UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

RESOLUCIÓN SEGUNDO PARCIAL

FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Naturaleza - Ciencia - Humanismo

ASIGNATURA	Elementos de Cálculo I	AÑO	2018	TEMA	1

1. Indique Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. **Justifique las respuestas falsas mediante contraejemplo o respuesta correcta**. Se considera el puntaje sólo si la respuesta está debidamente justificada.

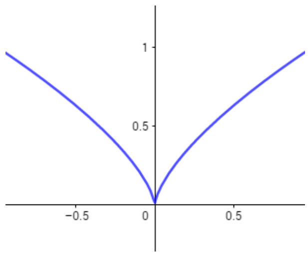
Enunciado	V	F
a. Un punto crítico de una función f es un número $x = c$ en el dominio de f tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.	X	
b. Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor minimo absoluto $f(d)$ en algunos números c y d en (a, b).		X
c. Si f tiene un valor mínimo absoluto en $x = c$, entonces $f'(c) = 0$.		X
d. Existe una función f continua en $[1,3]$ tal que $f(1) = -2$, $f(3) = 0$ y $f'(x) > 1$ para toda $x \in (1,3)$.		X
e. Si $f''(2) = 0$, entonces $(2, f(2))$ es un punto de inflexión de la curva $y = f(x)$.		X
f. Sea f derivable en I, si $f'(x)$ es creciente en I entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo.		X

Respuestas **(Se considera puntaje si se justifican las respuestas falsas adecuadamente)**

a. **VERDADERO.** La definición de punto crítico es correcta y completa.

b. **FALSO.** Por teorema de valores extremos para funciones continuas en un intervalo cerrado, el máximo o mínimo se puede alcanzar en los extremos del intervalo y no sólo en puntos interiores. Lo correcto sería "en algunos c y d en $[a, b]$".

c. **FALSO.** Puede tener un valor mínimo en x=c sin que exista derivada. Ejemplo: $y = x^{2/3}$ tiene un mínimo en $x = 0$ pero no hay derivada allí dado que las derivadas laterales tienden a $-\infty$.

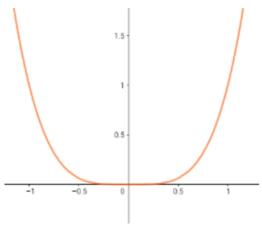


d. **FALSO**. Por Teorema del valor medio de Lagrange, dado que f es continua en $[1,3]$ y derivable en $(1,3)$, y $f(1) = -2$, $f(3) = 0$, se tiene que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{0 - (-2)}{2} = 1$$

Por lo tanto, al menos hay un valor c para ese intervalo abierto en que f' no es mayor que 1.

e. **FALSO.** La condición $f''(x) = 0$ es necesaria pero no suficiente, dado que puede ocurrir que la derivada segunda sea cero pero no haber punto de inflexión allí. Ejermplo: $f(x) = x^4$, su segunda derivada es $f'(x) = 12x^2$. Si se iguala a cero se obtiene que para x=0 un posible punto de inflexión pero en realidad hay un mínimo.



f. **FALSO**. Si f’ es creciente, la gráfica es cóncava hacia arriba y si f’ es decreciente, la gráfica es cóncava hacia abajo.

2. Dada $f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 1$ en $[-1,3]$ determine:

a. *Puntos críticos e intervalos de crecimiento y decrecimiento*

$f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 1$

$f'(x) = -6x^2 + 10x = 0 \Rightarrow \ -2x(3x-5) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = 0 \ y \ x_2 = 5/3}$ **Puntos críticos**

Intervalo	$(-1,0)$	$\left(0,\frac{5}{3}\right)$	$\left(\frac{5}{3},3\right)$
Evaluación f’	$f'(-1/2) = -6{,}5$	$f'(1) = +4$	$f'(2) = -4$
Signo f’	-	+	-
Comportamiento de f	Decrece	Crece	Decrece

Intervalo de crecimiento: $\boldsymbol{\left(0,\frac{5}{3}\right)}$

Intervalos de decrecimiento: $\boldsymbol{(-1,0), \left(\frac{5}{3},3\right)}$

b. *Extremos relativos y absolutos:*

$f(-1) = -2(-1)^3 + 5(-1)^2 - 1 = 6$ **Máximo absoluto** (está en el extremo y es el valor más grande que toma f en el intervalo)

$f(3) = -2(3)^3 + 5(3)^2 - 1 = -10$ **Mínimo absoluto** (está en el extremo y es el menor valor que toma f en el intervalo)

$f(0) = -2(0)^3 + 5(0)^2 - 1 = -1$ **Mínimo relativo** Hacia la izquierda de cero decrece y hacia la derecha crece, entonces existe un mínimo en $(0,-1)$

$f(5/3) = -2\left(\frac{5}{3}\right)^3 + 5\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1 = \frac{98}{27} \cong 3{,}6$ **Máximo relativo** Hacia la izquierda de 5/3 crece y hacia la derecha decrece, entonces existe un máximo en $\left(\frac{5}{3},\frac{98}{27}\right)$

c. *Intervalos de concavidad y puntos de inflexión*

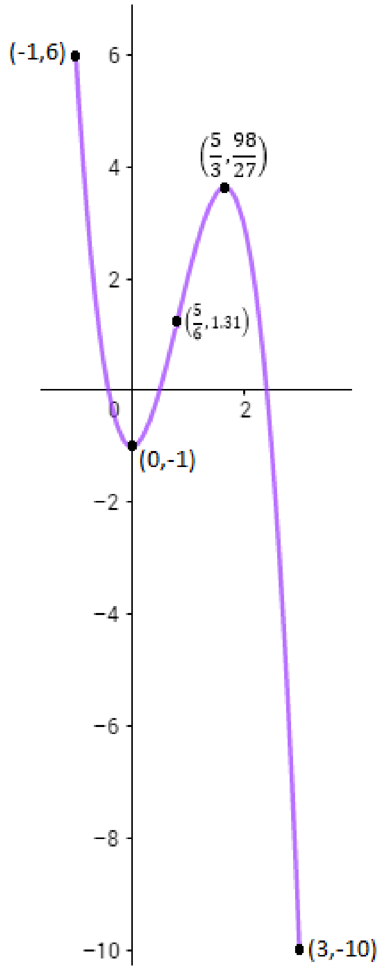
$f''(x) = -12x + 10 = 0 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{x = \frac{5}{6} = 0{,}8\widehat{3}}$ **Punto de inflexión**

Intervalo	$\left(-1,\frac{5}{6}\right)$	$\left(\frac{5}{6},3\right)$
Evaluación f’’	$f''(0) = 10$	$f''(2) = -14$
Signo f’’	+	-
Comportamiento de f	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo

Cóncava hacia arriba: $\left(-1, \frac{5}{6}\right)$

Cóncava hacia abajo: $\left(\frac{5}{6}, 3\right)$

d. *Emplee la información de los incisos a) al c) para bosquejar la gráfica de f*



3. Calcule la derivada de: $y = [sen(x)]^x$ (exprese el resultado en función de x)

$y = [sen(x)]^x$ Aplique logaritmo natural a ambos miembros.

$lny = x\ ln[sen(x)]$ Derive miembro a miembro, aplicando regla de la cadena y derivación implícita.

$\frac{1}{y}y' = 1.ln[sen(x)] + x\frac{1}{sen(x)}\cos(x)$ Opere algebraicamente y agrupe factores convenientemente.

$\frac{1}{y}y' = ln[sen(x)] + x\,cot(x)$ Despeje y'.

$\boldsymbol{y' = \{ln[sen(x)] + x\,cot(x)\}[sen(x)]^x}$

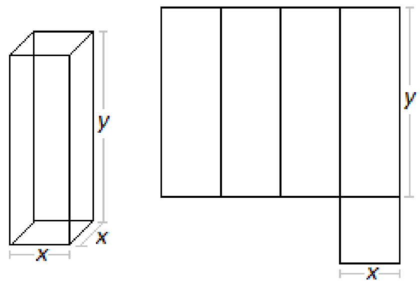
4. Si se dispone de 1200 cm^2 de material para hacer una caja con una base cuadrada y sin tapa; encuentre las dimensiones de la caja (medida del lado de la base y altura) que permitan obtener el mayor volumen posible. (*Verifique utilizando el criterio correspondiente*)

   a. Identifique variables:

   x: medida del lado de la base

   y: medida de la altura de la caja

   b. Dibuje un esquema del problema:



   c. Plantee ecuaciones que modelan el problema:

$$\begin{cases} V = x^2 . y & (1) \\ S = 4xy + x^2 & (2) \end{cases}$$

   d. Resuelva:

(1) es la ecuación a optimizar, en este caso, a maximizar. (2) es la ecuación que contiene dato por lo que se despejará de ella a una de las variables:

Se despeja de (2) a y: $y = \frac{S-x^2}{4x} = \frac{1200-x^2}{4x} = \frac{300}{x} - \frac{x}{4}$

Se reemplaza en (1):

$$V(x,y) = x^2y = x^2\left(\frac{300}{x} - \frac{x}{4}\right)$$

$$V(x) = 300x - \frac{x^3}{4}$$

Se deriva la ecuación obtenida respecto de x y se iguala a cero para optimizar:

$$\frac{dV(x)}{dx} = V'(x) = 300 - \frac{3}{4}x^2 = 0$$

$$-\frac{3}{4}x^2 = -300 \Rightarrow x^2 = 400 \Rightarrow \boldsymbol{x = 20}$$

Se reemplaza el valor obtenido para encontrar y: $y = \frac{300}{x} - \frac{x}{4} = \frac{300}{20} - \frac{20}{4} = 10 \Rightarrow \boldsymbol{y = 10}$

Las dimensiones de la caja que maximizan el volumen son 20 cm el lado de la base y 10 cm la altura.

Verifique por el criterio de la 2da derivada:

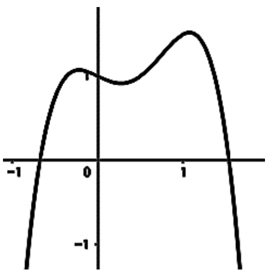
$V'(x) = 300 - \frac{3}{4}x^2$

$V''(x) = -\frac{3}{2}x$ La derivada 2º dará negativa para cualquier valor de x, dado que este siempre será positivo. Por lo tanto, si $f''(x) < 0$ para $x = c$ existe un máximo en $x = c$.

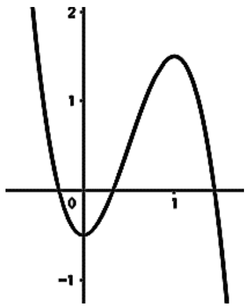
5. Dadas las funciones representadas en 1), 2), 3) indique cuál es f, f' y f''.

Función f	Derivada primera f'	Derivada segunda f''
3)	**1)**	**2)**

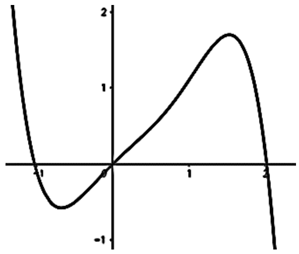
1)



2)



3)



UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

RESOLUCIÓN SEGUNDO PARCIAL

FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Naturaleza - Ciencia - Humanismo

ASIGNATURA	Elementos de Cálculo I	AÑO	2018	TEMA	2

1. Indique Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. **Justifique las respuestas falsas mediante contraejemplo o respuesta correcta**. Se considera el puntaje sólo si la respuesta está debidamente justificada.

Enunciado	V	F
a. Un punto crítico de una función f es un número $x = c$ en el dominio de f tal que $f'(c) = 0$.		X
b. Si $f'(x) = 0$ y $f'''(x) < 0$ en $x = 4$ se puede asegurar que f tiene un máximo en $x = 4$.		X
c. Si f es continua en $[-1,1]$, derivable en $(-1,1)$ y $f(-1) = f(1)$, entonces existe al menos un número c tal que $\lvert c\rvert < 1$ y $f'(c) = 0$.	X	
d. Un punto de inflexión P es un punto en el cual $f'(x) > 0$ hacia la derecha del mismo y $f'(x) < 0$ hacia la izquierda o viceversa.		X
e. Sea f derivable en I, si $f'(x)$ es creciente en I entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba.	X	
f. Si f tiene un valor máximo absoluto en $x = c$, entonces $f'(c) = 0$.		X

Respuestas (Se considera puntaje si se justifican las respuestas falsas adecuadamente)

a. **FALSO.** Un punto crítico de una función f es un número $x = c$ en el dominio de f tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

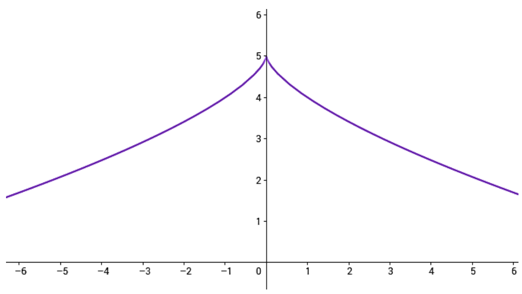
b. **FALSO.** El criterio de la derivada tercera sólo se utiliza para asegurar la existencia o no de un punto de inflexión. Si $f'(x) = 0$ y $f''(x) < 0$ en $x = 4$ se puede asegurar que f tiene un máximo en $x = 4$.

c. **VERDADERO.** Se cumplen todas las hipótesis Teorema de Rolle: f continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un número c tal que $c \in (a, b)$ y $f'(c) = 0$.

d. **FALSO.** Un punto de inflexión P es un punto en el cual $f'(x) > 0$ hacia la derecha y hacia la izquierda del mismo, ó bien $f'(x) < 0$ hacia la derecha y hacia la izquierda del mismo. En otras palabras $f'(x)$ es creciente hacia la derecha y hacia la izquierda del punto de inflexión o bien $f'(x)$ es decreciente hacia la izquierda y hacia la derecha.

e. **VERDADERO.** Si $f'(x)$ es creciente entonces $f''(x) > 0$ y la función es cóncava hacia arriba.

f. **FALSO.** Puede tener un valor máximo en x=c sin que exista derivada. Ejemplo: $y = -x^{\frac{2}{3}} + 5$ tiene un máximo en $x = 0$ pero no hay derivada allí dado que las derivadas laterales tienden a $+\infty$.



2. Dada $f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 2$ en $[-1,2]$ determine:

a. *Puntos críticos e intervalos de crecimiento y decrecimiento*

$$f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 2$$

$$f'(x) = 9x^2 - 10x = 0 \Rightarrow x(9x - 10) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = 0 \ y \ x_2 = 10/9} \text{ **Puntos críticos**}$$

Intervalo	$(-1,0)$	$\left(0,\frac{10}{9}\right)$	$\left(\frac{10}{9},2\right)$
Evaluación f’	$f'(-1/2) = 7{,}25$	$f'(1) = -1$	$f'(3/2) = 5{,}25$
Signo f’	+	-	+
Comportamiento de f	Crece	Decrece	Crece

Intervalos de crecimiento: $\boldsymbol{(-1,0),\left(\frac{10}{9},2\right)}$

Intervalo de decrecimiento: $\boldsymbol{\left(0,\frac{10}{9}\right)}$

b. *Extremos relativos y absolutos:*

$f(-1) = 3(-1)^3 - 5(-1)^2 - 2 = -10$ **Mínimo absoluto** (está en el extremo y es el menor valor que toma f en el intervalo)

$f(2) = 3(2)^3 - 5(2)^2 - 2 = 2$ **Máximo absoluto** (está en el extremo y es el valor más grande que toma f en el intervalo)

$f(0) = 3(0)^3 - 5(0)^2 - 2 = -2$ **Máximo relativo** Hacia la izquierda de 0 crece y hacia la derecha decrece, entonces existe un máximo en $(0,-2)$

$f(10/9) = 3\left(\frac{10}{9}\right)^3 - 5\left(\frac{10}{9}\right)^2 - 2 \cong -4{,}06$ **Mínimo relativo** Hacia la izquierda de $\frac{10}{9}$ decrece y hacia la derecha crece, entonces existe un mínimo en $\left(\frac{10}{9};-4{,}06\right)$

c. *Intervalos de concavidad y puntos de inflexión*

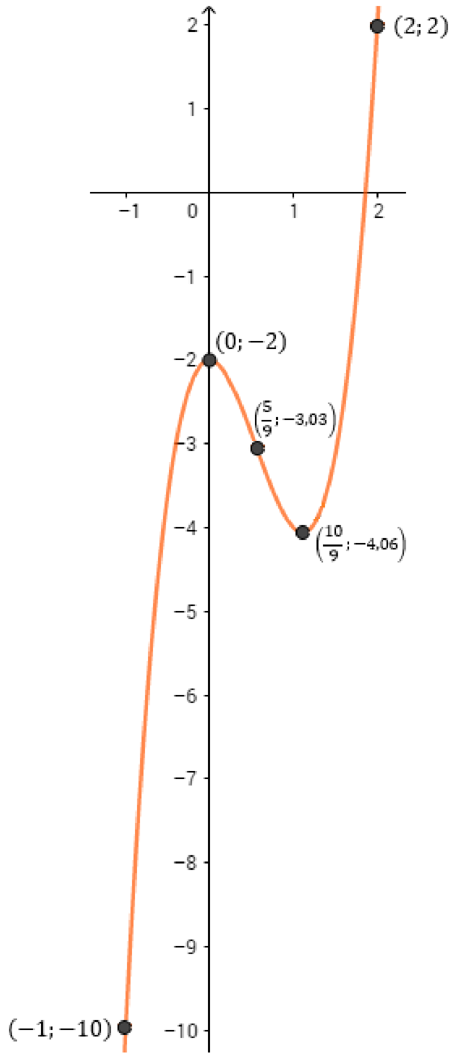
$f''(x) = 18x - 10 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{5}{9} = 0,\widehat{5}}$ **Punto de inflexión**

Intervalo	$\left(-1,\frac{5}{9}\right)$	$\left(\frac{5}{9},2\right)$
Evaluación f’’	$f''(0) = -10$	$f''(1) = +8$
Signo f’’	-	+
Comportamiento de f	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

Cóncava hacia arriba: $\boldsymbol{\left(\frac{5}{9},2\right)}$

Cóncava hacia abajo: $\boldsymbol{\left(-1,\frac{5}{9}\right)}$

d. *Emplee la información de los incisos a) al c) para bosquejar la gráfica de f*



3. Calcule la derivada de: $y = [cos(x)]^x$ (exprese el resultado en función de x)

$y = [cos(x)]^x$ Aplique logaritmo natural a ambos miembros.

$lny = x\ ln[cos(x)]$ Derive miembro a miembro, aplicando regla de la cadena y derivación implícita.

$\frac{1}{y}y' = 1.ln[cos(x)] + x\frac{1}{cos(x)}[-sen(x)]$ Opere algebraicamente y agrupe factores convenientemente.

$\frac{1}{y}y' = ln[cos(x)] - x\,tan(x)$ Despeje y'.

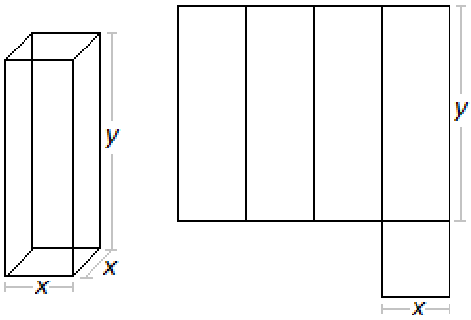
$\boldsymbol{y' = \{ln[cos(x)] - x\,tan(x)\}[cos(x)]^x}$

4. Una caja de base cuadrada, abierta en la parte superior, debe tener un volumen de 32000 cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja (medida del lado de la base y altura) que minimicen la cantidad de material que ha de utilizarse. (*Verifique utilizando el criterio correspondiente*)

a. Identifique variables:

x: medida del lado de la base
y: medida de la altura de la caja

b. Dibuje un esquema del problema:



c. Plantee ecuaciones que modelan el problema:

$$\begin{cases} V = x^2.y & (1) \\ S = 4xy + x^2 & (2) \end{cases}$$

d. Resuelva:

(2) es la ecuación a optimizar, en este caso, a minimizar. (1) es la ecuación que contiene dato por lo que se despejará de ella a una de las variables:

Se despeja de (1) a y: $y = \frac{V}{x^2} = \frac{32000}{x^2}$

Se reemplaza en (1):

$$S(x, y) = 4xy + x^2 = 4x\left(\frac{32000}{x^2}\right) + x^2$$

$$S(x) = \frac{128000}{x} + x^2$$

Se deriva la ecuación obtenida respecto de x y se iguala a cero para optimizar:

$$\frac{dS(x)}{dx} = S'(x) = -\frac{128000}{x^2} + 2x = 0$$

$$-\frac{128000}{x^2} = -2x \Rightarrow x^3 = 64000 \Rightarrow \boldsymbol{x = 40}$$

Se reemplaza el valor obtenido para encontrar y: $y = \frac{V}{x^2} = \frac{32000}{40^2} = 20 \Rightarrow \boldsymbol{y = 20}$

Las dimensiones de la caja que minimizan el volumen son 40 cm el lado de la base y 20 cm la altura.

e. Verifique por el criterio de la 2da derivada:

$$S'(x) = -\frac{128000}{x^2} + 2x$$

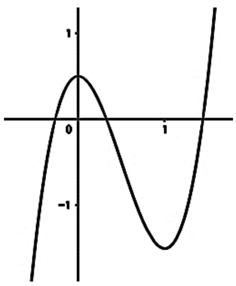
$$V''(x) = \frac{256000}{x^3} + 2$$

La derivada 2º dará positiva para cualquier valor de x, dado que este siempre será positivo. Por lo tanto, si $f''(x) > 0$ para $x = c$ existe un mínimo en $x = c$.

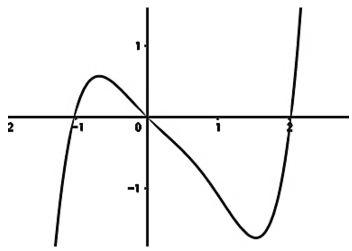
5. Dadas las funciones representadas en 1), 2), 3) indique cuál es f, f' y f''.

Función f	Derivada primera f'	Derivada segunda f''
2)	**3)**	**1)**

1)



2)



3)