ASIGNATURA	Cálculo I	**AÑO**	2019	**TEMA**	1	**FECHA**	07-10 al 11-10

	ACTIVIDADES	**Puntaje Total**
1.	Dada $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$ determine lo que se indica teniendo en cuenta el intervalo [-5;6].	**25 p**

a. Dominio de la función. **(1p)**

b. Puntos críticos e intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(5p)**

c. Extremos relativos y absolutos en el intervalo. **(5p)**

d. Intervalos de concavidad y puntos de inflexión. **(5p)**

e. Emplee la información de los incisos a) al c) para bosquejar la gráfica de $f(x)$. Indique en el gráfico cada punto de interés (máximos y mínimos, puntos de inflexión si los hay, etc.) **(5p)**

Nota: si sólo se bosqueja la gráfica sin el análisis previo se considerará 0p.

f. Imagen de la función observando el gráfico del inciso e. **(1p)**

g. Emplee la información de los incisos a) al c) para bosquejar la gráfica de $f'(x)$. **(3p)**

Resolución:

a) $Dom\ f: [-5;-2)\cup(-2;2)\cup(2;6]$ **1p**

b) Hallamos los puntos críticos. Para ello derivamos f.

$$f^{'}(x)=\frac{\left(3x^2\,.\,(x^2-4)\right)-(x^3\,.(2x-0))}{(x^2-4)^2}$$

$=\frac{(3x^4-12x^2-2x^4)}{(x^2-4)^2}$ **0.5p**

$=\frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2}$ **0.5p**

Hallamos los valores del dominio para los cuáles $f^{'}(x)=0$ o no está definida.

Notemos que para $x=2$ y $x=-2$ la derivada de f no está definida, pero cómo éstos valores no pertenecen al dominio de f, entonces no los consideramos. **0.5p**

Analicemos para que valores del dominio de f se cumple que $\frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2}=0$

Entonces:

$$\frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2}=0$$

$x^4-12x^2=0$

$x^2(x^2-12)=0$

$x=0\ \ ,\ \ x=-2\sqrt{3}\quad x=2\sqrt{3}$ **0,5p**

Luego los números críticos son: **1p**

$x=-2\sqrt{3}$

$x=0$

$x=2\sqrt{3}$

Ahora encontremos los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento.

Intervalo	$(-5;-2\sqrt{3})$	$(-2\sqrt{3};-2)$	$(-2;0)$	$(0;2)$	$(2;2\sqrt{3})$	$(2\sqrt{3};6)$
Signo de f'	+	-	-	-	-	+
Condición	creciente	decreciente	decreciente	decreciente	decreciente	creciente

Intervalos de crecimiento: $(-5;-2\sqrt{3})\cup(2\sqrt{3};6)$ **1p**

Intervalos de decrecimiento: $\left(-2\sqrt{3};-2\right)\cup(-2;0)\cup(0;2)\cup\left(2;2\sqrt{3}\right)$ **1p**

c) Extremos de la función en el intervalo [-5;6]

$f(-5) = -\frac{125}{21}$ no es nada. **1p**

$f(-2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$ es un máximo relativo. **1p**

$f(0) = 0$ **1p**

$f(2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$ es un mínimo relativo. **1p**

$f(6) = \frac{27}{4}$ no es nada. **1p**

d) Hallamos f''

$$f''(x) = \frac{(4x^3 - 24x)(x^2-4)^2 - (x^4 - 12x^2)\,2(x^2-4)(2x)}{(x^2-4)^4}$$

$$= \frac{(x^2-4)[4x^5 - 16x^3 - 24x^3 + 96x - 4x^5 + 48x^3]}{(x^2-4)^4} \quad \mathbf{0.5p}$$

$$= \frac{8x^3 + 96x}{(x^2-4)^3} = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3} \quad \mathbf{0,5p}$$

Notemos que para $x = 2$ y $x = -2$ la derivada segunda de f no está definida, pero cómo éstos valores no pertenecen al dominio de f, entonces no los consideramos. **0.5p**

Analicemos para que valores del dominio de f se cumple que $\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3} = 0$ **0.5p**

$$\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3} = 0$$

$$8x(x^2+12) = 0$$

$x = 0$

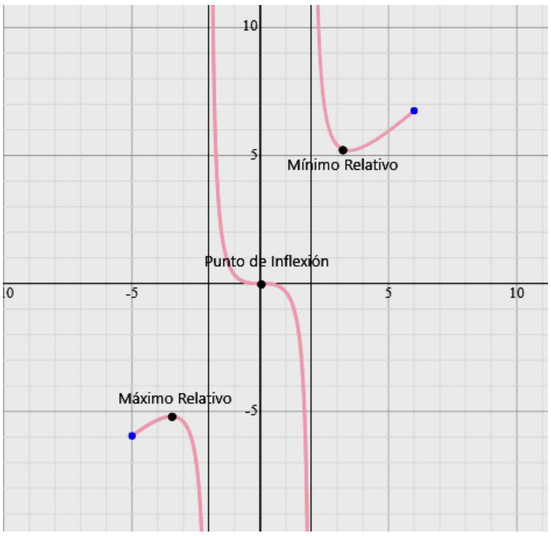
Luego f tiene un punto de inflexión y es $(0;0)$ **1p**

Ahora encontremos los intervalos de concavidad-

Intervalo	$(-5;-2)$	$(-2;0)$	$(0;2)$	$(2;6)$
Signo de f''	-	+	-	+
Condición	∩	∪	∩	∪

Intervalos de concavidad hacia arriba: $(-2;0) \cup (2;6)$ **1p**

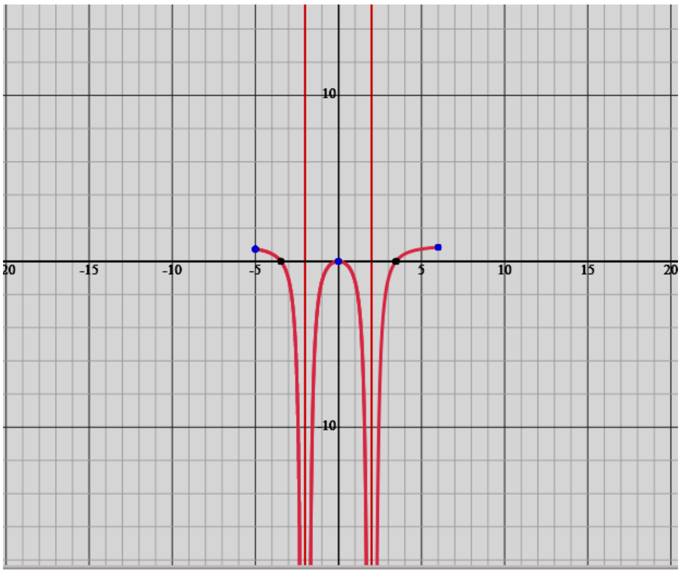
Intervalo de concavidad hacia abajo: $(-5;-2) \cup (0;2)$ **1p**

e) 

5p

f) $Imágen\ de\ f: (-\infty; \infty)$ **1p**

g)



3p

---

2. Calcule la derivada de: $y = \left(\frac{sen(3x)}{x^2+3}\right)^{\sqrt{2x}}$ (exprese el resultado en función de x, justifique cada paso e indique las reglas utilizadas) **10 p**

Resolución:

Se aplica el Método de la derivación logarítmica

- Aplico logaritmo natural a ambos lados de la igualdad

  $\ln(y) = ln\left(\frac{sen(3x)}{x^2+3}\right)^{\sqrt{2x}}$ **2p**

  Por propiedad de la potencia de logaritmos

  $\ln(y) = \sqrt{2x}\ \ ln\left[\frac{sen(3x)}{x^2+3}\right]$ **2p**

- Derivo ambos lados de la igualdad utilizando las propiedades de las derivadas que corresponda (pro suma, cociente y regla de la cadena)

  $\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2}(2x)^{-\frac{1}{2}}\,2\,ln\left[\frac{sen(3x)}{x^2+3}\right] + \sqrt{2x}\,\frac{(x^2+3)}{sen(3x)}\left[\frac{\cos(3x)3\,(x^2+3)-sen(3x)2x}{(x^2+3)^2}\right]$ **2p**

  Aplico distributiva en el segundo término y remplazo por identidades trigonométricas donde corresponda

  $\frac{1}{y}y' = (2x)^{-\frac{1}{2}}ln\left[\frac{sen(3x)}{x^2+3}\right] + 3\sqrt{2x}\cot(3x) - \frac{2x\sqrt{2x}}{x^2+3}$ **2p**

- Despejo y' y reemplazo por $y = \left[\frac{sen(3x)}{x^2+2}\right]^{\sqrt{2x}}$

  $y' = y\left[(2x)^{-\frac{1}{2}}ln\left[\frac{sen(3x)}{x^2+3}\right] + 3\sqrt{2x}\cot(3x) - \frac{2x\sqrt{2x}}{x^2+3}\right]$ **1p**

  $y' = \left[\frac{sen(3x)}{x^2+3}\right]^{\sqrt{2x}}\left[\frac{1}{\sqrt{2x}}ln\left[\frac{sen(3x)}{x^2+3}\right] + 3\sqrt{2x}\cot(3x) - \frac{2x\sqrt{2x}}{x^2+3}\right]$ **1p**

---

3. Dadas las curvas $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 = 3y^2$ demuestre que las mismas son ortogonales en al menos un punto. **10p**

Resolución

- Se determinan los puntos de intersección resolviendo un sistema con las ecuaciones de ambas curvas, para encontrar las coordenadas x e y que satisfacen ambas ecuaciones a la vez.

$$\begin{cases} y^2 = 4 - x^2 \\ x^2 = 3y^2 \end{cases}$$

Despejamos la variable y de cada una de las ecuaciones anteriores y luego las Igualamos para despejar la variable x.

$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{\frac{x^2}{3}}$ **1p**

Elevo todo al cuadrado

$4 - x^2 = \dfrac{x^2}{3}$

$12 - 3x^2 = x^2$

$\dfrac{12}{4} = x^2$

$x = \pm\sqrt{3}$ **2p**

$y = \pm 1$ **1p**

Los puntos de Intersección de las curvas son $P_1(\sqrt{3},1)$, $P_2(\sqrt{3},-1)$, $P_3(-\sqrt{3},1)$, $P_4(-\sqrt{3},-1)$ **2p**

Basta con indicar un punto de intersección.

- Obtenemos las pendientes de las rectas tangentes a cada curva en dichos puntos, y verificamos que cumplen la relación $m_1 * m_2 = -1$

Curva 1

$$y = \sqrt{4-x^2} = (4-x^2)^{1/2} \Longrightarrow \ y' = \tfrac{1}{2}(4-x^2)^{-1/2}(-2x) \Longrightarrow \ y' = -\tfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$ **1p**

Curva 2

$$y = \sqrt{\tfrac{x^2}{3}} = \left(\tfrac{x^2}{3}\right)^{1/2} \Longrightarrow \ y' = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{x^2}{3}\right)^{-1/2}\left(\tfrac{2x}{3}\right) \Longrightarrow \ y' = \tfrac{x}{\sqrt{3}\sqrt{x^2}}$$ **1p**

En los puntos $P_1(\sqrt{3},1)$ y $P_2(\sqrt{3},-1)$

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= -\tfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} = -\tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4-3}} = -\sqrt{3} \\ m_2 &= \tfrac{x}{\sqrt{3}\sqrt{x^2}} = \tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \tfrac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow m_1 * m_2 = -\sqrt{3}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = -1 \quad \mathit{SON\ ORTOGONALES}$$ **2p**

SÓLO SE PIDE PROBAR ORTOGONALIDAD EN UN PUNTO

En los puntos $P_3(-\sqrt{3},1)$ y $P_4(-\sqrt{3},-1)$

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= -\tfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} = -\tfrac{(-\sqrt{3})}{\sqrt{4-3}} = \sqrt{3} \\ m_2 &= \tfrac{x}{\sqrt{3}\sqrt{x^2}} = \tfrac{(-\sqrt{3})}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = -\tfrac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow m_1 * m_2 = \sqrt{3}\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = -1 \quad \mathit{SON\ ORTOGONALES}$$

4. Se dispone de \$26000 para cercar un terreno rectangular que colinda con una calle. La altura de la cerca será de 1.5 m. El lado del terreno cercado que colinda con la calle debe ser de ladrillos y los otros tres lados de malla. Si el m² construido de ladrillos cuesta \$600 y el de malla \$250, ¿cuáles son las dimensiones del terreno que maximizan el área encerrada? ¿Cuál es el área máxima? Verifique el resultado empleando el criterio correspondiente, aproxime su respuesta a dos decimales. **25p**

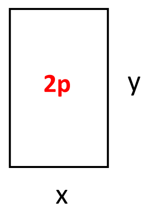
Resolución:

Altura de la cerca 1.5m

Costo total = costo malla + costo ladrillos = $250(2y + x)1.5 + 600\,x\,1.5 = 26000$ **2p**

$C(x, y) = 750y + 1274\,x = 26000$ **3p**

$y = \frac{26000-1274\,x}{750} \cong 34.7 - 1.7\,x$ **3p**



Área = $x.y \;\rightarrow\; A(x) = x\,(34.7 - 1.7\,x) = 34.7\,x - 1.7\,x^2$ **3p**

Hallamos $A´(x) = 34.7 - 3.4\,x$ **3p**

Igualamos a cero: $A´(x) = 34.7 - 3.4\,x = 0 \;\rightarrow\; x \cong 10{,}21 \wedge y \cong 17.34$ **4p**

Verificamos:

$A´´(x) = -3.4 < 0$ por lo tanto es un máximo **2p**

Luego las dimensiones del terreno que maximizan el área son $10{,}21\,m$ y $17.34m$

El área máxima es $A(\max) \cong 177.04\,m^2$ **3p**

5. Demuestre que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene una y solo una raíz. Justifique. Si utiliza algún teorema, enuncie sus hipótesis y tesis. **15p**

Resolución:

Sabemos que $f(x)$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Además, dado que $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = 1 > 0$, el teorema del valor intermedio nos indica que f cruza al eje x al menos una vez. **4p**

Si $f(x)$tuviera más de un cero, tendríamos dos valores $x = a$ y $x = b$ tales que $f(a) = f(b) = 0$, y por Teorema de Rolle, existiría un valor $x = c$tal que $f'(c) = 0$. **4p**

Como $f'(x) = 3x^2 + 1 \neq 0$, entonces no puede haber dos valores $x = a$ y $x = b$ tales que $f(a) = f(b)$**3p**

Teorema de Rolle: Hipótesis:$f(x)$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), $f(a) = f(b)$ **2p**

Tesis: Existe al menos un valor $x = c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$ **2p**

6. Resuelva el siguiente límite por regla de L´Hopital indicando las indeterminaciones que se produzcan. Justifique cada paso e indique las reglas utilizadas. **15p**

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln\,(1+x)}\right]$$

Resolución:

Haciendo sustitución directa obtenemos:

$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln\,(1+x)}\right] \rightarrow \infty - \infty$ Indeterminación **3p**

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\,(1+x)-x}{x\ln\,(1+x)} \rightarrow \frac{0}{0}$ Indeterminación **3p**

Aplicamos Regla de L´Hopital: $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{\ln\,(x+1)+x\,\frac{1}{1+x}} \rightarrow \frac{0}{0}$ Indeterminación **3p**

Nuevamente Regla de L´ Hopital: $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x}{1+x}}{\frac{(1+x)\,\ln(1+x)+x}{1+x}} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{(1+x)\,\ln(1+x)+x} \rightarrow \frac{0}{0}$ Indeterminación **3p**

Regla de L´Hopital una vez más.

$\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\ln(1+x)+(1+x)\,\frac{1}{(1+x)}+1} = \frac{-1}{\ln(1+0)+(1+0)\,\frac{1}{(1+0)}+1} = -\frac{1}{2}$ **3p**

PUNTAJE TOTAL: 100 P	PUNTAJE OBTENIDO	NOTA FINAL:

	ACTIVIDADES	Puntaje
1.		**25 p**

Dada $f(x) = -\frac{2x^3}{x^2-9}$ determine lo que se indica teniendo en cuenta el intervalo [-9;7].

a. Dominio de la función. **(1p)**

b. Puntos críticos e intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(5p)**

c. Extremos relativos y absolutos. **(5p)**

d. Intervalos de concavidad y puntos de inflexión. **(5p)**

e. Emplee la información de los incisos a) al c) para bosquejar la gráfica de $f(x)$. Indique en el gráfico cada punto de interés (máximos y mínimos, puntos de inflexión si los hay, etc.) **(5p)**

Nota: si sólo se bosqueja la gráfica sin el análisis previo se considerará 0p

f. Imagen de la función observando el gráfico del inciso e.

g. Emplee la información de los incisos a) al c) para bosquejar la gráfica de $f'(x)$. **(3p)**

Resolución:

a) $Dom\ f: [-9;-3) \cup (-3;3) \cup (3;7]$

b) Hallamos los puntos críticos. Para ello derivamos f.

$$f^{\prime}(x) = -[\frac{(6x^2 \,.\, (x^2-9)) - (2x^3 \,.\, (2x-0))}{(x^2-9)^2}]$$

$$= -\frac{(6x^4-54x^2-4x^4)}{(x^2-9)^2} \quad \textbf{0.5p}$$

$$= \frac{-2x^4+54x^2}{(x^2-9)^2} \quad \textbf{0.5p}$$

Hallamos los valores del dominio para los cuáles $f^{\prime}(x) = 0$ o no está definida.

Notemos que para $x = 3$ y $x = -3$ la derivada de f no está definida, pero cómo éstos valores no pertenecen al dominio de f, entonces no los consideramos. **0.5p**

Analicemos para que valores del dominio de f se cumple que $\frac{-2x^4+54x^2}{(x^2-9)^2} = 0$

Entonces:

$$\frac{-2x^4+54x^2}{(x^2-9)^2} = 0$$

$-2x^4 + 54x^2 = 0$

$-2x^2(x^2-27) = 0$

$x = 0 \ \ ,\ \ x = -3\sqrt{3} \quad x = 3\sqrt{3}$ **0,5p**

Luego los números críticos son: **1p**

$x = -3\sqrt{3}$

$x = 0$

$x = 3\sqrt{3}$

Ahora encontremos los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento.

Intervalo	$(-9;-3\sqrt{3})$	$(-3\sqrt{3};-3)$	$(-3;0)$	$(0;3)$	$(3;3\sqrt{3})$	$(3\sqrt{3};7)$
Signo de $f^{\prime}$	-	+	+	+	+	-
Condición	decreciente	creciente	creciente	creciente	creciente	decreciente

Intervalos de crecimiento: $(-3\sqrt{3};-3) \cup (-3;0) \cup (0;3) \cup (3;3\sqrt{3})$ **1p**

Intervalos de decrecimiento: $\left(-\infty;-3\sqrt{3}\right) \cup (3\sqrt{3};\infty)$ **1p**

c) Extremos de la función en el intervalo [-9;7]

$f(-9) = \frac{81}{4}$ no es nada. **1p**

$f(-3\sqrt{3}) = 9\sqrt{3}$ es un mínimo relativo. **1p**

$f(0) = 0$ **1p**

$f(3\sqrt{3}) = -9\sqrt{3}$ es un máximo relativo. **1p**

$f(7) = -\frac{343}{20}$ no es nada. **1p**

d) Hallamos f''

$$f''(x) = -[\frac{(8x^3 - 108x)(x^2-9)^2 - (2x^4 - 54x^2)\, 2(x^2-9)(2x)}{(x^2-9)^4}]$$

$$= -[\frac{(x^2-9)[8x^5 - 72x^3 - 108x^3 + 972x - 8x^5 + 216x^3]}{(x^2-9)^4}] \quad \mathbf{0.5p}$$

$$= \frac{-36x^3 - 972x}{(x^2-9)^3} = \frac{-36x(x^2+27)}{(x^2-9)^3} \quad \mathbf{0,5p}$$

Notemos que para $x = 2$ y $x = -2$ la derivada segunda de f no está definida, pero cómo éstos valores no pertenecen al dominio de f, entonces no los consideramos. **0.5p**

Analicemos para que valores del dominio de f se cumple que $\frac{-36x(x^2+27)}{(x^2-9)^3} = 0$ **0.5p**

$$\frac{-36x(x^2+27)}{(x^2-9)^3} = 0$$

$$-36x(x^2+27) = 0$$

$x = 0$

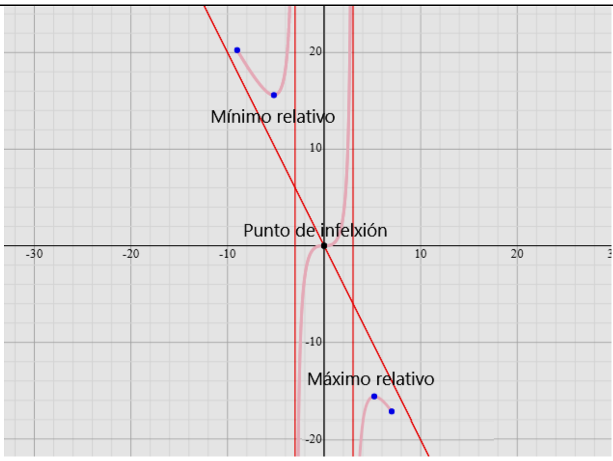
Luego f tiene un punto de inflexión y es $(0;0)$ **1p**

Ahora encontremos los intervalos de concavidad.

Intervalo	$(-9;-3)$	$(-3;0)$	$(0;3)$	$(3;7)$
Signo de f''	+	-	+	-
Condición	∪	∩	∪	∩

Intervalos de concavidad hacia arriba: $(-9;-3) \cup (0;3)$ **1p**

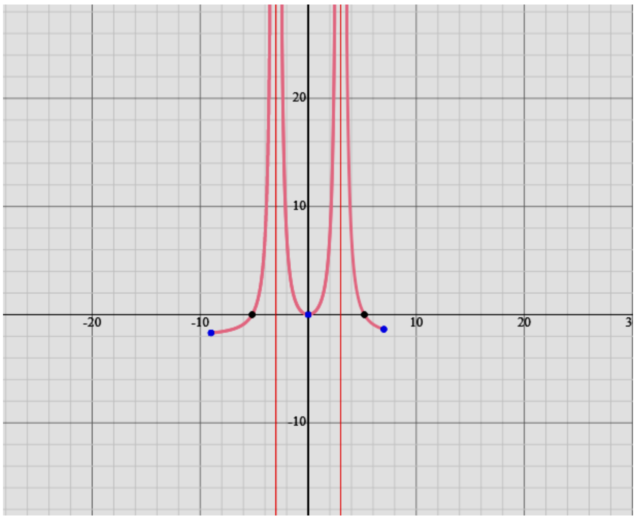
Intervalo de concavidad hacia abajo: $(-3;0) \cup (3;7)$ **1p**



e) **5p**

f) $Imagen\ de\ f: (-\infty; \infty)$ **1p**

g)



3p

2. Calcule la derivada de: $y = \sqrt[x^2]{\frac{cos(x)}{3+x^3}}$ (exprese el resultado en función de x, justifique cada paso e indique las reglas utilizadas) **10 p**

Resolución:

Se aplica el Método de la derivación logarítmica

- Aplico logarítmo natural a ambos lados de la igualdad

$$\ln(y) = ln\left(\frac{cos(x)}{3+x^3}\right)^{1/x^2}$$ **2p**

Se aplica el Método de la derivación logarítmica

- Aplico logarítmo natural a ambos lados de la igualdad
  Por propiedad de la potencia de logaritmos

$$\ln(y) = \frac{1}{x^2}\ ln\left(\frac{cos(x)}{3+x^3}\right)$$ **2p**

- Derivo ambos lados de la igualdad utilizando las propiedades de las derivadas que corresponda (pr suma, cociente y regla de la cadena)

$$\frac{1}{y}y' = -2x^{-3}ln\left(\frac{cos(x)}{3+x^3}\right) + x^{-2}\frac{(3+x^3)}{cos(x)}\left[\frac{-\text{sen}(x)(3+x^3)-cos(x)\ 3x^2}{(3+x^3)^2}\right]$$ **2p**

Aplico distributiva en el segundo término y remplazo por identidades trigonométricas donde corresponda

$$\frac{1}{y}y' = \frac{-2}{x^3}ln\left(\frac{cos(x)}{3+x^3}\right) + \left[\frac{-\text{sen}(x)}{x^2\cos(x)} - \frac{3x^2\cos(x)}{x^2\cos(x)(3+x^3)}\right] \quad \textbf{1p}$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{-2}{x^3}ln\left(\frac{cos(x)}{3+x^3}\right) - \frac{\tan(x)}{x^2} - \frac{3}{(3+x^3)} \quad \textbf{1p}$$

- Despejo y' y reemplazo por $y = \left(\frac{sen(3x)}{x^2+2}\right)^{\sqrt{2x}}$

$$y' = y\left[\frac{-2}{x^3}ln\left(\frac{cos(x)}{3+x^3}\right) - \frac{\tan(x)}{x^2} - \frac{3}{(3+x^3)}\right] \quad \textbf{1p}$$

$$y' = -\sqrt[x^2]{\frac{cos(x)}{3+x^3}}\left[\frac{2}{x^3}ln\left(\frac{cos(x)}{3+x^3}\right) + \frac{\tan(x)}{x^2} + \frac{3}{(3+x^3)}\right] \quad \textbf{1p}$$

3. Dadas las curvas $x = 1 - y^2$ y $x = \frac{1}{3}y^2$, demuestre que las mismas son ortogonales en al menos un punto. **10 p**

Resolución

- Se determinan los puntos de intersección resolviendo un sistema con las ecuaciones de ambas curvas, para encontrar las coordenadas x e y que satisfacen ambas ecuaciones a la vez.

$$\begin{cases} x = 1 - y^2 \\ x = \dfrac{1}{3}y^2 \end{cases}$$

Igualamos la variable x para despejar la variable y

$1 - y^2 = \frac{1}{3}y^2$ **1p**

$1 = \frac{4}{3}y^2$

$\frac{3}{4} = y^2$

$y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ **2p**

$x = \frac{1}{4}$ **1p**

Los puntos de intersección entre las curvas son $P_1\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $P_2\left(\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **2p**

- Obtenemos las pendientes de las rectas tangentes a cada curva en dichos puntos, y verificamos que cumplen la relación $m_1 * m_2 = -1$

Las pendientes se obtienen mediante derivación implícita.

Curva 1: $x = 1 - y^2 \Rightarrow 1 = -2yy' \Rightarrow y' = -\frac{1}{2y}$ **1p**

Curva 2: $x = \frac{1}{3}y^2 \Rightarrow 1 = \frac{2}{3}yy' \Rightarrow y' = \frac{3}{2y}$ **1p**

En el punto $P_1\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= -\frac{1}{2y} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ m_2 &= \frac{3}{2y} = \frac{3}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow m_1 * m_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} * \sqrt{3} = -1 \quad SON\ ORTOGONALES \quad \textbf{2p}$$

SÓLO SE PIDE PROBAR ORTOGONALIDAD EN UN PUNTO

En el punto $P_2\left(\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} m_1=-\frac{1}{2y}=-\frac{1}{(-\sqrt{3})}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ m_2=\frac{3}{2y}=\frac{3}{(-\sqrt{3})}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3} \end{array}\right\} \Longrightarrow m_1 * m_2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)*(-\sqrt{3})=-1 \quad SON\ ORTOGONALES$$

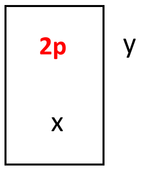
4. Un terreno se encuentra a un lado de la calle y se desea cercar una parte rectangular de 260 m², de modo que la cerca construida mida 1.5 m de alto. El lado del terreno cercado que colinda con la calle debe ser de ladrillos y los otros tres lados de malla. Si el m² construido de ladrillos cuesta \$500 y el de malla \$200, ¿cuáles son las dimensiones del terreno que minimizan el costo de su cerca y cuál es el costo mínimo? Verifique el resultado empleando el criterio correspondiente, aproxime su respuesta a dos decimales. **25 p**

Resolución:

Altura de la cerca 1.5m

Costo total = costo malla + costo ladrillos = $200(2y+x)1.5+500\,x\,1.5$ **2p**

$C(x,y)=600y+300x+750x=600y+1050x$ **3p**



Área = $x.y=260 \rightarrow \ y=\frac{260}{x}$ **3p**

Luego $C(x)=600\left(\frac{260}{x}\right)+1050x=\frac{156000}{x}+1050x$ **3p**

Hallamos $C'(x)=-\frac{156000}{x^2}+1050$ **3p**

Igualamos a cero: $C'(x)=-\frac{156000}{x^2}+1050=0 \quad \rightarrow \quad x\cong 12.19 \ \wedge \ y\cong 21.31$ **4p**

Verificamos:

$C''(x)=\frac{312000}{x^3}>0$ por lo tanto es un mínimo. **2p**

Luego las dimensiones del terreno que minimizan el costo son $12.19\,m \ \ y\ \ 21.31\,m$

El costo mínimo es $C(\min)\cong \$\,25596$ **3p**

5. Demuestre que la ecuación $x^5+10x+3=0$ tiene una y solo una raíz. Justifique. Si utiliza algún teorema, enuncie sus hipótesis y tesis. **15 p**

Resolución:

Sabemos que $f(x)$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Además, dado que $f(-1)=-8<0$ y $f(1)=14>0$, el teorema del valor intermedio nos indica que f cruza al eje x al menos una vez. **4p**

Si $f(x)$tuviera más de un cero, tendríamos dos valores $x=a$ y $x=b$ tales que $f(a)=f(b)=0$, y por Teorema de Rolle, existiría un valor $x=c$tal que $f'(c)=0$. **4p**

Como $f'(x)=5x^4+10\neq 0$, entonces no puede haber dos valores $x=a$ y $x=b$ tales que $f(a)=f(b)$ **3p**

Teorema de Rolle: Hipótesis:$f(x)$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), $f(a)=f(b)$ **2p**

Tesis: Existe al menos un valor $x=c\ \in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$ **2p**

6. Resuelva el siguiente límite por regla de L´Hopital indicando las indeterminaciones que se produzcan. Justifique cada paso e indique las reglas utilizadas. **15 p**

$$\lim_{x\to\infty}(x^2+2)^{\frac{1}{\ln(x)}}=$$

ASIGNATURA	Cálculo I	**AÑO**	2019	**TEMA**	2	**FECHA**	07-10 al 11-10

Resolución

$e^{\ln\left[\lim_{x\to\infty}(x^2+2)^{\frac{1}{\ln x}}\right]} = e^L$ **(1p)**

$L = \ln\left[\lim_{x\to\infty}(x^2+2)^{\frac{1}{\ln x}}\right]$ **(1p)**

$L = \lim_{x\to\infty}\left[\ln(x^2+2)^{\frac{1}{\ln x}}\right]$ **(1p)**

$L = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(x^2+2)\right] \to 0\,.\,\infty$ *indeterminación* **(3p)**

$L = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+2)}{\ln x} \to \frac{\infty}{\infty}$ *indeterminación* – L´H **(3p)**

$L = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{2x}{(x^2+2)}}{\frac{1}{x}}\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{x^2+2}\right) \to \frac{\infty}{\infty}$ *indeterminación* – L´H **(3p)**

$L = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x}{2x}\right) = \lim_{x\to\infty} 2 = 2$ **(1p)**

Luego $\lim_{x\to\infty}(x^2+2)^{\frac{1}{\ln x}} = e^2$ **(2p)**

PUNTAJE TOTAL: 100 P	**PUNTAJE OBTENIDO:**	**NOTA FINAL:**