ASIGNATURA	Elementos de Cálculo I	**AÑO**	2019	**TEMA**	**1**	**Nº HOJAS**	
APELLIDO Y NOMBRE				**LEGAJO/DNI**			

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

PRIMER PARCIAL

FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Naturaleza - Ciencia - Humanismo

Instrucciones: coloque nombre y apellido **en cada hoja** que va a entregar. Lea atentamente cada consigna. Desarrolle detalladamente y con letra clara los ejercicios para obtener el puntaje completo. Debe usar **tinta para desarrollar los ejercicios**. No se permite corrector, tache si es necesario. Cuando finalice, indique el número de hojas empleadas en el encabezado (incluyendo las fotocopias). Debe obtener un **mínimo de 60 puntos para aprobar** el examen. Dispone de **2,5 horas** para su resolución. ¡ÉXITO!

FUNCIONES (20p)

1. Suponga que se realizan las siguientes transformaciones sobre la gráfica de la función $f(x) = \cos x$. Primero se la comprime horizontalmente en un factor 4, luego se la traslada verticalmente 1 unidad hacia abajo y finalmente se la refleja respecto al eje x. Determine la ecuación de la función transformada. **(4p)**

Función original	$\cos x$	
Compresión horizontal en factor 4	$\cos(4x)$	(1p por aplicar bien el paso)
Traslación vertical en 1 unidad hacia abajo	$\cos(4x) - 1$	(1p por aplicar bien el paso, aún si el anterior estuviera mal)
Reflexión respecto al eje x	$-[\cos(4x) - 1]$	(1p por aplicar bien el paso, aún si el anterior estuviera mal)

Por lo tanto la función trasformada es $\boldsymbol{g(x) = -[\cos(4x) - 1]}$

(1p por llegar al resultado final correcto)

2. Determine la paridad (par, impar o ni par ni impar) de $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x \cos x}$, y si su gráfica presentaría alguna simetría y de qué tipo. **(4p)**

$$f(-x) = \frac{\sqrt{(-x)^2-4}}{-x\cos(-x)} = \frac{\sqrt{x^2-4}}{-x\cos x} = -\frac{\sqrt{x^2-4}}{x\cos x} = -f(x)$$

(0,5p por utilizar que x^2 es par)

(0,5p por utilizar que x es impar)

donde en el segundo paso se utilizó que el coseno es una función par. (1p por utilizar la paridad del coseno)

Por lo tanto $f(x)$ es IM**PAR** (1p por llegar a la conclusión correcta) y como toda función impar su gráfica es **SIMÉTRICA RESPECTO AL ORIGEN**. (1p por decir la simetría correcta)

3. Sean $f(x) = \frac{1}{x-1}$ y $g(x) = \sqrt{x-2}$, halle $(fog)(x)$ e indique su dominio. **(4p)**

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-2}) = \frac{1}{\sqrt{x-2}-1}$$

(2p por hallar fog)

El dominio de g(x) es [2,∞) y su imagen [0,∞).

El dominio de f(x) es R-{1}.

De esta forma, f se puede aplicar a todos los valores de g(x) excepto cuando g(x)=1, lo cual ocurre si x=3.

Por lo tanto el dominio de fog es **[2,3) U (3,∞)** (2p por hallar el dominio correcto)

4. Dadas las siguientes funciones determine si poseen inversa o no, justifique. **(2p)** Si la función tiene inversa hállela y verifique mediante la composición de la función con su inversa. **(6p)** **(Total 8p)**

a) $f(x) = \frac{3x}{x+1}$

f(x) es uno a uno en todo su dominio por lo tanto posee inversa. (1p)

Función original $y = \frac{3x}{x+1}$

Despejo x (2p)
$$y(x+1) = 3x$$
$$yx + y = 3x$$
$$yx + y - 3x = 0$$
$$x(y-3) + y = 0$$
$$x(y-3) = -y$$
$$x = \frac{-y}{y-3}$$

Intercambio x con y (1p) $\boldsymbol{y = \frac{-x}{x-3}}$ **o** $\boldsymbol{y = \frac{x}{3-x}}$

Entonces $\boldsymbol{f^{-1}(x) = \frac{x}{3-x}}$ (1p por llegar al resultado correcto)

Verificación: $\boldsymbol{(f^{-1} o\, f)(x)} = \frac{\frac{3x}{x+1}}{3 - \frac{3x}{x+1}} = \frac{\frac{3x}{x+1}}{\frac{3x+3-3x}{x+1}} = \frac{\frac{3x}{x+1}}{\frac{3}{x+1}} = \frac{3x}{x+1}\,\frac{x+1}{3} = \frac{3x}{3} = x$ para $x \neq -1$ (2p verificar)

b) $g(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$

g(x) no es uno a uno, por ejemplo en x=2 y x=-2 toma el mismo valor, por lo cual no posee inversa en todo su dominio. (1p)

LÍMITE (40p)

5. Determine en los siguientes casos si existe o no el límite <u>sin aplicar L'Hôpital.</u> Si existe el límite calcúlelo, si no existe justifique adecuadamente. (Indique en cada caso las propiedades y/o teoremas empleados)

a. $\lim_{x\to 0} \frac{4x}{\tan(2x)}$ **(10p c/u, Total 30p)**

$\lim_{x\to 0} \frac{4x}{\tan(2x)}$ Indeterminación 0/0. **(1p)**

$= \lim_{x\to 0} \frac{4x\cos(2x)}{\operatorname{sen}(2x)}$ Uso definición de la tangente. **(1p)**

$= 4\lim_{x\to 0}\cos(2x)\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen}(2x)}$ Propiedad del producto de los límites **(1p)**

y de límite de una función por una constante. **(1p)**

$= 4\,.1.\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen}(2x)}$ Evalúo el primer límite por sustitución directa. **(1p)**

$= 4.1.\lim_{u\to 0}\frac{u/2}{\operatorname{sen} u}$ Sustitución u=2x. **(2p)**

$= \frac{4}{2}\lim_{u\to 0}\frac{u}{\operatorname{sen} u}$ Propiedad de límite de una función por una constante. **(1p)**

$= 2\left[\lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen} u}{u}\right]^{-1} = 2.1^{-1} = 2.1 = \boldsymbol{2}$ Límite notable. **(2p)**

b. $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$

$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2} =$ Indeterminación 0/0. **(1p)**

$= \lim_{x\to 4} \frac{(x^2-16)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$ Multiplico y divido por el conjugado de $\sqrt{x}-2$. **(2p)**

$= \lim_{x\to 4} \frac{(x^2-16)(\sqrt{x}+2)}{|x|-4}$ Diferencia de cuadrados. Uso que $\sqrt{x^2} = |x|$ **(2p)**

$= \lim_{x\to 4} \frac{(x^2-16)(\sqrt{x}+2)}{x-4}$ x está en el entorno de 4, considero $x > 0$, entonces $|x| = x$ **(1p)**

$= \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}$ Diferencia de cuadrados. **(1p)**

$= \lim_{x\to 4}(x+4)(\sqrt{x}+2)$ Teorema: dos funciones iguales excepto en un punto tienen el mismo límite para todo x. **(2p)**

$= (4+4)(\sqrt{4}+2) = 8.4 = 32$ Sustitución directa. **(1p)**

c. $\lim_{x\to 2} \frac{2-x}{|x-2|}$ Nota: recuerde que el valor absoluto es una función definida por partes

$\lim_{x\to 2} \frac{2-x}{|x-2|}$ es una indeterminación 0/0 **(1p)**

Teniendo en cuenta que $|x-2|$ es una función definida por partes, que se define de diferente forma para valores mayores y menores que 2, debo calcular límites laterales. **(2p darse cuenta que deben usar límites laterales)**

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & si\ \ x \geq 2 \\ -(x-2) = 2-x & si\ x \leq 2 \end{cases}$$ **(2p)**

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{2-x}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2-x}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} -\frac{x-2}{x-2} = -\lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x-2} = -\lim_{x\to 2^+} 1 = -1$$ **(2p)**

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2-x}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^-} \frac{2-x}{2-x} = \lim_{x\to 2^-} 1 = 1$$ **(2p)**

En ambos casos uso el teorema que afirma que dos funciones iguales excepto en un punto tienen el mismo límite para todo x.

Dado que los límites laterales son diferentes se concluye que EL LÍMITE NO EXISTE. **(1p conclusión)**

6. Sabiendo que: **(5p c/u, Total 10p)**

$$(x-2)^4 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 4 \qquad \text{para } 1 \leq x \leq 3$$

Indique si es posible o no calcular el límite en a) y en b). <u>Justifique</u> cada caso indicando cuál es el Teorema aplicado y utilice el mismo para llegar al valor numérico del límite. Nota: graficar la situación puede servirle de ayuda para entender el problema.

a. $\lim_{x \to 1} f(x)$ b. $\lim_{x \to 2} f(x)$

El teorema que uno desea aplicar es el Teorema del Sandwich, y para ello deben cumplirse dos condiciones:

1) $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ en un entorno abierto de $x = c$
2) $\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$

Si ambas condiciones se cumplen entonces $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

a) $\lim_{x \to 1} f(x)$

Analicemos la aplicación del Teorema del Sandwich a este caso (1p por decir bien el Teorema empleado)

Notemos que si bien la segunda condición se cumple: $\lim_{x \to 1}(x-2)^4 = \lim_{x \to 1} x^2 - 4x + 4 = 1$, la primera no se cumple ya que la relación entre las funciones es válida en el intervalo [1,3] con lo cual no podemos decir que se cumpla para un intervalo abierto alrededor de x=1. (2p por la evaluación correcta de las condiciones necesarias para este caso)

Por lo tanto no podemos utilizar el teorema para calcular el límite. (2p por llegar a la conclusión)

b) $\lim_{x \to 2} f(x)$

Analicemos la aplicación del Teorema del Sandwich a este caso (1p por decir bien el Teorema empleado)

Notemos que en este caso la primera condición sí se cumple, ya que para el intervalo abierto (1,3) en en el entorno de x=2, se cumple la relación entre las tres funciones.

Además la segunda condición también se cumple: $\lim_{x \to 2}(x-2)^4 = \lim_{x \to 2} x^2 - 4x + 4 = 0$.

(1p por la evaluación correcta de la condición 1)

(1p por la evaluación correcta de la condición 2)

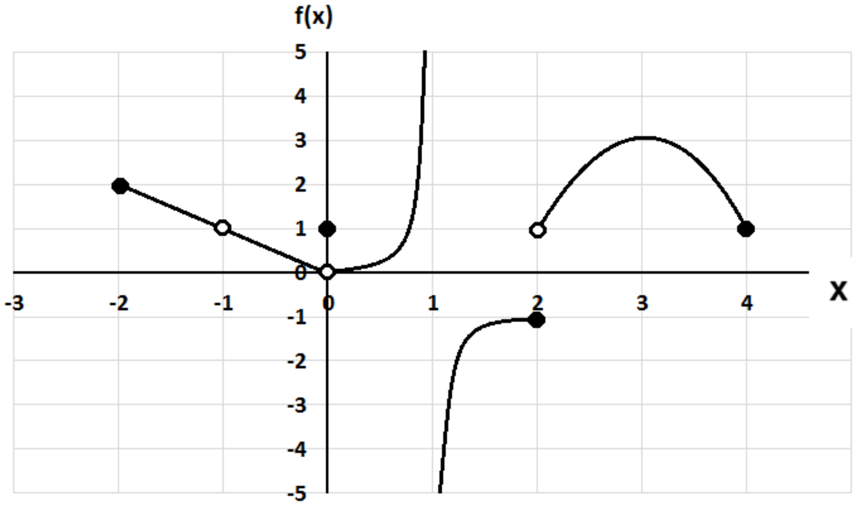
Por lo tanto podemos utilizar el teorema para afirmar que $\lim_{x \to 2} f(x) = 0$. (2p por llegar a la conclusión)

7. CONTINUIDAD (15p)

a) Complete a continuación las tres condiciones que deben satisfacerse para que una función $f(x)$ sea continua en un punto $x = c$. **(1p c/u, Total 3p)**

1	Existe $f(c)$. (1p)
2	Existe $\lim_{x \to c} f(x) = L$. (1p) Es decir que existen los límites laterales y son iguales: $\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = L$. (pueden poner esta parte o no sin que afecte el puntaje)
3	$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ (1p)

b) Dada la gráfica de la función $f(x)$ en el dominio [-2,4], complete la tabla siguiente evaluando la continuidad de la función en determinados valores de x: **(12p)**



	¿Se cumple la condición 1? (0,5p c/u)	¿Se cumple la condición 2? (0,5p c/u)	¿Se cumple la condición 3? (0,5p c/u)	¿La función es continua o discontinua en el punto? (0,5p c/u)	Si hay discontinuidad ¿es evitable o no? (1p c/u)
$x=-1$	NO	SI (lim es 1)	-	Discontinua	Evitable
$x=0$	SI (f(0)=1)	SI (lim es 0)	NO	Discontinua	Evitable
$x=1$	NO	NO (lim laterales no existen)	-	Discontinua	No evitable
$x=2$	SI (f(2)=-1)	NO (lim laterales diferentes)	-	Discontinua	No evitable

8. EJERCICIO INTEGRADOR DE FUNCIONES, LÍMITE Y CONTINUIDAD

Dada $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-x-2}$ determine: **(Total 25p)**

a. Dominio implícito. **(2p)**

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-x-2}=\frac{x^2-1}{(x+1)(x-2)}$$

D[f]= R-{-1,2} o D[f]= (-∞,-1)U(-1,2)U(2,∞) (2p si está correcto, 0p si no está bien)

b. Intersecciones con los ejes. **(4p)**

Intersección con eje y:

Sea $x=0$ entonces $\boldsymbol{y=1/2}$ (2p)

Intersección con eje x:

Sea $y=0$ entonces $x^2-1=0$ entonces $x=1$ o s $x=-1$, pero $x=-1$ no está en el dominio de la función, por lo tanto la única intersección con el eje y es $\boldsymbol{x=1}$. (2p) (si colocan que $x=-1$ también es intersección entonces se les da sólo 1p)

c. Si tiene asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas). Justifique calculando todos los límites que sean necesarios y determinando la ecuación de las asíntotas. **(12p)**

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-x-2}=\frac{x^2-1}{(x+1)(x-2)}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-2)}$$

Análisis de Asíntotas Verticales:

$x=-1$

$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to -1^-}\frac{x-1}{x-2}=2/3$ (0,5p)

$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to -1^+}\frac{x-1}{x-2}=2/3$ (0,5p)

Por lo tanto $\lim_{x\to -1} f(x)=2/3$ y **NO** hay una asíntota vertical en $x=-1$. (1p conclusión)

$x=2$

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x-1}{x-2}=-\infty$ (0,5p)

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-1}{x-2}=+\infty$ (0,5p)

Por lo tanto la función posee una **ASÍNTOTA VERTICAL** de ecuación $\boldsymbol{x=2}$. (1p ecuación)

Análisis de Asíntotas Horizontales:

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2-x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-1)/x^2}{(x^2-x-2)/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-1/x^2}{1-1/x-2/x^2}=\frac{1-0}{1-0-0}=1$ (1,5p)

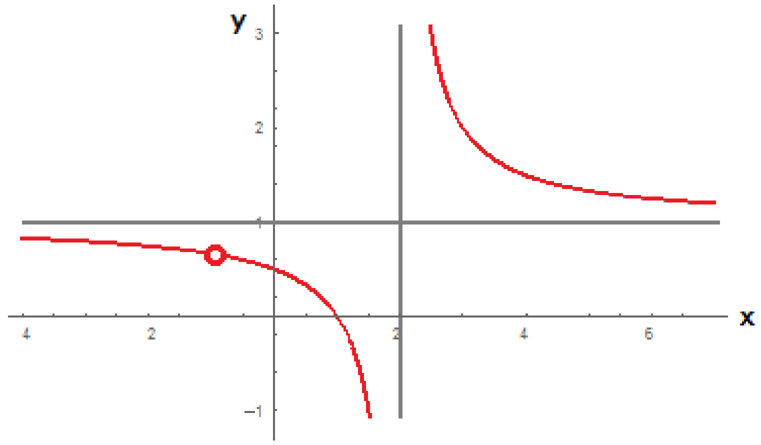
$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-1}{x^2-x-2}=\lim_{x\to -\infty}\frac{(x^2-1)/x^2}{(x^2-x-2)/x^2}=\lim_{x\to -\infty}\frac{1-1/x^2}{1-1/x-2/x^2}=\frac{1-0}{1-0-0}=1$ (1,5p)

Por lo tanto la función tiene una **ASÍNTOTA HORIZONTAL** de ecuación $\boldsymbol{y=1}$. (1p ecuación)

Análisis de Asíntotas Oblicuas: (4p)

Observando los límites anteriores notamos que no se cumple que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ por lo que no hay asíntotas oblicuas. Otra forma de justificarlo es notar que la función es racional y que el polinomio numerador no posee un orden superior en uno que el orden del polinomio denominador como se requiere para tener una asíntota oblicua en el caso de funciones racionales. En este caso ambos polinomios son de orden 2.

d. Graficar la función, empleando la información encontrada previamente. **(5p)**



(1p por asíntota vertical) (1p por asíntota horizontal) (1p hueco en x=-1) (1p intersecciones)(1p trazado correcto de la forma de la función)

e. Empleando la gráfica halle el Rango de la función. **(2p)**

Im[f]=R-{1;2/3} o Im[f]= (-∞,-2/3)U(2/3,1)U(1,∞) (2p si está correcto, 1p si le falta tener en cuenta el hueco en y=2/3, 0p en otro caso)

f. OPTATIVO (este ejercicio da **PUNTOS EXTRA!!!**) Empleando la gráfica determine para qué valores de x la función presenta discontinuidades. Clasifique las mismas en evitables y no evitables. Si encuentra alguna discontinuidad evitable redefina la función de forma tal que se resuelva la discontinuidad. **(5p EXTRA)**

$x = -1$ discontinuidad evitable

1) f(-1) no existe
2) $\lim_{x \to -1} f(x) = 2/3$

Redefino la función:

$$g(x) = \frac{x-1}{x-2}$$

Otra forma es:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq -1 \\ \frac{2}{3} & si\ x = -1 \end{cases}$$

(1p por hallar la discontinuidad) (1p por decir que es evitable) (1p por redefinirla correctamente)

$x = 2$ discontinuidad no evitable

1) f(2) no existe
2) $\lim_{x \to 2} f(x)$ no existe

(1p por hallar la discontinuidad) (1p por decir que es no evitable)

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO		PRIMER PARCIAL			FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES Naturaleza - Ciencia - Humanismo		
ASIGNATURA	Elementos de Cálculo I	**AÑO**	2019	**TEMA**	**2**	**Nº HOJAS**	
APELLIDO Y NOMBRE				**LEGAJO/DNI**			

Instrucciones: coloque nombre y apellido **en cada hoja** que va a entregar. Lea atentamente cada consigna. Desarrolle detalladamente y con letra clara los ejercicios para obtener el puntaje completo. Debe usar **tinta para desarrollar los ejercicios**. No se permite corrector, tache si es necesario. Cuando finalice, indique el número de hojas empleadas en el encabezado (incluyendo las fotocopias). Debe obtener un **mínimo de 60 puntos para aprobar** el examen. Dispone de **2,5 horas** para su resolución. ¡ÉXITO!

FUNCIONES (20p)

1. Suponga que se realizan las siguientes transformaciones sobre la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$. Primero se la elonga verticalmente en un factor 2, luego se la traslada horizontalmente 1 unidad hacia la derecha y finalmente se la refleja respecto al eje y. Determine la ecuación de la función transformada. **(4p)**

Función original	$\operatorname{sen} x$	
Elongación vertical en factor 2	$2\operatorname{sen}(x)$	(1p por aplicar bien el paso)
Traslación horizontal en 1 unidad hacia la derecha	$2\operatorname{sen}(x-1)$	(1p por aplicar bien el paso, aún si el anterior estuviera mal)
Reflexión respecto al eje y	$2\operatorname{sen}(-x-1)$	(1p por aplicar bien el paso, aún si el anterior estuviera mal)

Por lo tanto la función trasformada es $\boldsymbol{g(x) = 2\operatorname{sen}(-x-1)}$

(1p por llegar al resultado final correcto)

2. Determine la paridad (par, impar o ni par ni impar) de $f(x) = \frac{x \operatorname{sen} x}{\sqrt{x^2-9}}$, y si su gráfica presentaría alguna simetría y de qué tipo. **(4p)**

$$f(-x) = \frac{-x \operatorname{sen}(-x)}{\sqrt{(-x)^2-9}} = \frac{-x\,(-\operatorname{sen} x)}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{x \operatorname{sen} x}{\sqrt{x^2-9}} = f(x)$$

(0,5p por utilizar que x^2 es par)

(0,5p por utilizar que x es impar)

donde en el segundo paso se utilizó que el seno es una función impar. (1p por utilizar que seno es impar)

Por lo tanto $f(x)$ es **PAR** (1p por llegar a la conclusión correcta) y como toda función par su gráfica es **SIMÉTRICA RESPECTO AL EJE Y**. (1p por decir la simetría correcta)

3. Sean $f(x) = \frac{1}{x-2}$ y $g(x) = \sqrt{x+1}$, halle $(fog)(x)$ e indique su dominio. **(4p)**

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x+1}) = \frac{1}{\sqrt{x+1}-2}$$

(2p por hallar fog)

El dominio de g(x) es [-1,∞) y su imagen [0,∞).

El dominio de f(x) es R-{2}.

De esta forma, f se puede aplicar a todos los valores de g(x) excepto cuando g(x)=2, lo cual ocurre si x=3.

Por lo tanto el dominio de fog es **[-1,3) U (3,∞)** (2p por hallar el dominio correcto)

4. Dadas las siguientes funciones determine si poseen inversa o no, justifique. **(2p)** Si la función tiene inversa hállela y verifique mediante la composición de la función con su inversa. **(6p)** **(Total 8p)**

a) $f(x) = \frac{3x^2}{x^2+1}$

f(x) no es uno a uno por lo tanto NO posee inversa en todo su dominio. Por ejemplo en x=1 y x=-1, la función toma el mismo valor. (1p)

b) $g(x) = \frac{2x}{x-1}$

g(x) es uno a uno en todo su dominio por lo tanto posee inversa. (1p)

Función original $\quad y = \frac{2x}{x-1}$

Despejo x (2p)

$$y(x-1) = 2x$$
$$yx - y = 2x$$
$$yx - y - 2x = 0$$
$$x(y-2) - y = 0$$
$$x(y-2) = y$$
$$x = \frac{y}{y-2}$$

Intercambio x con y (1p) $\quad \boldsymbol{y = \frac{x}{x-2}}$

Entonces $\boldsymbol{f^{-1}(x) = \frac{x}{x-2}}$ (1p por llegar al resultado correcto)

Verificación: $\left(\boldsymbol{f^{-1} o\, f}\right)(\boldsymbol{x}) = \frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2x}{x-1}-2} = \frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2x-2x+2}{x-1}} = \frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2}{x-1}} = \frac{2x}{x-1}\frac{x-1}{2} = \frac{2x}{2} = x$ para $x \neq 1$ (2p verificar)

LÍMITE (40p)

5. Determine en los siguientes casos si existe o no el límite sin aplicar L'Hôpital. Si existe el límite calcúlelo, si no existe justifique adecuadamente. (Indique en cada caso las propiedades y/o teoremas empleados)

a. $\lim_{x\to 0} 10x\, cot(5x)$ **(10p c/u, Total 30p)**

$\lim_{x\to 0} 10x\, cot(5x)$	Indeterminación $0.\infty$. **(1p)**
$= \lim_{x\to 0} \frac{10x\cos(5x)}{\operatorname{sen}(5x)}$	Uso definición de la cotangente. **(1p)**
$= 10 \lim_{x\to 0} \cos(5x) \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(5x)}$	Propiedad del producto de los límites **(1p)** y de límite de una función por una constante. **(1p)**
$= 10\,.1. \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(5x)}$	Evalúo el primer límite por sustitución directa. **(1p)**
$= 10. \lim_{u\to 0} \frac{u/5}{\operatorname{sen} u}$	Sustitución u=5x. **(2p)**
$= \frac{10}{5} \lim_{u\to 0} \frac{u}{\operatorname{sen} u}$	Propiedad de límite de una función por una constante. **(1p)**

$= 2\left[\lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen} u}{u}\right]^{-1} = 2.1^{-1} = 2.1 = \mathbf{2}$ Límite notable. **(2p)**

b. $\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\sqrt{x}-1}$

$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\sqrt{x}-1} =$ Indeterminación 0/0. **(1p)**

$= \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$ Multiplico y divido por el conjugado de $\sqrt{x}-1$. **(2p)**

$= \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(\sqrt{x}+1)}{|x|-1}$ Diferencia de cuadrados. Uso que $\sqrt{x^2} = |x|$ **(2p)**

$= \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$ x está en el entorno de 1, considero $x > 0$, entonces $|x| = x$ **(1p)**

$= -\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$ Factor común -1. El límite de una constante por una función. **(1p)**

$= -\lim_{x\to 1}\sqrt{x}+1$ Teorema: dos funciones iguales excepto en un punto tienen el mismo límite para todo x. **(2p)**

$= -(\sqrt{1}+1) = \mathbf{-2}$ Sustitución directa. **(1p)**

$c.$ $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{|x-3|}$ Nota: recuerde que el valor absoluto es una función definida por partes.

$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{|x-3|}$ es una indeterminación 0/0 **(1p)**

Teniendo en cuenta que $|x-3|$ es una función definida por partes, que se define de diferente forma para valores mayores y menores que 3, debo calcular límites laterales. **(2p darse cuenta que deben usar límites laterales)**

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & si\ \ x \geq 3 \\ -(x-3) = 3-x & si\ x \leq 3 \end{cases}$$ **(2p)**

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{|x-3|} = \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3^+}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} x+3 = 6$$ **(2p)**

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{|x-3|} = \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{-(x-3)} = -\lim_{x\to 3^-}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = -\lim_{x\to 3^-}(x+3) = -6$$ **(2p)**

En ambos casos uso el teorema que afirma que dos funciones iguales excepto en un punto tienen el mismo límite para todo x.
Dado que los límites laterales son diferentes se concluye que EL LÍMITE NO EXISTE. **(1p conclusión)**

6. Sabiendo que: **(5p c/u, Total 10p)**

$$x^2 - 2x + 1 \leq f(x) \leq |x-1| \qquad \text{para } 0 \leq x \leq 2$$

Indique si es posible o no calcular el límite en a) y en b). Justifique cada caso indicando cuál es el Teorema aplicado y utilice el mismo para llegar al valor numérico del límite. Nota: graficar la situación puede servirle de ayuda para entender el problema.

a. $\lim_{x\to 0} f(x)$ b. $\lim_{x\to 1} f(x)$

El teorema que uno desea aplicar es el Teorema del Sandwich, y para ello deben cumplirse dos condiciones:

1) $g(x) \le f(x) \le h(x)$ en un entorno abierto de $x = c$
2) $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$

Si ambas condiciones se cumplen entonces $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

a) $\lim_{x\to 0} f(x)$

Analicemos la aplicación del Teorema del Sandwich a este caso (1p por decir bien el Teorema empleado)
Notemos que si bien la segunda condición se cumple: $\lim_{x\to 0} x^2 - 2x + 1 = \lim_{x\to 0}|x - 1| = 1$, la primera no se cumple ya que la relación entre las funciones es válida en el intervalo [0,2] con lo cual no podemos decir que se cumpla para un intervalo abierto alrededor de x=0. (2p por la evaluación correcta de las condiciones necesarias para este caso)

Por lo tanto no podemos utilizar el teorema para calcular el límite. (2p por llegar a la conclusión)

b) $\lim_{x\to 1} f(x)$

Analicemos la aplicación del Teorema del Sandwich a este caso (1p por decir bien el Teorema empleado)
Notemos que en este caso la primera condición sí se cumple, ya que para el intervalo abierto (0,2) en en el entorno de x=1, se cumple la relación entre las tres funciones.
Además la segunda condición también se cumple: $\lim_{x\to 1} x^2 - 2x + 1 = \lim_{x\to 1}|x - 1| = 0$.

(1p por la evaluación correcta de la condición 1)

(1p por la evaluación correcta de la condición 2)

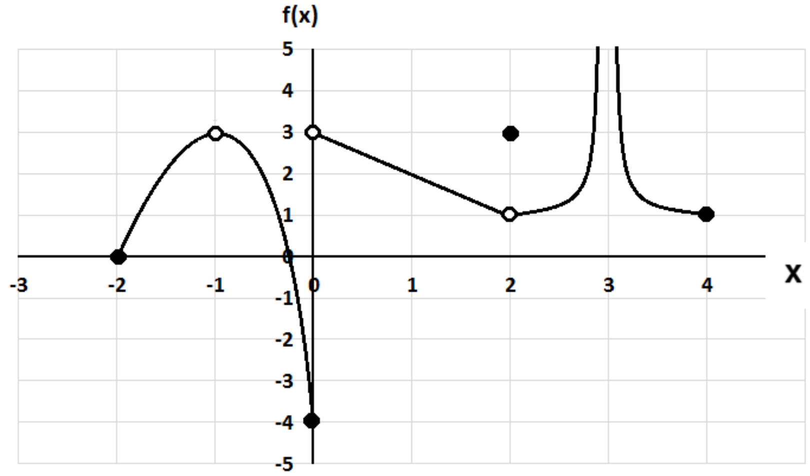
Por lo tanto podemos utilizar el teorema para afirmar que $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$. (2p por llegar a la conclusión)

7. CONTINUIDAD (15p)

a) Complete a continuación las tres condiciones que deben satisfacerse para que una función $f(x)$ sea continua en un punto $x = c$. **(1p c/u, Total 3p)**

1	Existe $f(c)$. (1p)
2	Existe $\lim_{x\to c} f(x) = L$. (1p) Es decir que existen los límites laterales y son iguales: $\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = L$. (pueden poner esta parte o no sin que afecte el puntaje)
3	$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ (1p)

b) Dada la gráfica de la función $f(x)$ en el dominio [-2,4], complete la tabla siguiente evaluando la continuidad de la función en determinados valores de x: **(12p)**



	¿Se cumple la condición 1? (0,5p c/u)	¿Se cumple la condición 2? (0,5p c/u)	¿Se cumple la condición 3? (0,5p c/u)	¿La función es continua o discontinua en el punto? (0,5p c/u)	Si hay discontinuidad ¿es evitable o no? (1p c/u)
$x = -1$	NO	SI (lim es 3)	_	Discontinua	Evitable
$x = 0$	SI (f(0)=-4)	NO (lim laterales distintos)	_	Discontinua	No evitable
$x = 2$	SI (f(2)=3)	SI (lim es 1)	NO	Discontinua	Evitable
$x = 3$	NO	NO (lim tiende a infinito)	_	Discontinua	No evitable

8. EJERCICIO INTEGRADOR DE FUNCIONES, LÍMITE Y CONTINUIDAD **(Total 25p)**

Dada $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ determine:

a. Dominio implícito. **(2p)**

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x+1)(x-1)}$$

D[f]= R-{-1;1} o D[f]= (-∞,-1)U(-1,1)U(1,∞) (2p si está correcto, 0p si no está bien)

b. Intersecciones con los ejes. **(4p)**

Intersección con eje y:

Sea $x = 0$ entonces $\boldsymbol{y = 1}$ (2p)

Intersección con eje x:

Sea $y = 0$ entonces $x - 1 = 0$ entonces $x = 1$, pero $x = 1$ no está en el dominio de la función, por lo tanto la función no tiene ninguna intersección con el eje y. (2p)

c. Si tiene asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas). Justifique calculando todos los límites que sean necesarios y determinando la ecuación de las asíntotas. **(12p)**

$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x+1)(x-1)}$

Análisis de Asíntotas Verticales:

$x = -1$

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty$ (0,5p)

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty$ (0,5p)

Por lo tanto la función posee una **ASÍNTOTA VERTICAL** de ecuación $\boldsymbol{x = -1}$. (1p conclusión)

$x = 1$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x+1} = ½$ (0,5p)

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x+1} = 1/2$ (0,5p)

Por lo tanto $\lim_{x\to 1} f(x)$=1/2 y **NO** hay una asíntota vertical en $x = 1$. (1p conclusión)

Análisis de Asíntotas Horizontales:

$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to \infty} \frac{(x-1)/x^2}{(x^2-1)/x^2} = \lim_{x\to \infty} \frac{1/x-1/x^2}{1-1/x^2} = \frac{0-0}{1-0} = 0$ (1,5p)

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{(x-1)/x^2}{(x^2-1)/x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1/x-1/x^2}{1-1/x^2} = \frac{0-0}{1-0} = 0$ (1,5p)

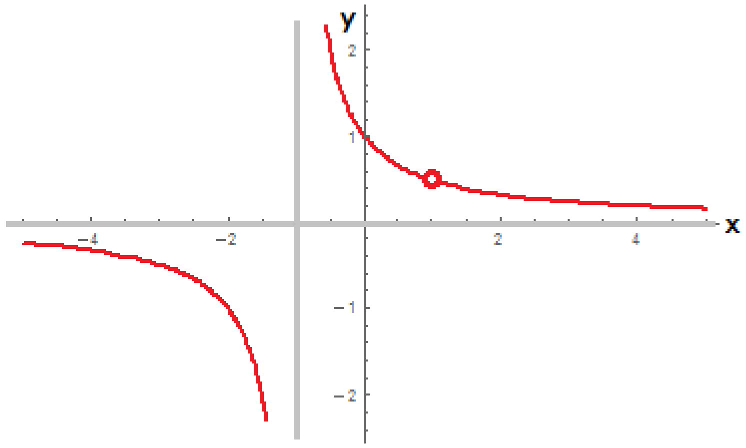
Por lo tanto la función tiene una **ASÍNTOTA HORIZONTAL** de ecuación $\boldsymbol{y = 0}$. (1p ecuación)

Análisis de Asíntotas Oblicuas: (4p)

Observando los límites anteriores notamos que no se cumple que $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ por lo que no hay asíntotas oblicuas. Otra forma de justificarlo es notar que la función es racional y que el polinomio numerador no posee un orden superior en uno que el orden del polinomio denominador como se requiere para tener una asíntota oblicua en el caso de funciones racionales. En este caso el polinomio numerador es de orden 1 y el denominador de orden 2.

d. Graficar la función, empleando la información encontrada previamente. **(5p)**

ASIGNATURA	Elementos de Cálculo I	AÑO	2019	TEMA	2	Nº HOJAS	
APELLIDO Y NOMBRE				LEGAJO/DNI			



(1p por asíntota vertical) (1p por asíntota horizontal) (1p hueco en x=1) (1p intersecciones)(1p trazado correcto de la forma de la función)

e. Empleando la gráfica halle el Rango de la función. **(2p)**

Im[f]=R-{0;1/2} o Im[f]= (-∞,0)U(0,1/2)U(1/2,∞) (2p si está correcto, 1p si le falta tener en cuenta el hueco en y=1/2, 0p en otro caso)

f. OPTATIVO (este ejercicio da **PUNTOS EXTRA!!!**) Empleando la gráfica determine para qué valores de x la función presenta discontinuidades. Clasifique las mismas en evitables y no evitables. Si encuentra alguna discontinuidad evitable redefina la función de forma tal que se resuelva la discontinuidad. **(5p EXTRA)**

$x = -1$ discontinuidad no evitable

1) f(-1) no existe
2) $\lim_{x \to -1} f(x)$ no existe

(1p por hallar la discontinuidad) (1p por decir que es no evitable)

$x = 1$ discontinuidad evitable

1) f(1) no existe
2) $\lim_{x \to 1} f(x)$ = 1/2

Redefino la función:

$$g(x) = \frac{1}{x+1}$$

Otra forma es:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & si\ x = 1 \end{cases}$$

(1p por hallar la discontinuidad) (1p por decir que es evitable) (1p por redefinirla correctamente)