RESOLUCIÓN PRIMER PARCIAL

ASIGNATURA	Elementos de Cálculo I	AÑO	2018	TEMA	1	Nº HOJAS	
APELLIDO Y NOMBRE		LEGAJO/DNI					

Instrucciones: coloque nombre y apellido **en cada hoja** que va a entregar. Lea atentamente cada consigna. Desarrolle detalladamente y con letra clara los ejercicios para obtener el puntaje completo. Debe usar **tinta para desarrollar los ejercicios**. No se permite corrector, tache si es necesario. Cuando finalice, indique el número de hojas empleadas en el encabezado. Debe obtener un **mínimo de 60 puntos para aprobar** el examen. Dispone de **2,5 horas** para su resolución. ÉXITO!

1. Indique Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. **Justifique las respuestas falsas mediante contraejemplo o respuesta correcta**. Se considera el puntaje sólo si la respuesta está debidamente justificada. **(2p c/u, Total 14p)**

Enunciado	V	F
a. Dada $f(x)=\frac{(x-1)^2+3}{2}$ con dominio restringido $[1,\infty)$, su inversa es $f^{-1}(x)=\sqrt{3x-2}+1$.		X
b. Para la función del inciso a, $D_{f^{-1}}=\left[\frac{2}{3},\infty\right)$.		X
c. Dada $f(x)=27x^3+9x^2-5$, la función g resultante luego de hacer un alargamiento horizontal en un factor de 3 y una reflexión respecto al eje y es $g(x)=-x^3+x^2-5$.	X	
d. Dadas $f(x)=\sqrt{x-1}$ y $g(x)=\sqrt{2-x}$, el dominio de g/f es $[1,2)$.		X
e. Si $\lim_{x\to 2} f(x)=-1$, entonces se puede asegurar que $f(2)=-1$.		X
f. El teorema de Bolzano asegura que dada una función f en $[1,4]$, si se cumple que $f(1)$ y $f(4)$ son de distinto signo entonces existe una raíz en $(1,4)$.		X
g. La función $f(x)=x^{2/3}/(x^4+1)$ es continua en la recta real.	X	

Respuestas (Sólo se considera puntaje si se justifican las respuestas falsas adecuadamente)

a. **FALSO.** Justificación: se calcula la inversa dado que el dominio está restringido para $[1,\infty)$ (se puede aceptar el gráfico o la verificación mediante ecuación de que es función uno a uno).

$$f(x)=\frac{(x-1)^2+3}{2}$$

$$x=\frac{(y-1)^2+3}{2}\Rightarrow 2x-3=(y-1)^2\Rightarrow \sqrt{2x-3}=y-1\Rightarrow \boldsymbol{f^{-1}(x)=\sqrt{2x-3}+1}$$

b. **FALSO**. Para obtener el dominio se plantea: $2x-3\geq 0\Rightarrow x\geq\frac{3}{2}\Rightarrow \boldsymbol{Df^{-1}}=\left[\frac{3}{2},\infty\right)$

c. **VERDADERO**.

$f(x)=27x^3+9x^2-5$ alargamiento horizontal en un factor de 3 y una reflexión respecto al eje y

$$f\left(-\frac{1}{3}x\right)=27\left(-\frac{x}{3}\right)^3+9\left(-\frac{x}{3}\right)^2-5=-x^3+x^2-5$$

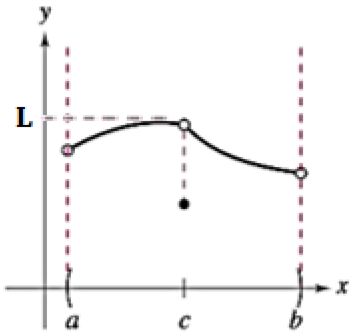
d. **FALSO**.

$D_f=[1,\infty)$, $D_g=(-\infty,2]$, $D_f\cap D_g=[1,2]$, $D_{g/f}=(1,2]$

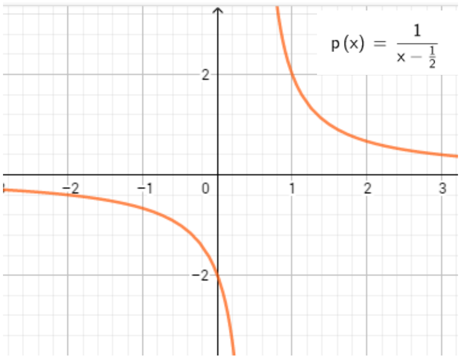
e. **FALSO**. El hecho de que el límite esté definido para una x determinada no dice nada acerca del límite para x tendiendo a ese valor. Contraejemplo:

ASIGNATURA	Elementos de Cálculo I	AÑO	2018	TEMA	1	Nº HOJAS	
APELLIDO Y NOMBRE		LEGAJO/DNI					

En el siguiente gráfico $\lim_{x\to c} f(x) = L$ y $f(c)$ existe pero no son iguales.



f. **FALSO.** Para asegurarlo, por Teorema de Bolzano, falta la hipótesis de que la función f sea continua. También se puede justificar con un contraejemplo: $f(0) = -2$ y $f(1) = 2$ y sin embargo no hay al menos un cero.



g. **VERDADERO**. $f(x)$ es cociente de dos funciones continuas.

2. Dada $f(x) = \frac{5-2x}{x-1}$ determine: **(Total 25p)**

a. Dominio implícito e Imagen. **(2p)**
$D = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ ó $D = \mathbb{R} - \{1\}$
$I_m = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$

b. Ecuación de la función inversa (si existe). **(5p)**

$$y = \frac{5-2x}{x-1} \Rightarrow x = \frac{5-2y}{y-1} \Rightarrow xy - x = 5 - 2y \Rightarrow y(x+2) = 5 + x \Rightarrow \boldsymbol{f^{-1}(x)} = \frac{\boldsymbol{5+x}}{\boldsymbol{x+2}}$$

c. Comprobar el resultado anterior componiendo ambas funciones. **(3p)**
Se pueden aceptar cualquiera de las dos opciones:

$$(fof^{-1})(x) = \frac{5 - 2\left(\frac{\boldsymbol{5+x}}{\boldsymbol{x+2}}\right)}{\left(\frac{\boldsymbol{5+x}}{\boldsymbol{x+2}}\right) - 1} = \frac{\frac{5(x+2) - 2(5+x)}{x+2}}{\frac{5 + x - (x+2)}{x+2}} = \frac{5x + 10 - 10 - 2x}{5 + x - x - 2} = \frac{3x}{3} = x$$

$$(f^{-1}of)(x) = \frac{5 + \left(\frac{\boldsymbol{5-2x}}{\boldsymbol{x-1}}\right)}{\left(\frac{\boldsymbol{5-2x}}{\boldsymbol{x-1}}\right) + 2} = \frac{\frac{5(x-1) + 5 - 2x}{x-1}}{\frac{5 - 2x + 2(x-1)}{x-1}} = \frac{5x - 5 + 5 - 2x}{5 - 2x + 2x - 2} = \frac{3x}{3} = x$$

d. Intersecciones con los ejes. **(2p)**

Intersección eje x: $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{5-2x}{x-1} \Rightarrow \boldsymbol{x = 5/2}$

Intersección eje y: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{5-2*0}{0-1} \Rightarrow \boldsymbol{y = -5}$

e. Paridad. **(4p)**

Se verifica si es par: $f(x) = f(-x)$

$$f(x) = \frac{5-2x}{x-1}$$

$f(-x) = \frac{5-2(-x)}{(-x)-1} = \frac{5+2x}{-x-1} \Rightarrow f(x) \neq f(-x)$ No es par.

Se verifica si es impar: $f(x) = -f(-x)$

$$f(x) = \frac{5-2x}{x-1}$$

$-f(-x) = -\frac{5-2(-x)}{(-x)-1} = -\frac{5+2x}{-x-1} = \frac{-5-2x}{-x-1} = \frac{5+2x}{x+1} \Rightarrow f(x) \neq -f(-x)$ No es impar.

f. Ecuaciones de sus asíntotas *(aplique lo aprendido en Límite)*. **(6p)**

Asíntota Vertical

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{5-2x}{x-1} = +\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{5-2x}{x-1} = -\infty$$

Debe estar el análisis para $x \to 1$ tanto por izquierda como por derecha para considerar el puntaje total.

Asíntota Horizontal

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5-2x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5-2x}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5}{x}-2}{1-\frac{1}{x}} = -2$$

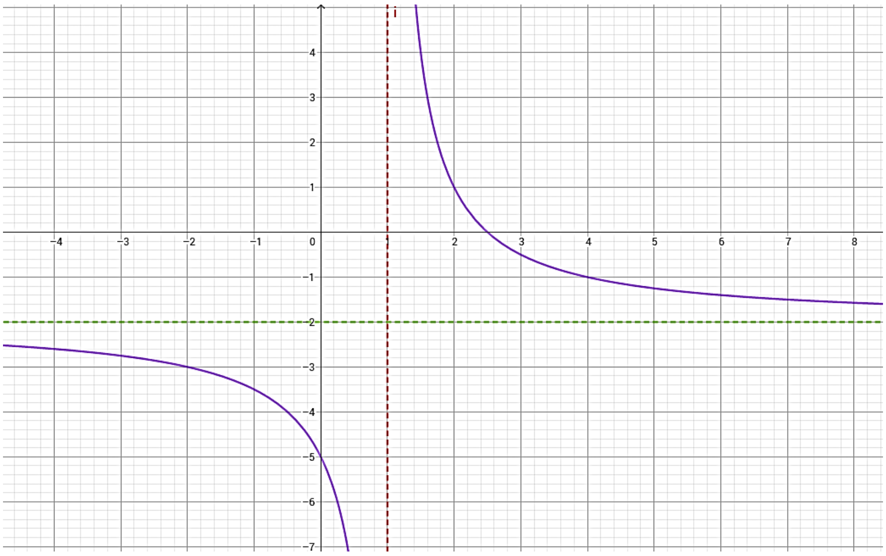
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5-2x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5-2x}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5}{x}-2}{1-\frac{1}{x}} = -2$$

Debe estar el análisis para $x \to \pm\infty$ para considerar el puntaje total.

Asíntota Oblicua: no posee dado que el grado del polinomio del numerador no difiere en una unidad del grado del polinomio del numerador. También puede obtener aplicando la misma regla que para el cálculo de A.H. de modo que va a resultar que el límite tienda a infinito

No se aceptan respuestas como: no tiene A.O. porque tiene A.H.

g. Graficar la función, empleando la información encontrada previamente. **(3p)**



3. Sabiendo que: **(7.5p c/u, Total 15p)**

$$|4x-8| \leq f(x) \leq x^2-4x+8 \qquad \text{para } -2 \leq x \leq 2$$

Indique si es posible o no calcular el límite en a) y en b). Justifique cada caso indicando cuál es el Teorema aplicado y utilice el mismo para llegar al valor numérico del límite.

a. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ b. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

a) **SI**

Justificación: Se cumplen las condiciones del teorema, ya que existe un intervalo abierto $(-2{,}2)$ que contiene a $x=0$ donde $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ con $g(x)=|4x-8|$ y $h(x)=x^2-4x+8$, y $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0} h(x)=8$. Por lo tanto aplicando el Teorema del Emparedado $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=8$.

b) **NO**

Justificación: Si bien existe un intervalo abierto $(-2{,}2)$ que contiene a $x=1$ donde $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ con $g(x)=|4x-8|$ y $h(x)=x^2-4x+8$, cuando calculamos los límites obtenemos resultados distintos: $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=4$ y $\lim\limits_{x\to 1} h(x)=5$. Por lo tanto, como no se cumple una de las condiciones del Teorema del Emparedado, no podemos aplicarlo para obtener el valor del $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

4. Determine en los siguientes casos si existe o no el límite sin aplicar L'Hopital. (Indique en cada caso las propiedades y/o teoremas empleados) **(15p c/u, Total 30p)**

a. $$\boldsymbol{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{x^2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{sen\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{sen\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} * \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{sen(u)}{(u)} * \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = 1 * \frac{1}{1*\pi} = \boldsymbol{\frac{1}{\pi}}$$

1º Factorizar denominador y exprese la $tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ como $\frac{sen\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$

2º Aplicar propiedad de límite de un producto, distribuyendo factores en forma conveniente.

3º Aplicar Límite notable. Para ello debe hacer cambio de variable: $u = x - \pi/2$, y como $x \to \pi/2$ entonces $u \to 0$

4º Evaluar

b. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{3x}\,(x-2)}{|x-2|}$

Dado que hay un valor absoluto se debe evaluar límite por izquierda y por derecha de 2 para determinar si los límites laterales son iguales. Recordar la definición de valor absoluto:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & si\ x \geq 2 \\ -(x-2) & si\ x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{3x}\,(x-2)}{(x-2)} = \sqrt{6}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{3x}\,(x-2)}{-(x-2)} = -\sqrt{6}$$

Por lo tanto, como los límites laterales son distintos, $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{3x}\,(x-2)}{|x-2|}$ no existe.

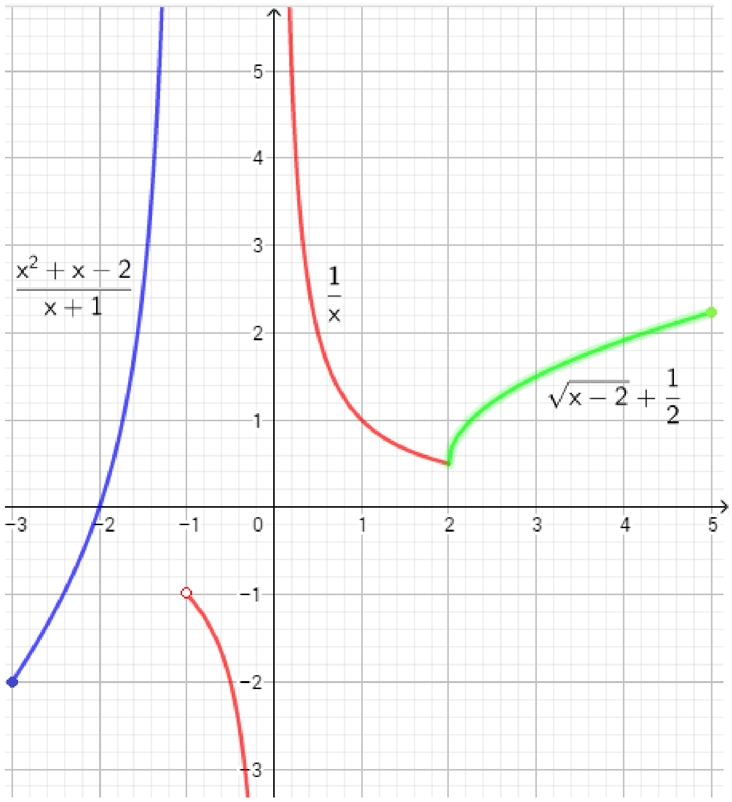
5. Dada la función por partes f en el intervalo $[-3,5\,]$: **(Total 16p)**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x+1} & si\ x \leq -1 \\ \dfrac{1}{x} & si - 1 < x < 2 \\ \sqrt{x-2}+\dfrac{1}{2} & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

Confeccione el gráfico y: **(3p)**

a. Determine para qué valores de x la función es discontinua (evalúe para cada x las 3 condiciones de continuidad). **(8p)**

b. Clasifique las discontinuidades halladas en inevitable o evitable según corresponda. En este último caso, indique cómo se puede redefinir $f(x)$ para eliminar la discontinuidad. **(4p)**



<u>En $x = -1$:</u>

1. $f(-1)$ no está definida
2.

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{x} = -1$$
$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+x-2}{x+1} = +\infty$$

$$\Rightarrow \textit{No existe} \lim_{x\to -1} f(x)$$

3. Dado que el límite no existe, no es posible analizar esta condición.

***Discontinuidad inevitable*, dado que no existe el límite para $x \to -1$.**

<u>En $x = 0$:</u>

1. $f(0)$ no está definida
2.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \infty$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$$

$$\Rightarrow \textit{No existe} \lim_{x\to 0} f(x)$$

3. Dado que el límite no existe, no es posible analizar esta condición.

***Discontinuidad inevitable*, dado que no existe el límite para $x \to 0$.**

En $x = 2$:

1. $f(2) = \frac{1}{2}$

2.

$$\lim_{x \to 2^+} \sqrt{x-2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \exists \boldsymbol{\lim_{x \to 2} f(x) = 1/2}$$

3. Como: $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 1/2$

La función es continua.

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO	RESOLUCIÓN PRIMER PARCIAL					FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES Naturaleza - Ciencia - Humanismo	
ASIGNATURA	Elementos de Cálculo I	**AÑO**	2018	**TEMA**	**2**	**Nº HOJAS**	
APELLIDO Y NOMBRE				**LEGAJO/DNI**			

Instrucciones: coloque nombre y apellido **en cada hoja** que va a entregar. Lea atentamente cada consigna. Desarrolle detalladamente y con letra clara los ejercicios para obtener el puntaje completo. Debe usar **tinta para desarrollar los ejercicios**. No se permite corrector, tache si es necesario. Cuando finalice, indique el número de hojas empleadas en el encabezado. Debe obtener un **mínimo de 60 puntos para aprobar** el examen. Dispone de **2,5 horas** para su resolución. ÉXITO!

1. Indique Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. **Justifique las respuestas falsas mediante contraejemplo o respuesta correcta**. Se considera el puntaje sólo si la respuesta está debidamente justificada. **(2p c/u, Total 14p)**

Enunciado	V	F
a. Dada $f(x)=\frac{(x+1)^2-3}{2}$ con dominio restringido $[-1,\infty)$, su inversa es $f^{-1}(x)=\sqrt{2x+3}-1$.	X	
b. Para la función del inciso a, $D_{f^{-1}}=\left[-\frac{2}{3},\infty\right)$.		X
c. Dada $f(x)=27x^3+9x^2-5$, la función g resultante luego de hacer una compresión horizontal en un factor de 3 y una reflexión respecto al eje x es $g(x)=x^3-x^2-5$.		X
d. Dadas $f(x)=\sqrt{x-2}$ y $g(x)=\sqrt{3-x}$, el dominio de f/g es $(2,3]$.		X
e. Si $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe y $f(2)$ está definida entonces es posible afirmar que la función f es continua en $x=2$.		
f. La función $f(x)=2^x/(x^2+1)$ es continua en la recta real.	X	
g. Se sabe que f es continua y que $f(-1)>0$ y $f(1)<0$ entonces se puede afirmar que existe al menos una raíz en el intervalo $[-1,1]$.	X	

Respuestas (Sólo se considera puntaje si se justifican las respuestas falsas adecuadamente)

a. **VERDADERO.** Justificación: se calcula la inversa dado que el dominio está restringido para $[-1,\infty)$ (se puede aceptar el gráfico o la verificación mediante ecuación de que es función uno a uno).

$$f(x)=\frac{(x+1)^2-3}{2}$$

$$x=\frac{(y+1)^2-3}{2}\Rightarrow 2x+3=(y+1)^2\Rightarrow\sqrt{2x+3}=y+1\Rightarrow \boldsymbol{f^{-1}(x)=\sqrt{2x+3}-1}$$

b. **FALSO**. Para obtener el dominio se plantea: $2x+3\geq 0\Rightarrow x\geq -\frac{3}{2}\Rightarrow \boldsymbol{Df^{-1}}=\left[-\frac{3}{2},\infty\right)$

c. **FALSO**.

$f(x)=27x^3+9x^2-5$ compresión horizontal en un factor de 3 y una reflexión respecto al eje x:

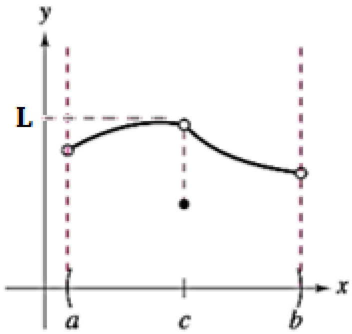
$$-f(3x)=-[27(3x)^3+9(3x)^2-5]=-729x^3-81x^2+5$$

d. **FALSO**.

$D_f=[2,\infty)$, $D_g=(-\infty,3]$, $D_f\cap D_g=[2,3]$, $D_{f/g}=[2,3)$

e. **FALSO**. Falta la condición de que $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$ para afirmar que sea continua en $x=2$. También se puede aceptar contraejemplo:

En el siguiente gráfico $\lim_{x \to c} f(x) = L$ y $f(c)$ existe pero no son iguales.



f. **VERDADERO**. $f(x)$ es cociente de dos funciones continuas.
g. **VERDADERO**. Se cumplen todas las hipótesis del Teorema de Bolzano: la función f es continua en $[a, b]$ y $f(a)$ distinto signo que $f(b)$, por lo que puede afirmarse que existe al menos una raíz.

1. Dada $f(x) = \frac{3x-4}{2-x}$ determine: **(Total 25p)**

a. Dominio implícito e Imagen. **(2p)**
$D = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ ó $D = \mathbb{R} - \{2\}$
$I_m = (-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$

b. Ecuación de la función inversa (si existe). **(5p)**

$$y = \frac{3x-4}{2-x} \Rightarrow x = \frac{3y-4}{2-y} \Rightarrow -xy + 2x = 3y - 4 \Rightarrow y(x+3) = 4 + 2x \Rightarrow \boldsymbol{f^{-1}(x)} = \boldsymbol{\frac{4+2x}{x+3}}$$

c. Comprobar el resultado anterior componiendo ambas funciones. **(3p)**
Se pueden aceptar cualquiera de las dos opciones:

$$(fof^{-1})(x) = \frac{3\left(\boldsymbol{\frac{4+2x}{x+3}}\right) - \boldsymbol{4}}{2 - \left(\boldsymbol{\frac{4+2x}{x+3}}\right)} = \frac{\frac{3(4+2x) - 4(3+x)}{x+3}}{\frac{2(x+3) - (4+2x)}{x+3}} = \frac{12 + 6x - 12 - 4x}{2x + 6 - 4 - 2x} = \frac{2x}{2} = x$$

$$(f^{-1}of)(x) = \frac{4 + 2\left(\frac{3x-4}{2-x}\right)}{\left(\frac{3x-4}{2-x}\right) + 3} = \frac{\frac{4(2-x) + 2(3x-4)}{2-x}}{\frac{3x - 4 + 3(2-x)}{2-x}} = \frac{8 - 4x + 6x - 8}{3x - 4 + 6 - 3x} = \frac{2x}{2} = x$$

d. Intersecciones con los ejes. **(2p)**

<u>Intersección eje x</u>: $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{3x-4}{2-x} \Rightarrow \boldsymbol{x = 4/3}$

<u>Intersección eje y</u>: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{3*0-4}{2-0} \Rightarrow \boldsymbol{y = -2}$

e. Paridad. **(4p)**
Se verifica si es par: $f(x) = f(-x)$
$f(x) = \frac{3x-4}{2-x}$
$f(-x) = \frac{3(-x)-4}{2-(-x)} = \frac{-3x-4}{2+x} \Rightarrow f(x) \neq f(-x)$ No es par.

Se verifica si es impar: $f(x) = -f(-x)$

$f(x) = \dfrac{3x-4}{2-x}$

$-f(-x) = -\frac{3(-x)-4}{2-(-x)} = -\frac{-3x-4}{2+x} = \frac{3x+4}{2+x} \Rightarrow f(x) \neq -f(-x)$ No es impar.

f. Ecuaciones de sus asíntotas *(aplique lo aprendido en Límite)*. **(6p)**

Asíntota Vertical

$\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{3x-4}{2-x} = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{3x-4}{2-x} = +\infty$

Debe estar el análisis para $x \to 1$ tanto por izquierda como por derecha para considerar el puntaje total.

Asíntota Horizontal

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-4}{2-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x-4}{x}}{\frac{2-x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-\frac{4}{x}}{\frac{2}{x}-1} = -3$$

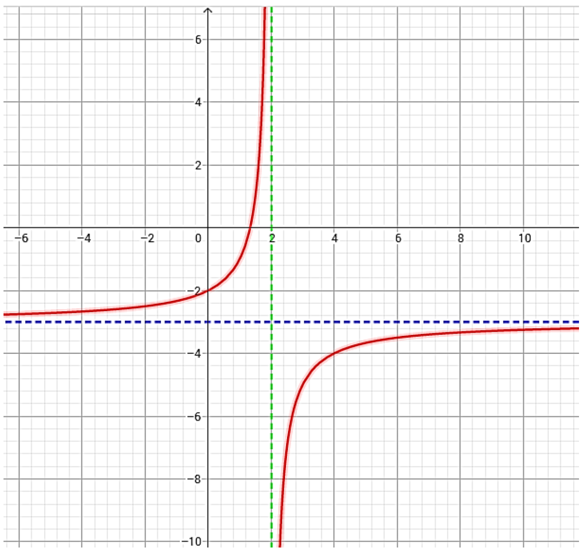
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-4}{2-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x-4}{x}}{\frac{2-x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-\frac{4}{x}}{\frac{2}{x}-1} = -3$$

Debe estar el análisis para $x \to \pm\infty$ para considerar el puntaje total.

Asíntota Oblicua: no posee dado que el grado del polinomio del numerador no difiere en una unidad del grado del polinomio del numerador. También puede obtener aplicando la misma regla que para el cálculo de A.H. de modo que va a resultar que el límite tienda a infinito

No se aceptan respuestas como: no tiene A.O. porque tiene A.H.

g. Graficar la función, empleando la información encontrada previamente. **(3p)**



2. Sabiendo que: **(7.5p c/u, Total 15p)**

$$|2x-4| \leq f(x) \leq \frac{x^2}{2} - 2x + 4 \qquad \text{para } -2 \leq x \leq 2$$

Indique si es posible o no calcular el límite en a) y en b). <u>Justifique</u> cada caso indicando cuál es el Teorema aplicado y utilice el mismo para llegar al valor numérico del límite.

a. $\lim_{x\to 0} f(x)$ b. $\lim_{x\to 2} f(x)$

a) **SI**

Justificación: Se cumplen las condiciones del teorema, ya que existe un intervalo abierto $(-2,2)$ que contiene a $x = 0$ donde $g(x) \le f(x) \le h(x)$ con $g(x) = |2x-4|$ y $h(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 4$, y $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = 4$. Por lo tanto aplicando el Teorema del Emparedado $\lim_{x\to 0} f(x) = 4$.

b) **NO**

Justificación: el intervalo abierto $(-2,2)$ no contiene a $x = 2$, tampoco se cumple que $\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} h(x)$ dado que $\lim_{x\to 2}|2x-4| = 0$ y $\lim_{x\to 2}\frac{x^2}{2} - 2x + 4 = 2$. Por lo tanto, como no se cumple ninguna de las condiciones del Teorema del Emparedado, no podemos aplicarlo para obtener el valor del $\lim_{x\to 2} f(x)$.

3. Determine en los siguientes casos si existe o no el límite sin aplicar L'Hopital. (Indique en cada caso las propiedades y/o teoremas empleados) **(15p c/u, Total 30p)**

a. $$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-3x^3}{\sqrt{x^6+3}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1-3x^3}{|x|^2}}{\frac{\sqrt{x^6+3}}{|x|^3}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1-3x^3}{(-x)^3}}{\frac{\sqrt{x^6+3}}{(-x)^3}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{x^3}+3}{\sqrt{1+\frac{3}{x^6}}} = 3$$

¿Por qué se divide por $|x|$? Esto es porque se tiene una raíz, y debe recordarse que al calcular $\sqrt{(x)^2} = |x|$. **¿Por qué se divide luego por $-x$?** Esto es porque se sabe lo siguiente acerca de la función valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \ge 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Como el límite debe calcularse para $x \to -\infty$ entonces se debe tomar que $|x| = -x$.

Luego se realizan operaciones algebraicas y evaluación del límite.

También puede aceptarse el siguiente procedimiento:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-3x^3}{\sqrt{x^6+3}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1-3x^3}{\sqrt{x^6+3}} * \frac{\sqrt{x^6+3}}{\sqrt{x^6+3}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{(1-3x^3)\sqrt{x^6+3}}{x^6+3} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{(1-3x^3)\sqrt{x^6+3}}{|x|^6}}{\frac{x^6+3}{|x|^6}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{(1-3x^3)}{|x|^3} * \frac{\sqrt{x^6+3}}{|x|^3}}{\frac{x^6+3}{|x|^6}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{(1-3x^3)}{(-x)^3} * \frac{\sqrt{x^6+3}}{(-x)^3}}{\frac{x^6+3}{(-x)^6}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(-\frac{1}{x^3}+3\right) * \sqrt{1+\frac{3}{x^6}}}{1+\frac{3}{x^6}} = 3$$

b. $\lim_{x\to 1} \frac{(x+3)\,|x-1|}{x-1}$

Dado que hay un valor absoluto se debe evaluar límite por izquierda y por derecha de 1 para determinar si los límites laterales son iguales. Recordar la definición de valor absoluto:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & si\ x \geq 1 \\ -(x-1) & si\ x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{3x}\,(x-1)}{(x-1)} = \sqrt{3}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{3x}\,(x-1)}{-(x-1)} = -\sqrt{3}$$

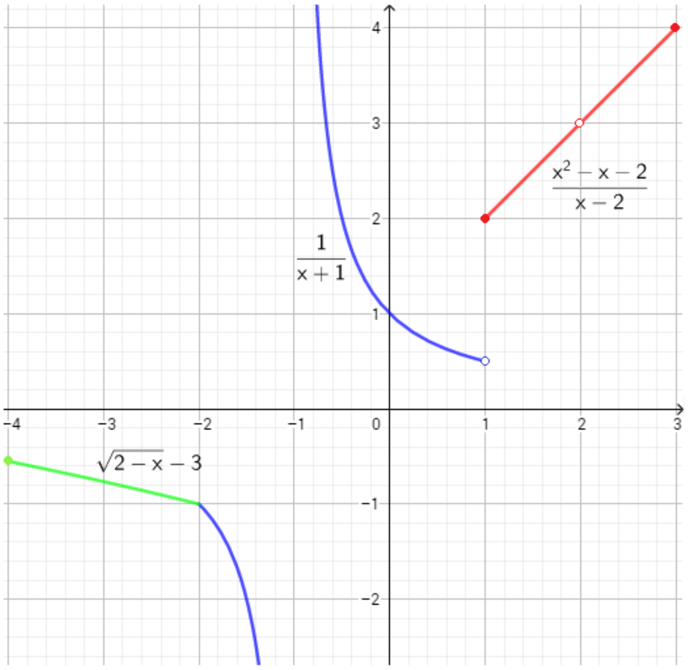
Por lo tanto, , como los límites laterales son distintos, $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{3x}\,(x-2)}{|x-2|}$ no existe.

4. Dada la función por partes f en el intervalo $[-4{,}3\ ]$: **(Total 16p)**

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x}-3 & si\ x \leq -2 \\ \dfrac{1}{x+1} & si -2 < x < 1 \\ \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

Confeccione el gráfico y: **(3p)**

a. Determine para qué valor(es) de x la función es discontinua (evalúe para cada x las 3 condiciones de continuidad). *<u>Aclaración</u>: no es necesario analizar continuidad en los extremos del intervalo*. **(8p)**
b. Clasifique las discontinuidades halladas en inevitable o evitable según corresponda. En este último caso, indique cómo se puede redefinir $f(x)$ para eliminar la discontinuidad. **(4p)**



En $x = -2$:

1. $f(-2) = -1$

2. $\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{1}{x+1} = -1$
   $\lim\limits_{x \to -2^-} \sqrt{2-x} - 3 = -1$ $\quad\Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to 2} f(x) = -1$

3. $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2) = -1 \quad \Rightarrow$ ***La función es continua en $x = -2$.***

En $x = -1$:

1. **$f(-1)$ no está definida**
2.

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty$$
$$\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{No\ existe\ \lim_{x \to -1} f(x)}$$

3. Dado que el límite no existe ni está definida la función, no es posible analizar esta condición.

***Discontinuidad inevitable*, dado que no existe el límite para $x \to -1$.**

En $x = 1$:

1. $f(1) = 2$
2.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = 2 \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \qquad \boldsymbol{\Rightarrow \textit{No existe} \lim_{x\to 1} f(x)}$$

3. Dado que el límite no existe, no es posible analizar esta condición.

***Discontinuidad inevitable*, dado que no existe el límite para $x \to 1$.**

En $x = 2$:

1. $f(2)$ no está definida
2.

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} (x+1) = 3$$
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} (x+1) = 3$$
$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to 2} f(x)$$

3. Dado que $f(2)$ no está definida no es posible analizar esta condición.

***Discontinuidad evitable*, (dado que existe el límite para $x \to 2$). Se puede redefinir la función como:**

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x} - 3 & si\ x \leq -2 \\ \dfrac{1}{x+1} & si\ -2 < x < 1 \\ \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & si\ x \geq 1 \\ \boldsymbol{f(2) = 3} & \end{cases}$$