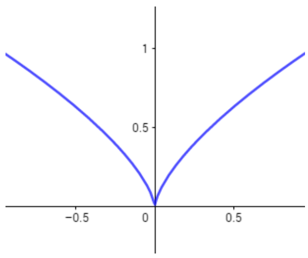
UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO	RESOLUCIÓN SEGUNDO PARCIAL			FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
ASIGNATURA	Cálculo I	**AÑO**	2018	**TEMA** 1

1. Indique Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. **Justifique las respuestas falsas mediante contraejemplo o respuesta correcta**. Se considera el puntaje sólo si la respuesta está debidamente justificada.

Enunciado	V	F
Un punto crítico de una función f es un número $x = c$ en el dominio de f tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.	X	
Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f\ (c)$ y un valor minimo absoluto $f\ (d\ )$ en algunos números c y d en (a, b).		X
Si f tiene un valor mínimo absoluto en $x = c$, entonces $f'(c) = 0$.		X
Existe una función f continua en $[1,3]$ tal que $f(1) = -2$, $f(3) = 0$ y $f'(x) > 1$ para toda $x\ \in\ (1,3)$.		X
Si $f''(2) = 0$, entonces $(2, f(2))$ es un punto de inflexión de la curva $y = f(x)$.		X
Sea f derivable en I, si $f'(x)$ es creciente en I entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo.		X

Respuestas **(se considera puntaje si se justifican las respuestas falsas adecuadamente)**

a. **VERDADERO.** La definición de punto crítico es correcta y completa.
b. **FALSO.** Por teorema de valores extremos para funciones continuas en un intervalo cerrado, el máximo o mínimo se puede alcanzar en los extremos del intervalo y no sólo en puntos interiores. Lo correcto sería “en algunos c y d en $[a, b]$”.
c. **FALSO.** Puede tener un valor mínimo en x=c sin que exista derivada. Ejemplo: $y = x^{2/3}$ tiene un mínimo en $x = 0$ pero no hay derivada allí dado que las derivadas laterales tienden a $-\infty$.

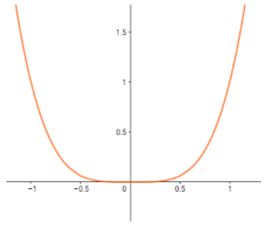


d. **FALSO**. Por Teorema del valor medio de Lagrange, dado que f es continua en $[1,3]$ y derivable en $(1,3)$, y $f(1) = -2$, $f(3) = 0$, se tiene que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{0 - (-2)}{2} = 1$$

Por lo tanto, al menos hay un valor c para ese intervalo abierto en que f' no es mayor que 1.

e. **FALSO.** La condición $f''(x) = 0$ es necesaria pero no suficiente, dado que puede ocurrir que la derivada segunda sea cero pero no haber punto de inflexión allí. Ejemplo: $f(x) = x^4$, su segunda derivada es $f'(x) = 12x^2$. Si se iguala a cero se obtiene que para x=0 un posible punto de inflexión pero en realidad hay un mínimo.



f. **FALSO**. Si f' es creciente, la gráfica es cóncava hacia arriba y si f' es decreciente, la gráfica es cóncava hacia abajo.

2. Dada $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$ determine:

a. *Asíntotas*

Asíntota vertical: no tiene dado que no hay ningún valor para el cual el denominador se anule, por lo tanto la función es continua en todo su dominio.

Asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+2x+1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+2/x+1/x^2}{1+1/x^2} = 1$$

Asíntota oblicua: no posee dado que el grado del polinomio del numerador y del denominador son iguales y no difieren en una unidad.

b. *Puntos críticos e intervalos de crecimiento y decrecimiento*

$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{2(x+1)(x^2+1)-(x+1)^2.2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x+1)(x^2+1-x^2-x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x+1)(1-x)}{(x^2+1)^2} = 0$$

$2(x+1)(1-x) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = -1 \; y \; x_2 = 1}$ **Puntos críticos**

Intervalo	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
Evaluación f'	$f'(-2) = -6/25$	$f'(0) = +2$	$f'(2) = -6/25$
Signo f'	-	+	-
Comportamiento de f	Decrece	Crece	Decrece

Intervalo de crecimiento: $(\boldsymbol{-1,1})$
Intervalos de decrecimiento: $(-\infty,\boldsymbol{-1}), (\boldsymbol{1},\infty)$

c. *Extremos relativos y absolutos:*

$f(-1) = \frac{(-1+1)^2}{(-1)^2+1} = 0$

Mínimo absoluto y relativo (es el menor valor que toma f en el intervalo, y hacia la izquierda de -1 decrece y hacia la derecha crece)

$f(1) = \frac{(1+1)^2}{(1)^2+1} = 2$

Máximo absoluto y relativo (es el valor más grande que toma f en el intervalo, y hacia la izquierda de 1 crece y hacia la derecha decrece)

d. *Intervalos de concavidad y puntos de inflexión*

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-4x(x^2+1)^2 - 2(1-x^2)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-4x(x^2+1)^2 - 8x(1-x^2)(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

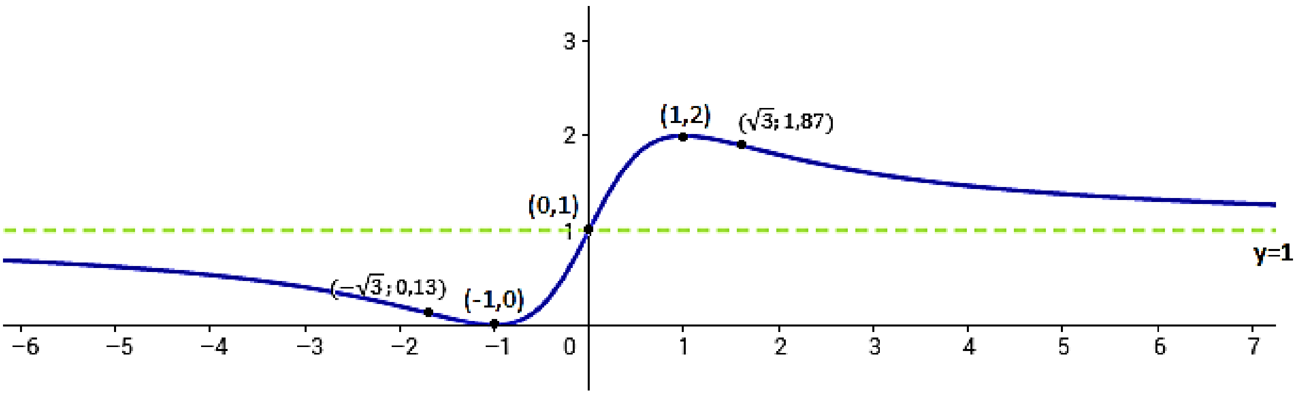
$$= \frac{-4x(x^2+1)[x^2+1+2(1-x^2)]}{(x^2+1)^4} = \frac{-4x(-x^2+3)}{(x^2+1)^3}$$

$f''(x) = -4x(-x^2+3) = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x_1 = -\sqrt{3}; x_2 = 0; x_2 = \sqrt{3}}$ **Puntos de inflexión**

Intervalo	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},0)$	$(0,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},\infty)$
Evaluación f''	$f''(-2) = -8/125$	$f''(-1) = 1$	$f''(1) = -1$	$f''(2) = 8/125$
Signo f''	-	+	-	+
Comportamiento de f	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

Cóncava hacia arriba: $(-\sqrt{3},0), (\sqrt{3},\infty)$
Cóncava hacia abajo: $(-\infty,-\sqrt{3}), (0,\sqrt{3})$

e. *Emplee la información de los incisos a) al c) para bosquejar la gráfica de f*



3. Calcule la derivada de: $y = [sen(x^2-2x)]^{\frac{1}{x-1}}$ (exprese el resultado en función de x)

$y = [sen(x^2-2x)]^{\frac{1}{x-1}}$ Aplique logaritmo natural a ambos miembros.

$lny = \frac{1}{x-1}\, ln[sen(x^2-2x)]$ Derive miembro a miembro, aplicando regla de la cadena y derivación implícita.

$$\frac{1}{y}y' = -\frac{1}{(x-1)^2}\, ln[sen(x^2-2x)] + \frac{1}{x-1}\frac{1}{sen(x^2-2x)}cos(x^2-2x)\,(2x-2)$$

Opere algebraicamente y agrupe factores convenientemente.

$\frac{1}{y}y' = -\frac{ln[sen(x^2-2x)]}{(x-1)^2} + 2\,cot(x^2-2x)$ Despeje y'.

$$\boldsymbol{y' = \left\{-\frac{ln[sen(x^2-2x)]}{(x-1)^2} + 2\,cot(x^2-2x)\right\}[sen(x^2-2x)]^{\frac{1}{x-1}}}$$

4. Dadas las curvas $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 = 3y^2$, demuestre que las mismas son ortogonales en al menos un punto.

Para demostrar si son ortogonales es necesario verificar primero si se interceptan en algún punto:

Se despeja de una de las ecuaciones una de las variables: $y^2 = \frac{x^2}{3}$ y se reemplaza en la otra:

$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x^2 + \frac{x^2}{3} = 4 \Rightarrow \frac{4}{3}x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$ e $y = \pm 1$

Las curvas se interceptan en $P_1(\sqrt{3}, 1)$; $P_2(\sqrt{3}, -1)$; $P_3(-\sqrt{3}, 1)$; $P_4(-\sqrt{3}, -1)$

Ahora se verifica si son ortogonales calculando sus pendientes en esos puntos, por lo tanto, se debe derivar implícitamente:

$x^2 + y^2 = 4$

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-2x}{2y} = -\boldsymbol{\frac{x}{y}}$$

$x^2 = 3y^2$

$$2x = 6yy' \Rightarrow y' = \frac{2x}{6y} = \boldsymbol{\frac{x}{3y}}$$

Ahora se evalúan ambas derivadas en los distintos puntos: **(Basta con que se demuestre que son ortogonales en al menos uno de los puntos).**

- En $P_1(\sqrt{3}, 1)$: $y'|_{(\sqrt{3},1)} = m_1 = -\frac{\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$ y $y'|_{(\sqrt{3},1)} = m_2 = \frac{\sqrt{3}}{3.1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
  Como $m_1 * m_2 = -\sqrt{3} * \frac{\sqrt{3}}{3} = -1$ $\Rightarrow$ son perpendiculares u ortogonales

- En $P_2(\sqrt{3}, -1)$: $y'|_{(\sqrt{3},-1)} = m_1 = -\frac{\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$ y $y'|_{(\sqrt{3},-1)} = m_2 = \frac{\sqrt{3}}{3.(-1)} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
  Como $m_1 * m_2 = \sqrt{3} * \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -1$ $\Rightarrow$ son perpendiculares u ortogonales

- En $P_3(-\sqrt{3}, 1)$: $y'|_{(-\sqrt{3},1)} = m_1 = -\frac{-\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ y $y'|_{(-\sqrt{3},1)} = m_2 = \frac{-\sqrt{3}}{3.1} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
  Como $m_1 * m_2 = \sqrt{3} * \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -1$ $\Rightarrow$ son perpendiculares u ortogonales

- En $P_3(-\sqrt{3}, -1)$: $y'|_{(-\sqrt{3},-1)} = m_1 = -\frac{-\sqrt{3}}{(-1)} = -\sqrt{3}$ y $y'|_{(-\sqrt{3},-1)} = m_2 = \frac{-\sqrt{3}}{3.(-1)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
  Como $m_1 * m_2 = -\sqrt{3} * \frac{\sqrt{3}}{3} = -1$ $\Rightarrow$ son perpendiculares u ortogonales

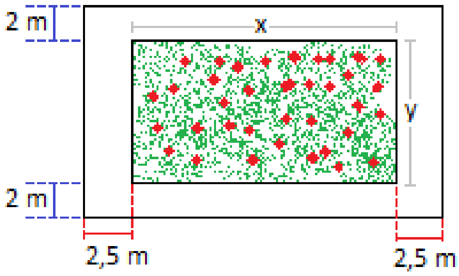
5. Un granjero tiene un campo de $180\ m^2$ y desea cultivar frutillas. ¿Qué dimensiones darán la mayor área cultivable si debe dejar callejones de $2{,}5\ m$ de ancho hacia el Oeste y Este, y callejones de $2\ m$ hacia el Norte y Sur de dicho campo para poder ingresar. (*Verifique el resultado empleando el criterio correspondiente*).

a. Identifique variables:

x: medida del largo de la superficie a cultivar

y: medida del ancho de la superficie a cultivar

b. Dibuje un esquema del problema:



c. Plantee ecuaciones que modelan el problema:

$$\begin{cases} A = x.y & (1) \\ S = (x+5)(y+4) & (2) \end{cases}$$

d. Resuelva:

(1) es la ecuación a optimizar, en este caso, a maximizar. (2) es la ecuación que contiene dato por lo que se despejará de ella a una de las variables:

Se despeja de (2) a y: $y = \frac{S}{x+5} - 4 = \frac{180}{x+5} - 4$

Se reemplaza en (1):

$$A(x,y) = x.y = x\left(\frac{180}{x+5} - 4\right) = \frac{180x}{x+5} - 4x$$

$$A(x) = \frac{180x}{x+5} - 4x$$

Se deriva la ecuación obtenida respecto de x y se iguala a cero para optimizar:

$$\frac{dA(x)}{dx} = A'(x) = \frac{180(x+5) - 180x}{(x+5)^2} - 4 = \frac{180x + 900 - 180x}{(x+5)^2} - 4 = 0$$

$$\frac{180x + 900 - 180x}{(x+5)^2} = 4 \Rightarrow 225 = x^2 + 10x + 25 \Rightarrow 0 = x^2 + 10x - 200 \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = -20\ y\ x_2 = 10}$$

Dado que se trata de una longitud se toma sólo el valor positivo.

Se reemplaza el valor obtenido para encontrar y: $y = \frac{180}{x+5} - 4 = \frac{180}{10+5} - 4 = 8 \Rightarrow \boldsymbol{y = 8}$

Las dimensiones que darán la mayor área cultivable serán 10 m de largo por 8 m de ancho.

e. Verifique por el criterio de la 2da derivada:

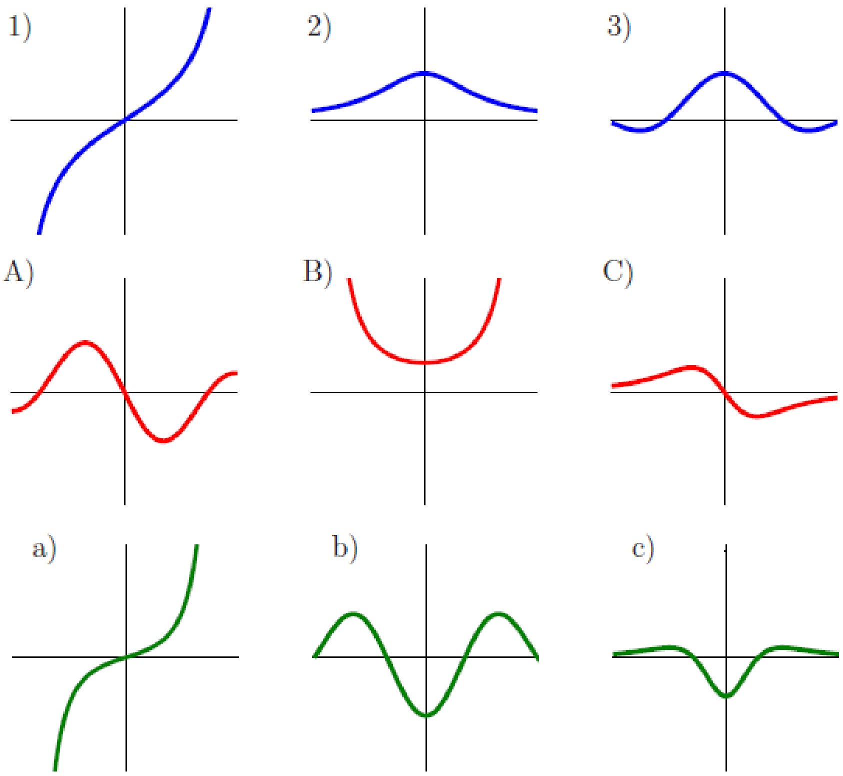
$$A'(x) = \frac{900}{(x+5)^2}$$

$$A''(x) = -\frac{1800}{(x+5)^3}$$

La derivada 2º dará negativa para cualquier valor de x, dado que este siempre será positivo. Por lo tanto, si $f''(x) < 0$ para $x = c$ existe un máximo en $x = c$.

6. Dadas las funciones f representadas en 1), 2), 3) , las derivadas primeras f' en A), B), C) y las derivadas segundas f'' en a), b), c) indique cómo se corresponden entre sí.

Función f	**1)**	**2)**	**3)**
1º Derivada f'	**B**	**C**	**A**
2º Derivada f''	**a)**	**c)**	**b)**



UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO	RESOLUCIÓN SEGUNDO PARCIAL		FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES		
ASIGNATURA	Cálculo I	**AÑO**	2018	**TEMA**	**2**

1. Indique Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. **Justifique las respuestas falsas mediante contraejemplo o respuesta correcta**. Se considera el puntaje sólo si la respuesta está debidamente justificada.

Enunciado	**V**	**F**
Un punto crítico de una función f es un número $x = c$ en el dominio de f tal que $f'(c) = 0$.		X
Si $f'(x) = 0$ y $f'''(x) < 0$ en $x = 4$ se puede asegurar que f tiene un máximo en $x = 4$.		X
Si f es continua en $[-1,1]$, derivable en $(-1,1)$ y $f(-1) = f(1)$, entonces existe al menos un número c tal que $\|c\| < 1$ y $f'(c) = 0$.	X	
Un punto de inflexión P es un punto en el cual $f'(x) > 0$ hacia la derecha del mismo y $f'(x) < 0$ hacia la izquierda o viceversa.		X
Sea f derivable en I, si $f'(x)$ es creciente en I entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba.	X	
Si f tiene un valor máximo absoluto en $x = c$, entonces $f'(c) = 0$.		X

Respuestas (Se considera puntaje si se justifican las respuestas falsas adecuadamente)

a. **FALSO.** Un punto crítico de una función f es un número $x = c$ en el dominio de f tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

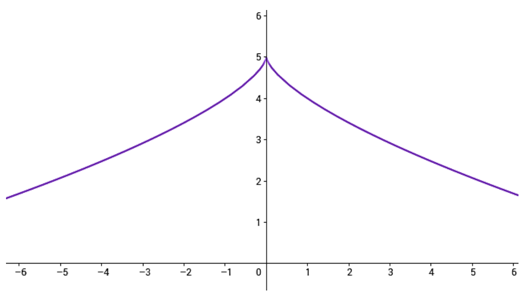
b. **FALSO.** El criterio de la derivada tercera sólo se utiliza para asegurar la existencia o no de un punto de inflexión. Si $f'(x) = 0$ y $f''(x) < 0$ en $x = 4$ se puede asegurar que f tiene un máximo en $x = 4$.

c. **VERDADERO.** Se cumplen todas las hipótesis Teorema de Rolle: f continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un número c tal que $c \in (a, b)$ y $f'(c) = 0$.

d. **FALSO.** Un punto de inflexión P es un punto en el cual $f'(x) > 0$ hacia la derecha y hacia la izquierda del mismo, ó bien $f'(x) < 0$ hacia la derecha y hacia la izquierda del mismo. En otras palabras $f'(x)$ es creciente hacia la derecha y hacia la izquierda del punto de inflexión o bien $f'(x)$ es decreciente hacia la izquierda y hacia la derecha.

e. **VERDADERO.** Si $f'(x)$ es creciente entonces $f''(x) > 0$ y la función es cóncava hacia arriba.

f. **FALSO.** Puede tener un valor máximo en x=c sin que exista derivada. Ejemplo: $y = -x^{\frac{2}{3}} + 5$ tiene un máximo en $x = 0$ pero no hay derivada allí dado que las derivadas laterales tienden a $+\infty$.



2. Dada $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ determine:

a. Asíntotas

Asíntota vertical: no tiene dado que no hay ningún valor para el cual el denominador se anule, por lo tanto la función es continua en todo su dominio.

Asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+1}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-2x+1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-2/x+1/x^2}{1+1/x^2} = 1$$

Asíntota oblicua: no posee dado que el grado del polinomio del numerador y del denominador son iguales y no difieren en una unidad.

b. Puntos críticos e intervalos de crecimiento y decrecimiento

$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x^2+1)-(x-1)^2.2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x-1)(x^2+1-x^2+x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x-1)(1+x)}{(x^2+1)^2} = 0$$

$2(x-1)(1+x) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = -1 \; y \; x_2 = 1}$ **Puntos críticos**

Intervalo	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
Evaluación f’	$f'(-2) = +6/25$	$f'(0) = -2$	$f'(2) = +6/25$
Signo f’	+	-	+
Comportamiento de f	Crece	Decrece	Crece

Intervalos de Crecimiento: $\boldsymbol{(-\infty,-1),(1,\infty)}$
Intervalo de decrecimiento: $\boldsymbol{(-1,1)}$

c. *Extremos relativos y absolutos:*

$f(-1) = \frac{(-1-1)^2}{(-1)^2+1} = 2$

Máximo absoluto y relativo (es el valor más grande que toma f en el intervalo, y hacia la izquierda de -1 crece y hacia la derecha decrece)

$f(1) = \frac{(1-1)^2}{(1)^2+1} = 0$

Mínimo absoluto y relativo (es el menor valor que toma f en el intervalo, y hacia la izquierda de 1 decrece y hacia la derecha crece)

d. Intervalos de concavidad y puntos de inflexión

$$f'(x) = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

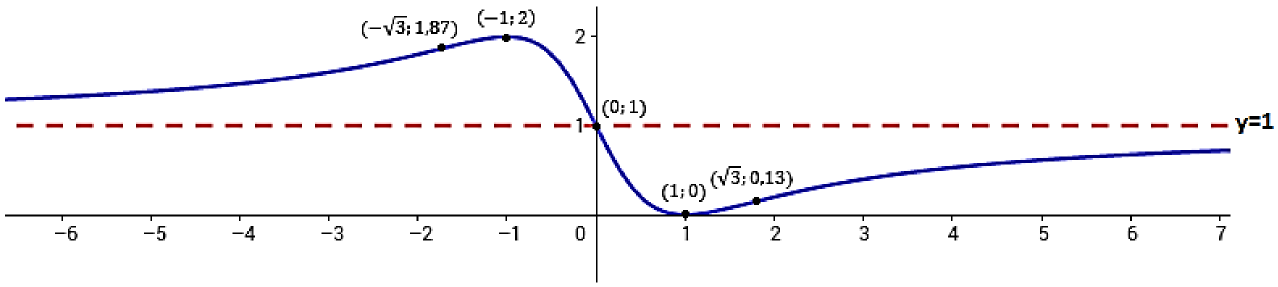
$$f''(x)=\frac{4x(x^2+1)^2-2(x^2-1)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4}=\frac{4x(x^2+1)^2-8x(x^2-1)(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$
$$=\frac{4x(x^2+1)[x^2+1-2(x^2-1)]}{(x^2+1)^4}=\frac{4x(-x^2+3)}{(x^2+1)^3}$$

$f''(x)=-4x(-x^2+3)=0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x_1=-\sqrt{3};x_2=0;x_2=\sqrt{3}}$ **Puntos de inflexión**

Intervalo	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},0)$	$(0,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},\infty)$
Evaluación f’’	$f''(-2)=6/25$	$f''(-1)=-1$	$f''(1)=1$	$f''(2)=6/25$
Signo f’’	+	-	+	-
Comportamiento de f	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo

Cóncava hacia arriba: $(-\infty,-\sqrt{3}),(0,\sqrt{3})$
Cóncava hacia abajo: $(-\sqrt{3},0),(\sqrt{3},\infty)$

e. *Emplee la información de los incisos a) al c) para bosquejar la gráfica de f*



3. Calcule la derivada de: $y=\left[cos\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\right]^{\frac{1}{x-1}}$ (exprese el resultado en función de x)

$y=\left[cos\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\right]^{\frac{1}{x-1}}$ Aplique logaritmo natural a ambos miembros.

$lny=\frac{1}{x-1}\,ln\left[cos\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\right]$ Derive miembro a miembro, aplicando regla de la cadena y derivación implícita.

$$\frac{1}{y}y'=-\frac{1}{(x-1)^2}\,ln\left[cos\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\right]+\frac{1}{x-1}\frac{1}{cos\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)}\left[-sen\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\right](x-1)$$

Opere algebraicamente y agrupe factores convenientemente.

$\frac{1}{y}y'=-\frac{ln\left[cos\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\right]}{(x-1)^2}-tan\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)$ Despeje y’.

$$\boldsymbol{y'=\left\{-\frac{ln\left[cos\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\right]}{(x-1)^2}-tan\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\right\}\left[cos\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\right]^{\frac{1}{x-1}}}$$

4. Dadas las curvas $x^2+y^2=8$ y $8x^2=y^2$, demuestre que las mismas son ortogonales en al menos un punto.

   Para demostrar si son ortogonales es necesario verificar primero si se interceptan en algún punto:
   Se despeja de una de las ecuaciones una de las variables: $y^2=8x^2$ y se reemplaza en la otra:
   $x^2+y^2=8 \Rightarrow x^2+8x^2=8 \Rightarrow 9x^2=8 \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{8}}{3}$ e $y=\pm\frac{8}{3}$
   Las curvas se interceptan en $P_1\left(\frac{\sqrt{8}}{3},\frac{8}{3}\right)$; $P_2\left(\frac{\sqrt{8}}{3},-\frac{8}{3}\right)$; $P_3\left(-\frac{\sqrt{8}}{3},\frac{8}{3}\right)$; $P_4\left(-\frac{\sqrt{8}}{3},-\frac{8}{3}\right)$
   Ahora se verifica si son ortogonales calculando sus pendientes en esos puntos, por lo tanto, se debe derivar implícitamente:
   $x^2+y^2=8$
   $2x+2yy'=0 \Rightarrow y'=\frac{-2x}{2y}=-\boldsymbol{\frac{x}{y}}$
   $8x^2=y^2$
   $16x=2yy' \Rightarrow y'=\frac{8x}{y}=\boldsymbol{\frac{8x}{y}}$
   Ahora se evalúan ambas derivadas en los distintos puntos: **Basta con que se demuestre que son ortogonales en al menos uno de los puntos.**

   - En $P_1\left(\frac{\sqrt{8}}{3},\frac{8}{3}\right)$: $y'\big|_{\left(\frac{\sqrt{8}}{3},\frac{8}{3}\right)}=m_1=-\frac{\frac{\sqrt{8}}{3}}{\frac{8}{3}}=-\frac{\sqrt{8}}{8}$ y $y'\big|_{\left(\frac{\sqrt{8}}{3},\frac{8}{3}\right)}=m_2=\frac{8\sqrt{8}/3}{8/3}=\sqrt{8}$
     Como $m_1*m_2=-\frac{\sqrt{8}}{8}*\sqrt{8}=-1$ $\Rightarrow$ Son perpendiculares u ortogonales

   - En $P_2\left(\frac{\sqrt{8}}{3},-\frac{8}{3}\right)$: $y'\big|_{\left(\frac{\sqrt{8}}{3},-\frac{8}{3}\right)}=m_1=-\frac{\frac{\sqrt{8}}{3}}{\left(-\frac{8}{3}\right)}=\frac{\sqrt{8}}{8}$ y $y'\big|_{\left(\frac{\sqrt{8}}{3},-\frac{8}{3}\right)}=m_2=\frac{8\sqrt{8}/3}{(-8/3)}=-\sqrt{8}$
     Como $m_1*m_2=\frac{\sqrt{8}}{8}*\left(-\sqrt{8}\right)=-1$ $\Rightarrow$ Son perpendiculares u ortogonales

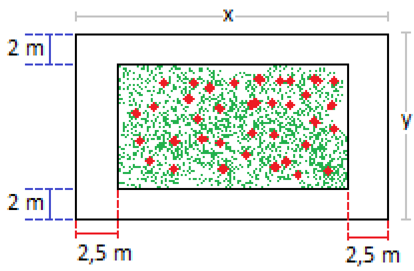
   - En $P_3\left(-\frac{\sqrt{8}}{3},\frac{8}{3}\right)$: $y'\big|_{\left(-\frac{\sqrt{8}}{3},\frac{8}{3}\right)}=m_1=-\frac{\left(-\frac{\sqrt{8}}{3}\right)}{\frac{8}{3}}=\frac{\sqrt{8}}{8}$ y $y'\big|_{\left(-\frac{\sqrt{8}}{3},\frac{8}{3}\right)}=m_2=\frac{-8\sqrt{8}/3}{8/3}=-\sqrt{8}$
     Como $m_1*m_2=\frac{\sqrt{8}}{8}*\left(-\sqrt{8}\right)=-1$ $\Rightarrow$ Son perpendiculares u ortogonales

   - En $P_3\left(-\frac{\sqrt{8}}{3},-\frac{8}{3}\right)$: $y'\big|_{\left(-\frac{\sqrt{8}}{3},-\frac{8}{3}\right)}=m_1=-\frac{\left(-\frac{\sqrt{8}}{3}\right)}{\left(-\frac{8}{3}\right)}=-\frac{\sqrt{8}}{8}$ y $y'\big|_{\left(-\frac{\sqrt{8}}{3},-\frac{8}{3}\right)}=m_2=\frac{-8\sqrt{8}/3}{(-8/3)}=\sqrt{8}$
     Como $m_1*m_2=-\frac{\sqrt{8}}{8}*\sqrt{8}=-1$ $\Rightarrow$ Son perpendiculares u ortogonales

5. Un granjero debe cultivar 180 m^2 de tierra con frutillas ¿Qué dimensiones debe tener el campo completo para minimizar la superficie si debe dejar callejones de 2,5 m de ancho hacia el Oeste y Este, y callejones de 2 m hacia el Norte y Sur para poder ingresar. (*Verifique el resultado empleando el criterio correspondiente*).

   a. Identifique variables:
   x: medida del largo del campo
   y: medida del ancho del campo

b. Dibuje un esquema del problema:



c. Plantee ecuaciones que modelan el problema:

$$\begin{cases} A_T = x.y & (1) \\ A_C = (x-5)(y-4) & (2) \end{cases}$$

d. Resuelva:

(1) es la ecuación a optimizar, en este caso, a minimizar. (2) es la ecuación que contiene dato por lo que se despejará de ella a una de las variables:

Se despeja de (2) a y: $y = \frac{A_C}{x-5} + 4 = \frac{180}{x-5} + 4$

Se reemplaza en (1):

$$A(x,y) = x.y = x\left(\frac{180}{x-5} + 4\right) = \frac{180x}{x-5} + 4x$$

$$A(x) = \frac{180x}{x-5} + 4x$$

Se deriva la ecuación obtenida respecto de x y se iguala a cero para optimizar:

$$\frac{dA(x)}{dx} = A'(x) = \frac{180(x-5) - 180x}{(x-5)^2} + 4 = \frac{180x - 900 - 180x}{(x-5)^2} + 4 = 0$$

$$\frac{180x - 900 - 180x}{(x+5)^2} = -4 \Rightarrow 225 = x^2 - 10x + 25 \Rightarrow 0 = x^2 - 10x - 200 \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = -10 \ y \ x_2 = 20}$$

Dado que se trata de una longitud se toma sólo el valor positivo.

Se reemplaza el valor obtenido para encontrar y: $y = \frac{180}{x-5} + 4 = \frac{180}{20-5} + 4 = 16 \Rightarrow \boldsymbol{y = 16}$

Las dimensiones que darán la menor área total serán 20 m de largo por 16 m de ancho.

e. Verifique por el criterio de la 2da derivada:

$$A_T'(x) = \frac{-900}{(x+5)^2}$$

$$A_T''(x) = +\frac{1800}{(x+5)^3}$$

La derivada 2º dará positiva para cualquier valor de x, dado que este siempre será positivo. Por lo tanto, si $f''(x) > 0$ para $x = c$ existe un mínimo en $x = c$.

6. Dadas las funciones f representadas en 1), 2), 3) , las derivadas primeras f' en A), B), C) y las derivadas segundas f'' en a), b), c) indique cómo se corresponden entre sí.

Función f	**1)**	**2)**	**3)**
1º Derivada f'	**B**	**C**	**A**
2º Derivada f''	**c)**	**b)**	**a)**