UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO		PRIMER PARCIAL RESPUESTAS				FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES Naturaleza - Ciencia - Humanismo	
ASIGNATURA	Cálculo I	**AÑO**	2019	**TEMA**	**1**	**Nº HOJAS**	
APELLIDO Y NOMBRE				**LEGAJO/DNI**			

Instrucciones: coloque nombre y apellido **en cada hoja** que va a entregar. Lea atentamente cada consigna. Desarrolle detalladamente y con letra clara los ejercicios para obtener el puntaje completo. Debe usar **tinta para desarrollar los ejercicios**. No se permite corrector, tache si es necesario. Cuando finalice, indique el número de hojas empleadas en el encabezado (incluyendo las fotocopias). Debe obtener un **mínimo de 60 puntos para aprobar** el examen. Dispone de **2 horas** para su resolución. ¡ÉXITO!

1. Dadas las siguientes funciones determine si poseen inversa o no, justifique **(2p)**. Si la función tiene inversa hállela y verifique mediante la composición de la función con su inversa **(6p)** **(Total 8p)**

a. $f(x) = -\sqrt{x+5} + 3$ Sí tiene inversa por ser función uno a uno (1p)

El dominio e imagen de $f(x)$ está dado por: $f(x) = -\sqrt{x+5} + 3, -5 \leq x, y \leq 3$

Despejo x (1p) $y = -\sqrt{x+5} + 3, \Longrightarrow x = (3-y)^2 - 5\,, y \leq 3$

Intercambio x con y (1p) $y = (3-x)^2 - 5, \quad \boldsymbol{x \leq 3}$

Entonces la función inversa es $f^{-1}(x)$ con dominio restringido $\boldsymbol{f^{-1}(x) = (3-x)^2 - 5, \ x \leq 3}$ (2p)

Verificación $(f \circ f^{-1})(x) = -\sqrt{(3-x)^2 - 5 + 5} + 3 = -\sqrt{(3-x)^2} + 3 = -(3-x) + 3 = x$ (2p)

O bien

$$(f^{-1} \circ f)(x) = \left(3 - (-\sqrt{x+5} + 3)\right)^2 - 5 = \left(3 + \sqrt{x+5} - 3\right)^2 - 5 = \sqrt{(x+5)^2} - 5 = |x+5| - 5 =$$

Como $-5 \leq x \implies |x+5| = x+5 \implies (f^{-1} \circ f)(x) = x + 5 - 5 = x$

b. $g(x) = x^4 + 3x + 1$ No tiene inversa por no ser función uno a uno (1p)

2. Sean $f(x) = \frac{1}{x-1}$ y $g(x) = \sqrt{x-2}$, halle $(f \circ g)(x)$ e indique su dominio. **(4p)**

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-2}) = \frac{1}{\sqrt{x-2}-1}$ (2p)

El dominio de g(x) es [2,∞) y su imagen [0,∞).

El dominio de f(x) es R-{1}.

De esta forma, f se puede aplicar a todos los valores de g(x) excepto cuando g(x)=1, lo cual ocurre si x=3.

Por lo tanto el dominio de fog es **[2,3) U (3,∞)** (2p)

3. Dada $f(x) = 4e^{-x}$, obtenga la expresión de la función g resultante luego de hacer las siguientes transformaciones: una reflexión respecto al eje x, un alargamiento horizontal en un factor de 3, y un desplazamiento vertical de 2 unidades hacia arriba. **(4p)**

Función original $y = 4e^{-x}$

Reflexión respecto al eje x $y = -4e^{-x}$ (1p)

Alargamiento horiz. en un factor de 3 $y = -4e^{-x/3}$ (1p)

Desplazam. vertical de 2 u. arriba $y = -4e^{-x/3} + 2$ (1p)

La función transformada es $g(x) = -4e^{-x/3} + 2$ (1p)

4. Una función $f(x)$ cumple para todo valor de x la siguiente relación: $b - |x-a| \leq f(x) \leq b + |x-a|$ Encuentre $\lim_{x \to a} f(x)$ **(4p)**

$$b - |x-a| \leq f(x) \leq b + |x-a|$$

Por Teorema del Emparedado sabemos $\lim_{x \to a}(b - |x-a|) \leq \lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a}(b + |x-a|)$ (1p)

Resolvemos los límites por sustitución directa $\lim_{x \to a}(b - |x-a|) = b$

$\lim_{x \to a}(b + |x-a|) = b$ (1p)

Entonces $b \leq \lim_{x \to a} f(x) \leq b \implies \boldsymbol{\lim_{x \to a} f(x) = b}$ (2p)

5. Demuestre el siguiente límite por definición: $\lim_{x \to -1} x^2 + 3x = -2$. A continuación, interprete gráficamente considerando $\varepsilon = 0{,}5$ **(15p)**

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \, / 0 < |x+1| < \delta \Rightarrow |x^2 + 3x + 2| < \varepsilon$ (4p)

Se trabaja a continuación con la Tesis: $|x^2 + 3x + 2| < \varepsilon$

$|(x+1)(x+2)| < \varepsilon$ se aplica propiedad $|a * b| = |a| * |b|$

$|x+1||x+2| < \varepsilon$ **(1)** (1p)

Se tiene por Hipótesis que $|x+1| < \delta$.

Se trabaja la misma para acotar $x+2$:

$$|x+1| < \delta$$
$$-\delta < x+1 < \delta \quad \text{se suma 1 en todos los miembros}$$
$$-\delta + 1 < x + 1 + 1 < \delta + 1$$
$$-(\delta+1) < -\delta + 1 < x + 2 < \delta + 1$$
$$|x+2| < \delta + 1$$

En (1): $|x+1||x+2| < \delta(\delta+1) = \varepsilon$

$< \delta^2 + \delta = \varepsilon$ se completan cuadrados para despejar δ

$< \delta^2 + \delta + 1/4 - 1/4 = \varepsilon$

$< (\delta + 1/2)^2 = \varepsilon + 1/4 \Rightarrow \boldsymbol{\delta = \sqrt{\varepsilon + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}}$

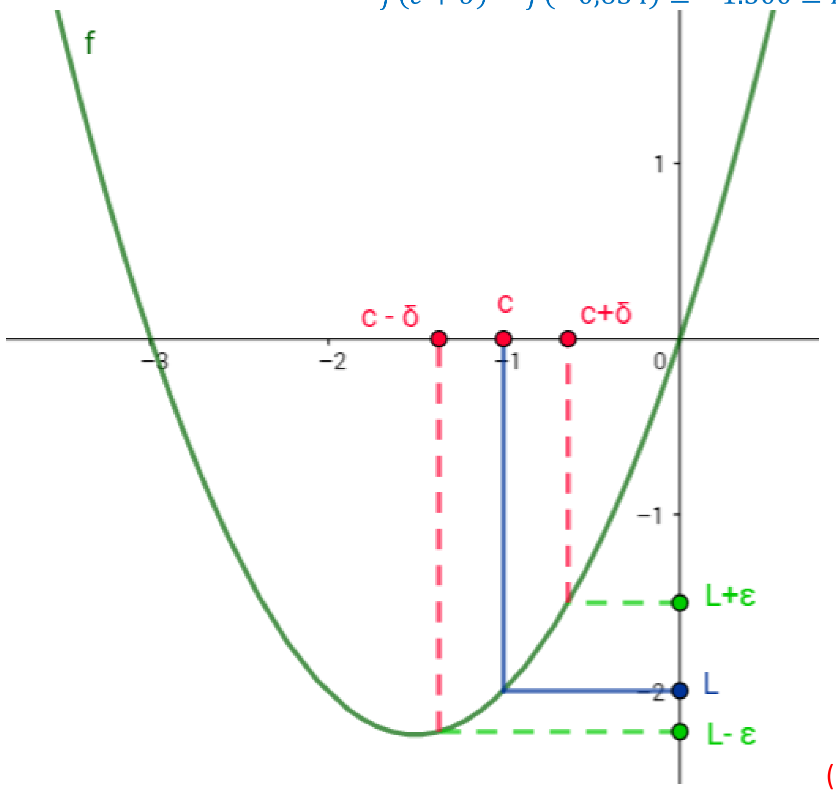
(Obtener expresión $\delta(\varepsilon)$, independientemente de la vía usada 5p)

Si $\varepsilon = 0{,}5$ tenemos $\delta \cong 0{,}366 \implies$ $c - \delta = -1 - 0{,}366 = -1{,}366$

$c + \delta = -1 + 0{,}366 = -0{,}634$

$f(c-\delta) = f(-1{,}366) \cong -2.232 \cong L - \varepsilon$

$f(c+\delta) = f(-0{,}634) \cong -1.500 \cong L + \varepsilon$



(5p)

ASIGNATURA	Cálculo I	AÑO	2019	TEMA	1	Nº HOJAS	
APELLIDO Y NOMBRE				LEGAJO/DNI			

6. Resuelva los siguientes límites sin aplicar L'Hôpital. **(15p c/u, Total 30p)**

a. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen(x/3)}{sen(2x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{sen(x/3)}{sen(2x)}\cdot\left(\frac{2x}{2x}\right)\cdot\left(\frac{x/3}{x/3}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{sen(x/3)}{x/3}\cdot\frac{2x}{sen(2x)}\cdot\frac{x}{6x} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{sen(x/3)}{x/3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{sen(2x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{6} = \mathbf{\frac{1}{6}}$$

Explorar sustitución directa e identificar indeterminación 0/0 (1p)
Multiplicar y dividir por factores adecuados, reacomodar la expresión (4p)
Aplicar propiedades de límite y límites notables (5p)
Evaluar el límite y resultado final (5p)

b. $\lim\limits_{x\to -\infty}|3x| - \sqrt{9x^2-6x} = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(|3x| - \sqrt{9x^2-6x}\right).\frac{|3x|+\sqrt{9x^2-6x}}{|3x|+\sqrt{9x^2-6x}} = \lim\limits_{x\to -\infty}\frac{(3x)^2-|9x^2-6x|}{|3x|+\sqrt{9x^2-6x}} =$

$= \lim\limits_{x\to -\infty}\frac{(3x^2)-(9x^2-6x)}{|3x|+\sqrt{9x^2-6x}}$ reemplazo $|9x^2-6x| = 9x^2-6x$ ya que $9x^2-6x > 0$

$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{6x}{|3x|+\sqrt{9x^2-6x}}\cdot\frac{|3x|}{|3x|} = \lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{6x}{|3x|}}{\frac{|3x|}{|3x|}+\frac{\sqrt{9x^2-6x}}{\sqrt{(3x)^2}}} = \lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{6x}{|3x|}}{1+\sqrt{1-2/3x}}$$

$= \lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\frac{6x}{-3x}}{1+\sqrt{1-2/3x}}$ reemplazo $|3x| = -3x$ ya que $3x < 0$

$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{-2}{1+\sqrt{1-2/3x}} = -\frac{2}{2} = \mathbf{-1}$$

Explorar sustitución directa e identificar indeterminación $\infty - \infty$ (1p)
Racionalizar y operar algebraicamente, reacomodar la expresión (4p)
Aplicar propiedades valor absoluto (5p)
Evaluar el límite y resultado final (5p)

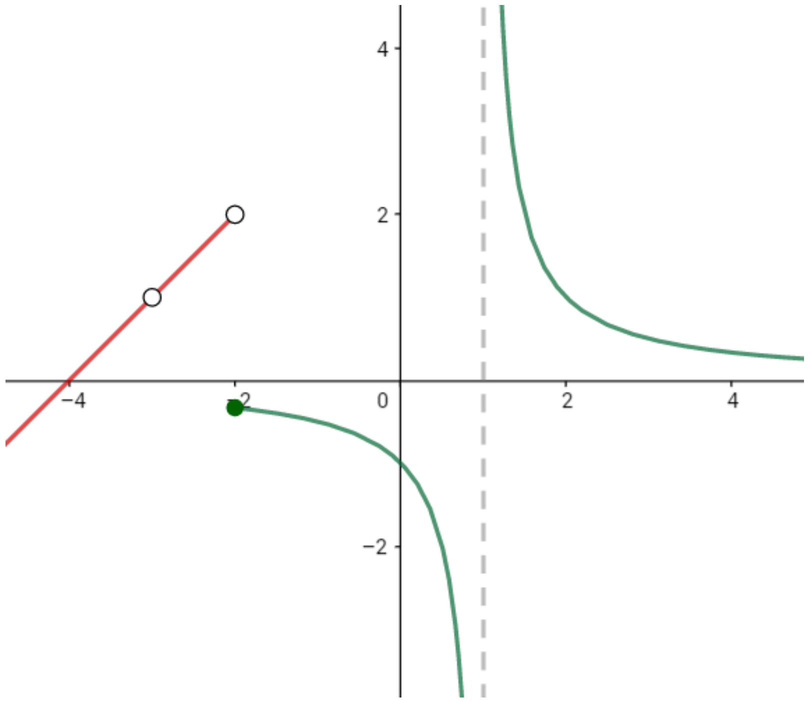
7. a. Complete a continuación las tres condiciones que deben satisfacerse para que una función $f(x)$ sea continua en un punto $x = c$. **(1p c/u, Total 3p)**

Condición 1	Condición 2	Condición 3
$f(c)$ está definida	Existe $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \lim\limits_{x\to c^+} f(x)$	$\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$

b. Dada $f(x)$, grafique y encuentre los valores de x en los cuales la función es discontinua. Complete la siguiente tabla **(12p)**

$f(x) = \begin{cases}\frac{x^2+7x+12}{x+3} & si\ x < -2\\ \frac{1}{x-1} & si\ x \geq -2\end{cases}$ **Gráfico (4.5p)** Valores de x **(0.5p c/u)**	¿Se cumple la condición 1? **(0.5p c/u)**	¿Se cumple la condición 2? **(0.5p c/u)**	¿Se cumple la condición 3? **(0.5p c/u)**	Tipo de discontinuidad **(0.5p c/u)**
$x = -3$	No. $\nexists\ f(-3)$	Sí. $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$	No	Evitable.

$x=-2$	Sí. $f(-2)=-1/3$	No. $\lim_{x\to-2^-} f(x) \neq \lim_{x\to-2^+} f(x)$	No	Inevitable. Salto finito
$x=1$	No. $\nexists\, f(1)$	No. $\lim_{x\to1^-} f(x) \neq \lim_{x\to1^+} f(x)$	No	Inevitable. Asíntota vertical. Salto infinito



Curvas (1,5p)
Asíntota Vertical (1p)
Discontinuidad x=1 (1p)
Discontinuidad x=2 (1p)

8. Dada $f(x)=-\frac{x^3}{x^2-1}=-\frac{x^3}{(x-1)(x+1)}$ determine: **(Total 20p)**

a. Dominio implícito **(2p)** $D[f]=\mathbb{R}-\{-1;1\}$
o bien $D[f]=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$ (2p)

b. Paridad **(2p)**

$$f(-x)=-\frac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=-\frac{x^3}{x^2-1}=-f(x)\ \text{(1p)} \Longrightarrow \text{Función impar (1p)}$$

c. Intersecciones con los ejes. **(2p)**
Intersección con el eje y: x=0 $\Longrightarrow f(0)=0$ (0.5p)
Intersección con el eje x: y=0 $\Longrightarrow x=0$ (0.5p)
La gráfica interseca ambos ejes en el origen (0,0) (1p)

d. Si tiene asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas). Justifique calculando todos los límites que sean necesarios y determinando la ecuación de las asíntotas. **(7p)**
Análisis de Asíntotas Verticales:
$x=-1$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-} -\frac{x^3}{(x-1)(x+1)}=+\infty \quad (0{,}5p)$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+} -\frac{x^3}{(x-1)(x+1)}=-\infty \quad (0{,}5p)$$

Por lo tanto la función posee una **ASÍNTOTA VERTICAL** de ecuación $\boldsymbol{x=-1}$. (1p ecuación)

$x=1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} -\frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = +\infty$ (0,5p)

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} -\frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = -\infty$ (0,5p)

Por lo tanto la función posee una **ASÍNTOTA VERTICAL** de ecuación $\boldsymbol{x=1}$. (1p ecuación)

<u>Análisis de Asíntotas Horizontales:</u>

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} = \pm\infty$

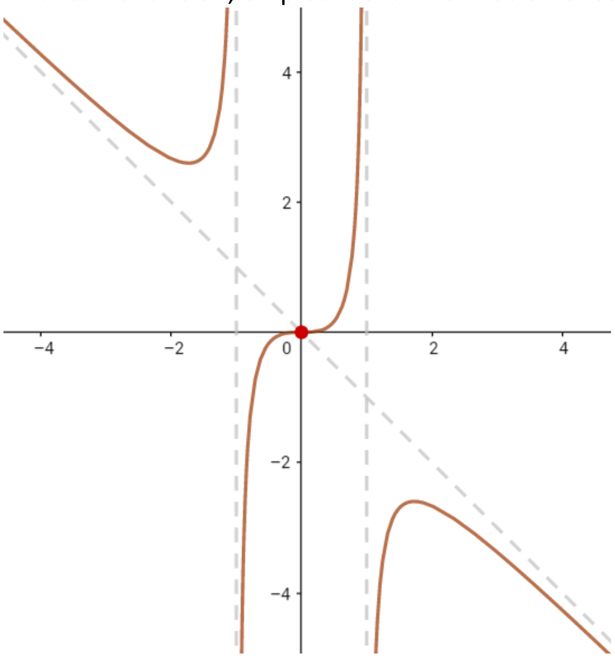
No tiende a un valor finito cuando $x\to\pm\infty$, por lo tanto **NO TIENE ASÍNTOTA HORIZONTAL** (1p)

<u>Análisis de Asíntotas Oblicuas:</u>

$$f(x) = -\frac{x^3}{x^2-1} = -x - \frac{x}{x^2-1}$$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(-x - \frac{x}{x^2-1}\right)$ el segundo término tiende a cero, por lo tanto la función se comporta como $y=-x$ cuando $x\to\pm\infty$. Tiene **ASÍNTOTA OBLICUA** de ecuación $y=-x$ (2p)

e. Graficar la función, empleando la información encontrada previamente. **(5p)**



Asíntota oblicua (1p)
Asíntota vertical (1p c/u)
Intersección (0,0) (1p)
Curva (2p)

f. Empleando la gráfica halle el Rango de la función. **(2p)** $Im[f] = \mathbb{R}$ (2p)

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

PRIMER PARCIAL RESPUESTAS

FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Naturaleza - Ciencia - Humanismo

ASIGNATURA	Cálculo I	AÑO	2019	TEMA	2	Nº HOJAS	
APELLIDO Y NOMBRE				LEGAJO/DNI			

Instrucciones: coloque nombre y apellido **en cada hoja** que va a entregar. Lea atentamente cada consigna. Desarrolle detalladamente y con letra clara los ejercicios para obtener el puntaje completo. Debe usar **tinta para desarrollar los ejercicios**. No se permite corrector, tache si es necesario. Cuando finalice, indique el número de hojas empleadas en el encabezado (incluyendo las fotocopias). Debe obtener un **mínimo de 60 puntos para aprobar** el examen. Dispone de **2 horas** para su resolución. ¡ÉXITO!

1. Dadas las siguientes funciones determine si poseen inversa o no, justifique **(2p)**. Si la función tiene inversa hállela y verifique mediante la composición de la función con su inversa **(6p)** **(Total 8p)**

a. $f(x) = x^6 - 2x^3$ No tiene inversa por no ser función uno a uno (1p)

b. $g(x) = \sqrt{2-2x} - 5$ Sí tiene inversa por ser función uno a uno (1p)

El dominio e imagen de $g(x)$ está dado por: $g(x) = \sqrt{2-2x} - 5,\ 1 \le x,\ -5 \le y$

Despejo x (1p) $\quad y = \sqrt{2-2x} - 5 \implies x = 1 - \frac{(y+5)^2}{2}, -5 \le y$

Intercambio x con y (1p) $\quad y = 1 - \frac{(x+5)^2}{2}, \boldsymbol{-5 \le x}$

Entonces la función inversa es $g^{-1}(x)$ con dominio restringido $\boldsymbol{g^{-1}(x) = 1 - \frac{(x+5)^2}{2}, \quad -5 \le x}$ (2p)

Verificación $(g^{-1} \circ g)(x) = 1 - \frac{\left(\sqrt{2-2x}-5+5\right)^2}{2} = 1 - \frac{\left(\sqrt{2-2x}\right)^2}{2} = 1 - \frac{2-2x}{2} = 1 - 1 + x = x$ (2p)

O bien

$(g \circ g^{-1})(x) = \sqrt{2 - 2\left(1 - (x+5)^2/2\right)} - 5 = \sqrt{2 - 2 + (x+5)^2} - 5 = \sqrt{(x+5)^2} - 5 = |x+5| - 5 =$

Como $-5 \le x \implies |x+5| = x+5 \implies (g \circ g^{-1})(x) = x + 5 - 5 = x$

2. Sean $f(x) = \frac{1}{x-2}$ y $g(x) = \sqrt{x+1}$, halle $(f \circ g)(x)$ e indique su dominio. **(4p)**

$(fog)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{x+1}-2}$ (2p)

El dominio de g(x) es [-1,∞) y su imagen [0,∞).

El dominio de f(x) es R-{2}.

De esta forma, f se puede aplicar a todos los valores de g(x) excepto cuando g(x)=2, lo cual ocurre si x=3.

Por lo tanto el dominio de fog es **[-1,3) U (3,∞)** (2p)

3. Dada $f(x) = 2\ln(x+3)$, obtenga la expresión de la función g resultante luego de hacer las siguientes transformaciones: un desplazamiento horizontal de 3 unidades a la derecha, una compresión vertical en un factor de 2, y una reflexión respecto al eje y. **(4p)**

Función original $\quad y = 2\ln(x+3)$

Desplazamiento horiz. de 3 unidades der. $\quad y = 2\ln(x-3+3) = 2\ln(x)$ (1p)

Compresión vertical en factor de 2 $\quad y = \frac{1}{2} 2\ln(x) = \ln(x)$ (1p)

Reflexión respecto al eje y $\quad y = \ln(-x)$ (1p)

La función transformada es $g(x) = \ln(-x)$ (1p)

4. Una función $f(x)$ cumple para todo valor de x la siguiente relación: $-c - |a-x| \le f(x) \le -c + |a-x|$
Encuentre $\lim_{x \to a} f(x)$ **(4p)**

$$-c - |a-x| \le f(x) \le -c + |a-x|$$

Por Teorema del Emparedado sabemos $\lim_{x\to a}(-c - |a-x|) \le \lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a}(-c + |a-x|)$ (1p)

Resolvemos los límites por sustitución directa $\lim_{x\to a}(-c - |a-x|) = -c$

$$\lim_{x\to a}(-c+|a-x|)=-c \text{ (1p)}$$

Entonces $-c \le \lim_{x\to a} f(x) \le -c \implies \boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x) = -c}$ (2p)

5. Demuestre el siguiente límite por definición: $\lim_{x\to 3} x^2-2x=3$. A continuación, interprete gráficamente considerando $\varepsilon=0{,}5$ **(15p)**

$\forall \varepsilon>0 \ \exists\ \delta>0 \ / 0<|x-3|<\delta \Rightarrow |x^2-2x-3|<\varepsilon$ (4p)

Se trabaja a continuación con la Tesis: $|x^2-2x-3|<\varepsilon$

$|(x+1)(x-3)|<\varepsilon$ se aplica propiedad $|a*b|=|a|*|b|$

$|x+1||x-3|<\varepsilon$ **(1)** (1p)

Se tiene por Hipótesis que $|x-3|<\delta$.

Se trabaja la misma para acotar $x+1$: $|x-3|<\delta$

$-\delta<x-3<\delta$ se suma 4 en todos los miembros

$$-\delta+4<x-3+4<\delta+4$$
$$-(\delta+4)<-\delta+4<x+1<\delta+4$$
$$|x+1|<\delta+4$$

En (1): $|x+1||x-3|<\delta(\delta+4)=\varepsilon$

$<\delta^2+4\delta=\varepsilon$ se completan cuadrados para despejar δ

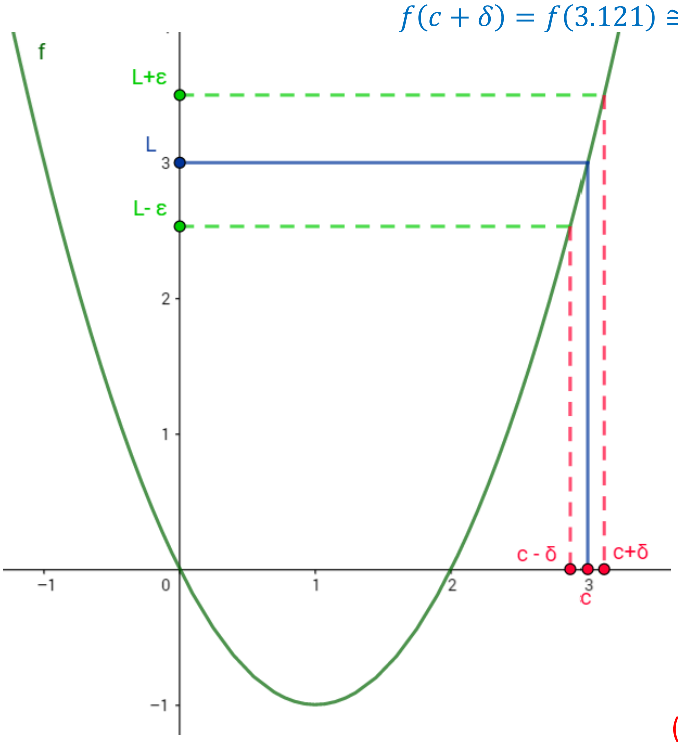
$<\delta^2+4\delta+4-4=\varepsilon$

$<(\delta+2)^2=\varepsilon+4 \Rightarrow \boldsymbol{\delta=\sqrt{\varepsilon+4}-2}$

(Obtener expresión $\delta(\varepsilon)$, independientemente de la vía usada 5p)

Si $\varepsilon=0{,}5$ tenemos $\delta\cong 0{,}121 \implies$ $c-\delta=3-0{,}121=2.879$

$$c+\delta=3+0{,}121=3.121$$
$$f(c-\delta)=f(2.879)\cong 2{,}530\cong L-\varepsilon$$
$$f(c+\delta)=f(3.121)\cong 3{,}499\cong L+\varepsilon$$



(5p)

ASIGNATURA	Cálculo I	AÑO	2019	TEMA	2	Nº HOJAS	
APELLIDO Y NOMBRE				LEGAJO/DNI			

6. Resuelva los siguientes límites sin aplicar L'Hôpital. **(15p c/u, Total 30p)**

a. $\lim_{x\to 0} \frac{sen(3x)}{-sen(2x)} = \lim_{x\to 0} -\frac{sen(3x)}{sen(2x)} \cdot \left(\frac{2x}{2x}\right) \cdot \left(\frac{3x}{3x}\right) = \lim_{x\to 0} -\frac{sen(3x)}{3x} \cdot \frac{2x}{sen(2x)} \cdot \frac{3x}{2x} =$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{sen(3x)}{3x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2x}{sen(2x)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{3}{2} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

Explorar sustitución directa e identificar indeterminación 0/0 (1p)
Multiplicar y dividir por factores adecuados, reacomodar la expresión (4p)
Aplicar propiedades de límite y límites notables (5p)
Evaluar el límite y resultado final (5p)

b. $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{16x^2 - 2x} - |4x| = \lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{16x^2 - 2x} - |4x|\right) . \frac{\sqrt{16x^2-2x}+|4x|}{\sqrt{16x^2-2x}+|4x|} = \lim_{x\to -\infty} \frac{|16x^2-2x|-(4x)^2}{\sqrt{16x^2-2x}+|4x|} =$

$= \lim_{x\to -\infty} \frac{(16x^2-2x)-(4x)^2}{\sqrt{16x^2-2x}+|4x|}$ reemplazo $|16x^2 - 2x| = 16x^2 - 2x$ ya que $16x^2 - 2x > 0$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-2x}{\sqrt{16x^2 - 2x} + |4x|} \cdot \frac{|4x|}{|4x|} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{-2x}{|4x|}}{\frac{\sqrt{16x^2 - 2x}}{\sqrt{(4x)^2}} + \frac{|4x|}{|4x|}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{-2x}{|4x|}}{\sqrt{1 - 1/8x} + 1}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{-2x}{-4x}}{\sqrt{1 - 1/8x} + 1} \text{ reemplazo } |4x| = -4x \text{ ya que } 4x < 0$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{1/2}{\sqrt{1 - 1/8x} + 1} = \frac{1}{2 * 2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

Explorar sustitución directa e identificar indeterminación $\infty - \infty$ (1p)
Racionalizar y operar algebraicamente, reacomodar la expresión (4p)
Aplicar propiedades valor absoluto (5p)
Evaluar el límite y resultado final (5p)

7. a. Complete a continuación las tres condiciones que deben satisfacerse para que una función $f(x)$ sea continua en un punto $x = c$. **(1p c/u, Total 3p)**

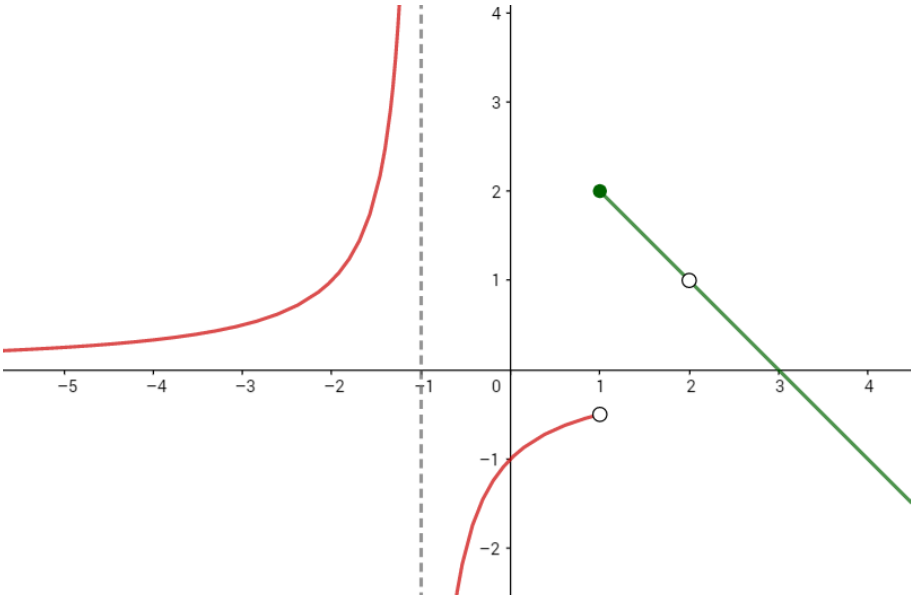
Condición 1	Condición 2	Condición 3
$f(c)$ está definida	Existe $\lim_{x\to c} f(x)$ $\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x)$	$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

b. Dada $f(x)$, grafique y encuentre los valores de x en los cuales la función es discontinua. Complete la siguiente tabla **(Total 12p)**

$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x+1} & si\ x < 1 \\ \frac{-x^2 + 5x - 6}{x - 2} & si\ x \geq 1 \end{cases}$ **Gráfico (4.5p)** Valores de x **(0.5p c/u)**	¿Se cumple la condición 1? **(0.5p c/u)**	¿Se cumple la condición 2? **(0.5p c/u)**	¿Se cumple la condición 3? **(0.5p c/u)**	Tipo de discontinuidad **(0.5p c/u)**
$x = -1$	No. $\nexists f(-1)$	No. $\lim_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim_{x\to -1^+} f(x)$	No	Inevitable. Asíntota vertical. Salto infinito

ASIGNATURA	Cálculo I	AÑO	2019	TEMA	2	Nº HOJAS	
APELLIDO Y NOMBRE				LEGAJO/DNI			

$x = 1$	Sí. $f(1) = 2$	No. $\lim_{x\to1^-} f(x) \neq \lim_{x\to1^+} f(x)$	No	Inevitable. Salto finito
$x = 2$	No. $\nexists\, f(2)$	Sí. $\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^+} f(x)$	No	Evitable.



Curvas (1,5p)
Asíntota Vertical (1p)
Discontinuidad x=1 (1p)
Discontinuidad x=2 (1p)

8. Dada $f(x) = \frac{x^3}{x^2-2} = \frac{x^3}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}$ determine: **(Total 20p)**

a. Dominio implícito **(2p)** $D[f] = \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$
o bien $D[f] = (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \infty)$ (2p)

b. Paridad **(2p)**

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 2} = -\frac{x^3}{x^2-2} = -f(x) \text{ (1p)} \Longrightarrow \text{Función impar (1p)}$$

c. Intersecciones con los ejes. **(2p)**
Intersección con el eje y: x=0 $\Longrightarrow f(0) = 0$ (0.5p)
Intersección con el eje x: y=0 $\Longrightarrow x = 0$ (0.5p)
La gráfica interseca ambos ejes en el origen (0,0) (1p)

d. Si tiene asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas). Justifique calculando todos los límites que sean necesarios y determinando la ecuación de las asíntotas. **(7p)**
Análisis de Asíntotas Verticales:
$x = -\sqrt{2}$

$$\lim_{x\to-\sqrt{2}^-} f(x) = \lim_{x\to-\sqrt{2}^-} \frac{x^3}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} = -\infty \quad \text{(0,5p)}$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{2}^+} f(x) = \lim_{x\to-\sqrt{2}^+} \frac{x^3}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} = +\infty \quad \text{(0,5p)}$$

Por lo tanto la función posee una **ASÍNTOTA VERTICAL** de ecuación $\boldsymbol{x = -\sqrt{2}}$. (1p ecuación)
$x = \sqrt{2}$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{2}^-} \frac{x^3}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} = -\infty \quad \text{(0,5p)}$$

$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+} \frac{x^3}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} = +\infty$ (0,5p)

Por lo tanto la función posee una **ASÍNTOTA VERTICAL** de ecuación $\boldsymbol{x = \sqrt{2}}$. (1p ecuación)

Análisis de Asíntotas Horizontales:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} = \pm\infty$

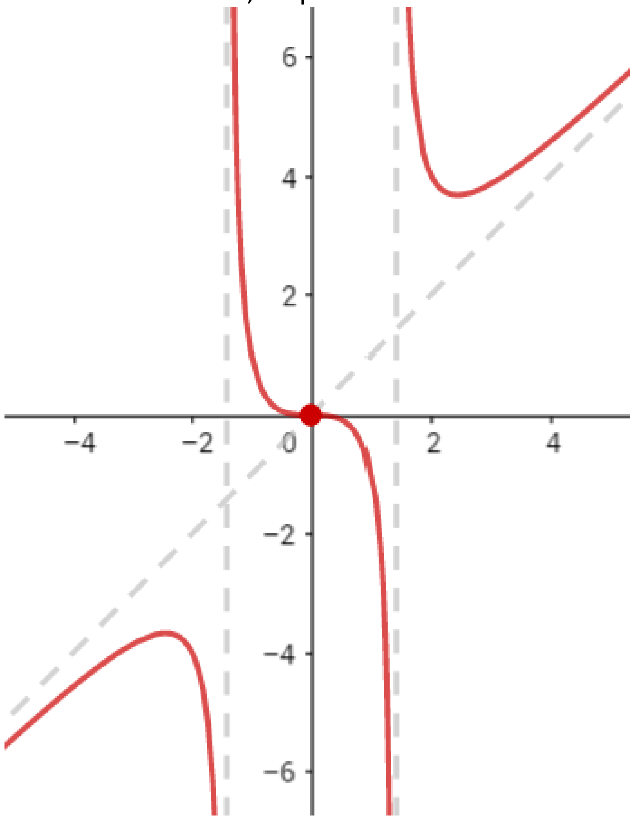
No tiende a un valor finito cuando $x \to \pm\infty$, por lo tanto **NO TIENE ASÍNTOTA HORIZONTAL** (1p)

Análisis de Asíntotas Oblicuas:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-2} = x + \frac{2x}{x^2-2}$$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(x + \frac{2x}{x^2-2}\right)$ el segundo término tiende a cero, por lo tanto la función se comporta como $y = x$ cuando $x \to \pm\infty$. Tiene **ASÍNTOTA OBLICUA** de ecuación $y = x$ (2p)

e. Graficar la función, empleando la información encontrada previamente. **(5p)**



Asíntota oblicua (1p)
Asíntota vertical (1p c/u)
Intersección (0,0) (1p)
Curva (2p)

f. Empleando la gráfica halle el Rango de la función. **(2p)** $Im[f] = \mathbb{R}$ (2p)