → Se resta 3 a ambos miembros

$log_3(3 + x) = -2$ → Se resuelve la resta

$3 + x = 3^{-2}$ → Se aplica la definición de logaritmo

$3 + x = \frac{1}{9}$ → Se resuelve la potencia

$3 + x - 3 = \frac{1}{9} - 3$ → Se resta tres a ambos miembros

$\boldsymbol{x = -\frac{26}{9}}$ → Se resuelve la resta

Verificación

PM = $log_3\left[3 + log_3(3 - \frac{26}{9})\right] =$ → Se reemplaza x por $-\frac{\mathbf{26}}{\mathbf{9}}$

$= log_3\left[3 + log_3\left(\frac{1}{9}\right)\right] =$ → Se resuelve la suma

$= log_3[3 + (-2)] =$ → Se aplica definición de logaritmo

$= log_3[1] =$ → Se resuelve la suma

$= 0 =$SM → Se aplica definición de logaritmo

Luego PM = SM

c) $\log_5 x = \log_x 625$

$\log_5 x = \frac{\log_5 625}{\log_5 x}$ → Se cambia a base 5 el segundo miembro

$\log_5 x \,.\, \log_5 x = \frac{\log_5 625}{\log_5 x} \,.\, \log_5 x$ → Se multiplica a ambos miembros por $\log_5 x$

$(\log_5 x)^2 = \log_5 625$ → Se resuelve el producto

$(\log_5 x)^2 = 4$ → Se aplica definición de logaritmo

$\sqrt{(\log_5 x)^2} = \sqrt{4}$ → Se aplica raíz cuadrada a ambos miembros

$|(\log_5 x)| = \sqrt{4}$ → Propiedad de las raíces de índice par

$|(\log_5 x)| = 2$ → Se resuelve la raíz

$\log_5 x = 2$ → Se iguala el argumento al resultado positivo

$x = 5^2$ → Se aplica la definición de logaritmo

$\boldsymbol{x_1 = 25}$ → Se resuelve la potencia

$\log_5 x = -2$ → Se iguala el argumento al resultado negativo

$x = 5^{-2}$ → Se aplica la definición de logaritmo

$\boldsymbol{x_2 = \frac{1}{25}}$ → Se resuelve la potencia

Verificación

$\mathrm{PM} = \log_5 25 =$ → Se reemplaza x por 25 en el PM

$= 2$ → Se aplica definición de logaritmo

$\mathrm{SM} = \log_{25} 625 =$ → Se reemplaza x por 25 en el SM

$= 2$ → Se aplica definición de logaritmo

Luego PM=SM

$\mathrm{PM} = \log_5 \frac{1}{25} =$ → Se reemplaza x por $\frac{1}{25}$ en el PM

$= -2$ → Se aplica definición de logaritmo

$\mathrm{SM} = \log_{\frac{1}{25}} 625 =$ → Se reemplaza x por $\frac{1}{25}$ en el SM

$= -2$ → Se aplica definición de logaritmo

Luego PM=SM

d) $\log_5 x + \frac{\log_5 125}{\log_5 x} = \frac{7}{2}$

$\log_5 x + \dfrac{\log_5 125}{\log_5 x} - \dfrac{7}{2} = \dfrac{7}{2} - \dfrac{7}{2}$	→ Se resta $\frac{7}{2}$ a ambos miembros
$\log_5 x + \dfrac{\log_5 125}{\log_5 x} - \dfrac{7}{2} = 0$	→ Se resuelve la resta
$\log_5 x + \dfrac{3}{\log_5 x} - \dfrac{7}{2} = 0$	→ Se aplica definición de logaritmo
$\dfrac{(\log_5 x)^2 - 3 - \frac{7}{2}.\log_5 x}{\log_5 x} = 0$	→ Se realiza la suma
$\dfrac{(\log_5 x)^2 - 3 - \frac{7}{2}.\log_5 x}{\log_5 x} .\log_5 x = 0.\log_5 x$	→ Se multiplica por $\log_5 x$ a ambos miembros
$(\log_5 x)^2 - 3 - \dfrac{7}{2}.\log_5 x = 0$	→ Se resuelve el producto
$\log_5 x = u$	→ Se define la variable u.
$u^2 - 3 - \dfrac{7}{2}.u = 0$	→ Se realiza cambio de variable
$\boldsymbol{u_1 = \dfrac{3}{2}\ ;\ u_2 = 2}$	→ Se resuelve la ecuación cuadrática

$\log_5 x = \dfrac{3}{2}$	→ Se iguala $\log_5 x$ a u_1
$x = 5^{\frac{3}{2}}$	→ Se aplica la definición de logaritmo
$x = \sqrt[2]{5^3}$	→ Se resuelve la potencia
$\boldsymbol{x_1 = 5\sqrt[2]{5}}$	→ Se extrae factor

$\log_5 x = 2$	→ Se iguala $\log_5 x$ a u_2
$x = 5^2$	→ Se aplica la definición de logaritmo
$\boldsymbol{x_2 = 25}$	→ Se resuelve la potencia

Verificación

$\text{PM} = \log_5 25 + \frac{\log_5 125}{\log_5 25} =$	→ Se reemplaza x por 25 en el PM
$= 2 + \frac{3}{2} =$	→ Se aplica definición de logaritmo
$= \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2} = SM$	→ Se resuelve la suma

Luego PM=SM

$\text{PM} = \log_5 5\sqrt[2]{5} + \frac{\log_5 125}{\log_5 5\sqrt[2]{5}} =$ → Se reemplaza x por $5\sqrt[2]{5}$ en el PM

$= \log_5 5 + \log_5 \sqrt[2]{5} + \frac{\log_5 125}{\log_5 5 + \log_5 \sqrt[2]{5}} =$ → Se aplica propiedad del logaritmo del producto

$= \log_5 5 + \frac{1}{2}\log_5 5 + \frac{\log_5 125}{\log_5 5 + \frac{1}{2}\log_5 5} =$ → Se aplica propiedad del logaritmo de una potencia.

$= 1 + \frac{1}{2}.1 + \frac{3}{1 + \frac{1}{2}.1} =$ → Se aplica definición de logaritmo

$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{1 + \frac{1}{2}} =$ → Se resuelve el producto

$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{\frac{3}{2}} =$ → Se resuelve la suma

$= 1 + \frac{1}{2} + 3\,.\frac{2}{3} =$ → Se resuelve el cociente

$= 1 + \frac{1}{2} + 2 = \frac{2+1+4}{2} = \frac{7}{2}$ → Se resuelve la suma

Luego PM=SM

3. Un paciente toma 60 mg de una medicación cada t horas. La cantidad activa de la cada dosis en el organismo t horas después es $A\,.\,e^{-kt}$ gramos, donde A es la cantidad de droga suministrada, k es una constante que depende de la mediación en $1/h$.

a) ¿Cuánto tiempo de pasar para que queden 0.5mg de un medicamento cuya constante es $k = 0.4\ \ 1/h$? **(10%)**

b) Determine la función f a partir de la cual se origina la que origina a la función que permite calcular la cantidad activa de medicación en el organismo. **(3%)**

c) Describa las traslaciones, expansiones y /o reflexiones que sufre f. **(5%)**

Solución:

a) $\text{C(t)} = 0{,}5$, donde $C(t) = 60e^{-0{,}4\frac{1}{h}.t}$

$0{,}5 = 60\,.\,e^{-0{,}4\frac{1}{h}.t}$ → Se iguala C(t) a 0,5

$0{,}5.\frac{1}{60} = 60\,.\,e^{-0{,}4\frac{1}{h}.t}.\ \frac{1}{60}$ → Se multiplica a ambos miembros por $\frac{1}{60}$

$\frac{1}{120} = e^{-0{,}4\frac{1}{h}.t}$ → Se resuelve el producto

$ln\left(\frac{1}{120}\right) = ln\left(e^{-0{,}4\frac{1}{h}.t}\right)$ → Se aplica ln a ambos miembros

$ln\left(\frac{1}{120}\right) = -0{,}4\frac{1}{h}.t.lne$ → Se aplica propiedad de logaritmo de una potencia

$$ln\left(\frac{1}{120}\right) = -\frac{2}{5}\frac{1}{h}.t.1$$

→ Se resuelve el logaritmo
→ Se escribe 0,4 como fracción

$$ln\left(\frac{1}{120}\right).\left(-\frac{5h}{2}\right) = -\frac{2}{5}\frac{1}{h}.t.\left(-\frac{5h}{2}\right)$$

→ Se multiplica por $\left(-\frac{5h}{2}\right)$ a ambos miembros

$$11,97\ h \cong t$$

→ Se resuelve el logaritmo
→ Se resuelven los productos

Respuesta: deben pasar aproximadamente 12horas.

b) C(t) : cantidad de droga activa en mg
t : tiempo en horas
A : cantidad de droga suministrada 60mg
k : cantidad que depende de la medicación en 1/h
Con los datos del problema tenemos : $\boldsymbol{C(t) = 60.e^{-0,4t}}$

La función f que da origen a C es: $\boldsymbol{f(t) = e^{t}}$

c) Transformaciones de f:
→ sufre un alargamiento vertical
→ sufre un alargamiento horizontal
→ sufre una reflexión respecto al eje y

4. Indicar si las siguientes expresiones son Verdaderas o Falsas. Justificar las falsas.
(24%- 4% cada una - sin justificar 0%)

<table>
<tr><th></th><th>Proposición</th><th>V</th><th>F</th></tr>
<tr><td>a</td><td>Si trasladamos a $f(x) = 2^{x}$ dos unidades hacia la izquierda obtenemos $g(x) = 2^{(x-2)}$</td><td></td><td>x</td></tr>
<tr><td colspan="4">Justificación:
Si trasladamos a $f(x) = 2^{x}$ dos unidades hacia la izquierda obtenemos $h(x) = 2^{(x+2)}$;
$g(x) = 2^{(x-2)}$ se traslada dos unidades hacia la derecha.</td></tr>
<tr><td>b</td><td>La función $tg\ \beta$ es negativa en el intervalo $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.</td><td>x</td><td></td></tr>
<tr><td>c</td><td>El coseno de un ángulo β es igual que el seno de su suplemento, es decir:
$\cos\beta = \mathrm{sen}(\pi - \beta)$</td><td></td><td>x</td></tr>
<tr><td colspan="4">Justificación:
$sen(\pi - \beta) = sen\,\pi\,cos\,\beta - cos\,\pi\,sen\,\beta =$ Por identidades de sustracción de ángulos
$sen(\pi - \beta) = 0.cos\,\beta - (-1)\,sen\,\beta =$ Se resuelve sen π y cos π
$\boldsymbol{sen(\pi - \beta) = sen\,\beta}$ Se resuelven productos y adiciones

La identidad correcta es $\boldsymbol{sen(\pi - \beta) = sen\,\beta}$, es decir que el seno de un ángulo coincide con el seno de su suplemento.</td></tr>
<tr><td>d</td><td>$g(x) = 3^{(x-1)}$ es el resultado de trasladar $f(x) = 3^{x}$ una unidad hacia abajo.</td><td></td><td>x</td></tr>
</table>

Justificación:
$g(x) = 3^{(x-1)}$ *es el resultado de trasladar* $f(x) = 3^x$ *una unidad hacia la derecha.*

e	Si $m = \left(\frac{3}{5}\right)^{\log 4} . \left(\frac{5}{4}\right)^{\log 3} . \left(\frac{4}{3}\right)^{log5}$, entonces el valor de $\log m$ es -1.		**x**

Justificación:
Aplicando a ambos miembros logaritmo se tiene:

$\log m = \log\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{\log 4} . \left(\frac{5}{4}\right)^{\log 3} . \left(\frac{4}{3}\right)^{log5}\right] =$

$\log m = \log\left(\frac{3}{5}\right)^{\log 4} + \log\left(\frac{5}{4}\right)^{\log 3} + \log\left(\frac{4}{3}\right)^{log5} = \log 4 . \log\left(\frac{3}{5}\right) + \log 3 \log\frac{5}{4} + \log 5 \log\frac{4}{3}$ Se aplica propiedad de potencias en un logaritmo y del logaritmo de un cociente.

$\log m = \log 4 . (\log 3 - \log 5) + \log 3 . (\log 5 - \log 4) + \log 5 . (\log 4 - \log 3)$

$\log m = \log 4 . \log 3 - \log 4 . \log 5 + \log 3 . \log 5 - \log 3 . \log 4 + \log 5 . \log 4 - \log 5 . \log 3$

$\log m = 0$

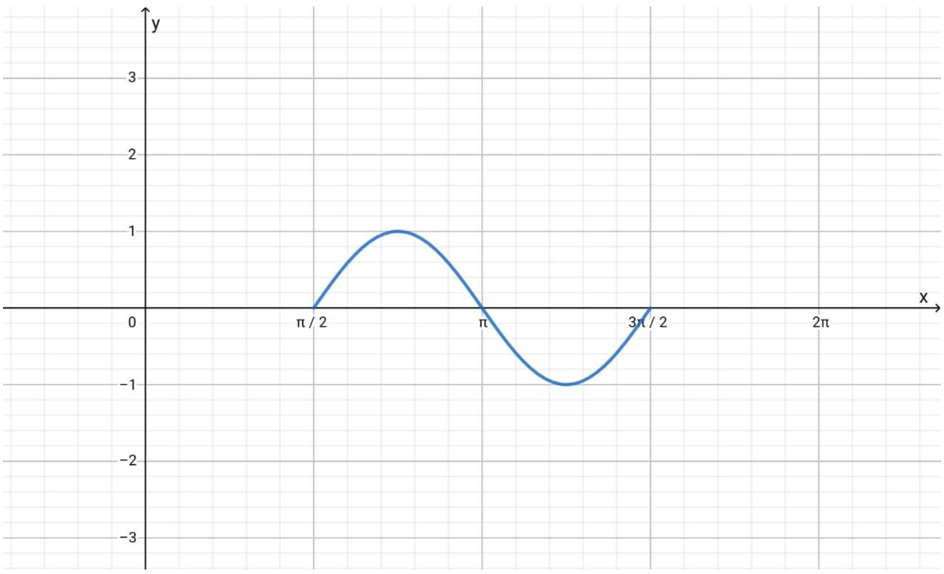
Es falsa ya que $\log m = 0.$

f	La función $g(x) = e^x$ y $h(x) = -e^x$ son simétricas respecto al eje y		**x**

Justificación:
La función $g(x) = e^x$ y $h(x) = -e^x$ son simétricas respecto al eje x

5. Graficar un período completo de la siguiente función en el intervalo apropiado e indique su amplitud, periodo y corrimiento de fase.**(10%)**

$$f(x) = sen\left[2(x + \frac{\pi}{2})\right]$$



Amplitud: 1
Período: $\frac{2.\pi}{2} = \pi$
Corrimiento de fase: $\frac{\pi}{2}$
Intervalo Apropiado: $\left[\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$