UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO	TERCER PARCIAL			FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES Naturaleza - Ciencia - Humanismo			
ASIGNATURA	Cálculo I	**AÑO**	2019	**TEMA**	1	**Nº HOJAS**	
APELLIDO Y NOMBRE				**LEGAJO/DNI**		**FECHA**	

Resultados de aprendizaje: que el estudiante: 1. Conozca y aplique correctamente el Teorema Fundamental del Cálculo. 2. Reconozca las diferentes reglas de integración. 3. Resuelva correctamente una integral. 4. Interprete y calcule de forma correcta el área entre curvas, longitud de arco de una curva, volumen y/ó área de un sólido de revolución.

Instrucciones: coloque nombre y apellido **en cada hoja** que va a entregar. Lea atentamente cada consigna. Desarrolle detalladamente y con letra clara los ejercicios para obtener el puntaje completo. Debe usar **tinta para desarrollar los ejercicios**. No se permite corrector, tache si es necesario. Cuando finalice, indique el número de hojas empleadas en el encabezado (incluyendo las fotocopias). Debe obtener un **mínimo de 60 puntos para aprobar** el examen. Dispone de **2 horas** para su resolución ¡ÉXITO!

	ACTIVIDADES	**Puntaje Total**
1.	Determine la derivada de: $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\tan(x)} \frac{1}{1+t^2} dt$ teniendo en cuenta que $x \geq 0$. Desarrolle paso a paso y opere algebraicamente hasta obtener la mínima expresión. Enuncie el Teorema (hipótesis y tesis) que aplicó para obtenerla.	**10 p**

Para obtener la derivada se debe aplicar el TFCI:

Hipótesis: f(x) continua en $[a, b]$

Tesis: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), $F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$

Enunciar el teorema (3p)

En nuestro caso $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\tan(x)} \frac{1}{1+t^2} dt$. Puesto que los límites de integración son dos funciones de x, se aplican propiedades de integrales para llegar a la forma conveniente y se tiene en cuenta la regla de la cadena, por lo que:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt\right] = \frac{d}{dx}\left[-\int_a^{u(x)} f(t)dt + \int_a^{v(x)} f(t)dt\right] = -f[u(x)] * u'(x) + f[v(x)] * v'(x)$$

$F'(x) = -\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{1+tan^2(x)} \cdot sec^2(x)$ **(5p) procedimiento**

$\boldsymbol{F'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} + 1}$ **(2p) resultado**

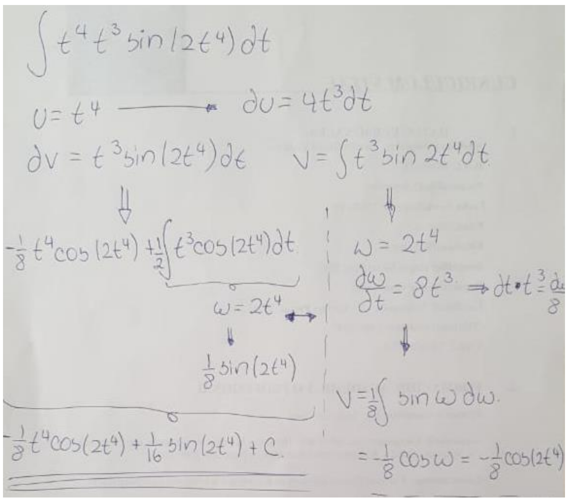
2.	Resuelva las siguientes integrales	**30 p** (15p c/u)

a. $\int t^7 sen(2t^4)dt$

b. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx$

Aplicar correctamente la técnica (sustitución /partes) (3p) c/u
Resolución de la Integral (10p) c/u
Resultado y conclusión (2p) c/u

a.


$\int t^4 t^3 \sin(2t^4) dt$

$u = t^4 \longrightarrow du = 4t^3 dt$

$dv = t^3 \sin(2t^4) dt \quad v = \int t^3 \sin 2t^4 dt$

$-\frac{1}{8} t^4 \cos(2t^4) + \frac{1}{2}\int t^3 \cos(2t^4) dt$

$\omega = 2t^4$

$\frac{1}{8}\sin(2t^4)$

$\omega = 2t^4$

$\frac{d\omega}{dt} = 8t^3 \Rightarrow dt \cdot t^3 = \frac{d\omega}{8}$

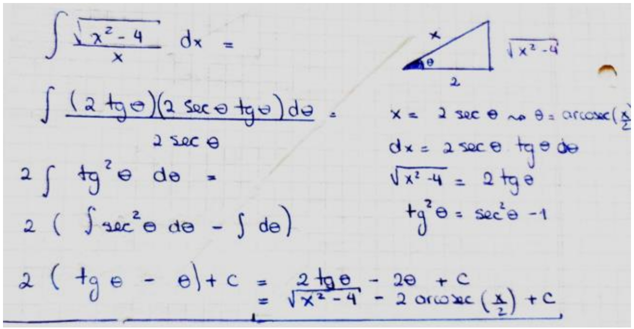
$V = \frac{1}{8}\int \sin\omega \, d\omega$

$= -\frac{1}{8}\cos\omega = -\frac{1}{8}\cos(2t^4)$

$-\frac{1}{8} t^4 \cos(2t^4) + \frac{1}{16}\sin(2t^4) + C$

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO	TERCER PARCIAL			FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES			
ASIGNATURA	Cálculo I	**AÑO**	2019	**TEMA**	**1**	**Nº HOJAS**	
APELLIDO Y NOMBRE				**LEGAJO/DNI**		**FECHA**	

b.



$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx =$$

$$\int \frac{(2\,tg\theta)(2\sec\theta\,tg\theta)\,d\theta}{2\sec\theta} =$$

$$2\int tg^2\theta\,d\theta =$$

$$2\left(\int \sec^2\theta\,d\theta - \int d\theta\right)$$

$$2(tg\,\theta - \theta) + C = 2\,tg\theta - 2\theta + C$$

$$= \sqrt{x^2-4} - 2\,\text{arcosec}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$x = 2\sec\theta \rightsquigarrow \theta = \text{arcosec}\left(\frac{x}{2}\right)$

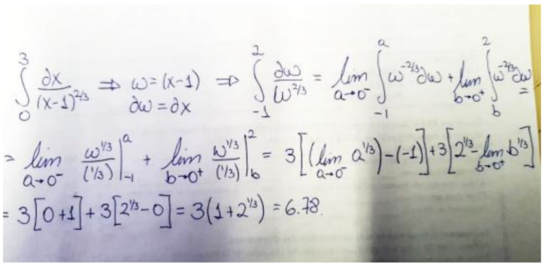
$dx = 2\sec\theta\,tg\theta\,d\theta$

$\sqrt{x^2-4} = 2\,tg\theta$

$tg^2\theta = \sec^2\theta - 1$

3. **Evalúe** la siguiente integral. Indique de qué tipo se trata y qué significa el resultado obtenido. **20p**

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$



$$\int_0^3 \frac{\partial x}{(x-1)^{2/3}} \Rightarrow \begin{matrix} \omega = (x-1) \\ \partial\omega = \partial x \end{matrix} \Rightarrow \int_{-1}^{2} \frac{\partial\omega}{\omega^{2/3}} = \lim_{a\to 0^-}\int_{-1}^{a} \omega^{-2/3}\partial\omega + \lim_{b\to 0^+}\int_{b}^{2}\omega^{-2/3}\partial\omega =$$

$$= \lim_{a\to 0^-} \left.\frac{\omega^{1/3}}{(1/3)}\right|_{-1}^{a} + \lim_{b\to 0^+}\left.\frac{\omega^{1/3}}{(1/3)}\right|_{b}^{2} = 3\left[\left(\lim_{a\to 0^-} a^{1/3}\right) - (-1)\right] + 3\left[2^{1/3} - \lim_{b\to 0^+} b^{1/3}\right]$$

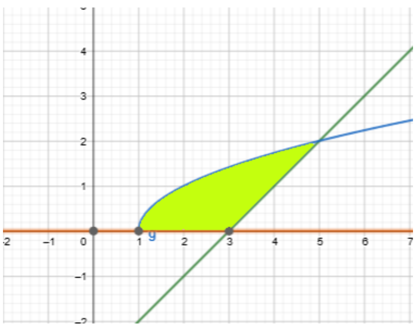
$$= 3[0+1] + 3[2^{1/3} - 0] = 3(1+2^{1/3}) = 6.78$$

Planteo de integral impropia con el límite (5p)

Resolución de la Integral (10p)

Resultado y conclusión (5p)

4. **Grafique** la región delimitada por $f(x) = x - 3,\ g(x) = \sqrt{x-1}$ e $y = 0$. Luego proponga las expresiones de cálculo del área: a) respecto al eje "x", b) respecto al eje "y". Seleccione la que ud. crea conveniente y **calcule el valor del área**. **15p**



a. Tomamos las rectas verticales $x = 1\ ,\ x = 3\ \ y\ \ x = 5$
   Tenemos que $f(x) \leq g(x)\ \forall\, x\ \in [1{,}5]$

$$A_x = \int_{x_1}^{x_2} [g(x) - f(x)]dx =$$

$$\int_1^3 \sqrt{x-1}\,dx + \int_3^5 [\sqrt{x-1} - (x-3)\,dx \quad (4p)$$

b. **b.** Tomamos las rectas verticales $y = 0\ \ y = 2$
   Tenemos que $h(y) \leq p(y)\ \forall\, y\ \in [0{,}2]$

$$A_y = \int_{y_1}^{y_2} [p(y) - h(y)]dy = \int_0^2 [y + 3 - y^2 - 1]dy \quad (4p)$$

Resolución de la integral elegida (4p)

$Area = \frac{10}{3}$ Resultado (3p)

5. Dada la región delimitada por las curvas $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y $g(x) = x^2$: **15p**

a. **Plantee** (no resuelva) una integral que permita calcular el volumen del sólido generado cuando dicha región gira en torno a la recta $x = -1$. Indique el método empleado y grafique **(10p)**

b. Obtenga una expresión para calcular la longitud de la curva **superior** que delimita la región. Recuerde que la derivada debe estar definida en el intervalo bajo análisis. **(5p)**

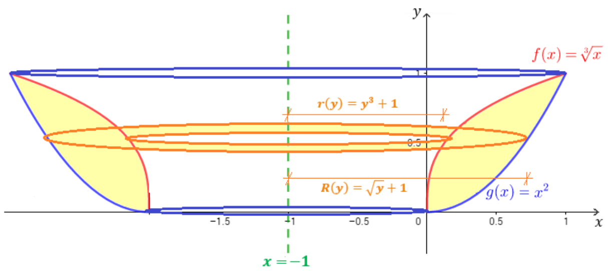
a. Se puede resolver por dos métodos.
   Método de arandelas. **Mencionar método (1p)**
   Radio mayor $R(y) = \sqrt{y} - (-1) = \sqrt{y} + 1$ **(2p)**

ASIGNATURA	Cálculo I	AÑO	2019	TEMA	1	Nº HOJAS	
APELLIDO Y NOMBRE				LEGAJO/DNI		FECHA	

Radio menor $r(y) = y^3 - (-1) = y^3 + 1$ **(2p)**

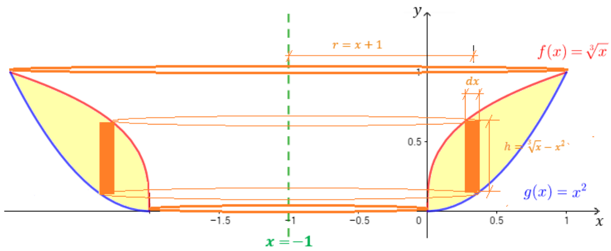
$$V = \int_{y_1}^{y_2} \pi[R^2(y) - r^2(y)]dy$$
$$V = \int_0^1 \boldsymbol{\pi}[(\sqrt{y}+1)^2 - (y^3+1)^2]\boldsymbol{dy} \quad \textbf{(3p)}$$

Gráfico (2p)



<u>Método por casquillos.</u> **Mencionar el método (1p)**
Altura del casquillo: $h(x) = f(x) - g(x) = \sqrt[3]{x} - x^2$ **(2p)**
Radio: $r(x) = x - (-1) = x + 1$ **(2p)**
$\boldsymbol{V} = \int_0^1 \boldsymbol{2\pi}(x+1)(\sqrt[3]{x} - x^2)\boldsymbol{dx}$ **(3p)**

Gráfico (2p)



b. Siendo $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ si se evalúa en $x = 0$ no está definida por lo tanto se debe plantear la longitud de curva respecto a y: $x = y^3 \rightarrow x' = 3y^2$. Sea $g(y) = y^3 \rightarrow g'(y) = 3y^2$ **(1p)**

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(x)]^2}dy = \int_0^1 \sqrt{1 + 9y^4}\,dy \quad \textbf{Extremos (2p)} \quad \textbf{Integral (2p)}$$

6. Es posible modelar el voltaje de la instalación eléctrica de una casa común con la función seno: **10p**

$$V(t) = V_{max}sen\,(120\pi t)$$

Que expresa el voltaje V en volts como una función del tiempo t en segundos, en dónde V_{max} es una constante positiva que indica el voltaje pico o máximo. Determine cuál es el valor promedio en medio ciclo de $t = 0$ s a $t = 1/120\ s$.
Aproxime su respuesta a un decimal.

$$V_{prom} = \frac{1}{\frac{1}{120} - 0}\int_0^{1/120} V_{max}sen(120\pi t)dt \quad \textbf{(3p)}$$

$$V_{prom} = 120V_{max}\left[-\frac{1}{120\pi}\cos(120\pi t)\right]_0^{\frac{1}{120}} = -\frac{V_{max}}{\pi}(cos\pi - cos0) = -\frac{V_{max}}{\pi}(-1-1) \quad \textbf{(5p)}$$

$$V_{prom} = \frac{2V_{max}}{\pi} \approx 0.6V_{max} \quad \textbf{(2p)}$$

PUNTAJE TOTAL: 100 P	PUNTAJE OBTENIDO:	NOTA FINAL:

ASIGNATURA	Cálculo I	AÑO	2019	TEMA	2	Nº HOJAS	
APELLIDO Y NOMBRE				LEGAJO/DNI		FECHA	

Resultados de aprendizaje: que el estudiante: 1. Conozca y aplique correctamente el Teorema Fundamental del Cálculo. 2. Reconozca las diferentes reglas de integración. 3. Resuelva correctamente una integral. 4. Interprete y calcule de forma correcta el área entre curvas, longitud de arco de una curva, volumen y área de un sólido de revolución.

Instrucciones: coloque nombre y apellido **en cada hoja** que va a entregar. Lea atentamente cada consigna. Desarrolle detalladamente y con letra clara los ejercicios para obtener el puntaje completo. Debe usar **tinta para desarrollar los ejercicios**. No se permite corrector, tache si es necesario. Cuando finalice, indique el número de hojas empleadas en el encabezado (incluyendo las fotocopias). Debe obtener un **mínimo de 60 puntos para aprobar** el examen. Dispone de **2 horas** para su resolución ¡ÉXITO!

	ACTIVIDADES	Puntaje Total
1.	Determine la derivada de: $F(x)=\int_{\sqrt{x}}^{\tan(x)} \frac{1}{1+t^2}dt$ teniendo en cuenta que $x \geq 0$. Desarrolle paso a paso y opere algebraicamente hasta obtener la mínima expresión. Enuncie el Teorema (hipótesis y tesis) que aplicó para obtenerla.	**25 p**

Para obtener la derivada se debe aplicar el TFCI:

Hipótesis: f(x) continua en $[a,b]$

Tesis: $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), $F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right]=f(x)$

Enunciar el teorema (3p)

En nuestro caso $F(x)=\int_{\ln(x)}^{x^2}\frac{e^t}{2+\sqrt{t}}dt$. Puesto que los límites de integración son dos funciones de x, se aplican propiedades de integrales para llegar a la forma conveniente y se tiene en cuenta la regla de la cadena, por lo que:

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt\right]=\frac{d}{dx}\left[-\int_a^{u(x)} f(t)dt+\int_a^{v(x)} f(t)dt\right]=-f[u(x)]*u'(x)+f[v(x)]*v'(x)$$

$$F'(x)=-\frac{x}{(2+\sqrt{\ln(x)})}\cdot\frac{1}{x}+\frac{e^{x^2}}{2+\sqrt{x^2}}\cdot(2x)$$ **(5p) procedimiento**

$$\boldsymbol{F'(x)}=-\frac{1}{2+\sqrt{\ln(x)}}+\frac{2xe^{x^2}}{2+x}$$ **(2p) resultado**

2.	Resuelva las siguientes integrales.	**10 p**

a. $\int t^5\,cos(4t^3)dt$

b. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$

Aplicar correctamente la técnica (sustitución /partes) (3p) c/u
Resolución de la Integral (10p) c/u
Resultado y conclusión (2p) c/u

a. (Resolución en función de x)

$\int x^5 \cos(4x^3)dx$

$\int x^3 \cdot x^2 \cdot \cos(4x^3)dx =$

$u = x^3 \quad du = 3x^2dx$

$dv = x^2\cos(4x^3)dx$

$v = \int x^2\cos(4x^3)dx$

$r = 4x^3$

$dr = 12x^2dx$

$\frac{dr}{12} = x^2dx$

$v = \int \cos r \frac{dr}{12}$

$v = \frac{1}{12}\operatorname{sen}(4x^3)$

$\frac{x^3}{12}\operatorname{sen}(4x^3) - \frac{1}{12}\int \underbrace{(3x^2)\operatorname{sen}(4x^3)dx}$

$w = 4x^3$

$dw = 12x^2dx$

$\frac{dw}{12} = x^2dx$

$= \frac{x^3}{12}\operatorname{sen}(4x^3) - \frac{3}{12}\int \operatorname{sen} w \cdot \frac{dw}{12}$

$= \frac{x^3}{12}\operatorname{sen}(4x^3) + \frac{3}{144}\cos(4x^3) + C$

$\boxed{\frac{x^3}{12}\operatorname{sen}(4x^3) + \frac{1}{48}\cos(4x^3) + C}$

ASIGNATURA	Cálculo I	AÑO	2019	TEMA	2	Nº HOJAS	
APELLIDO Y NOMBRE				LEGAJO/DNI		FECHA	

	b.	

Cálculo

2b. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} = \int \frac{\sec^2\theta \, d\theta}{\underbrace{(\tan^2\theta+1)}_{Ⓒ}^{3/2}} = \int \frac{\sec^2\theta \, d\theta}{(\sec^2\theta)^{3/2}} = \int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\sec^3\theta}$

Sustitución trigonométrica $x = a\tan\theta$, $a=1$

$x = \tan\theta$

$x^2 = \tan^2\theta$

$dx = \sec^2\theta \, d\theta$

$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$= \int \frac{d\theta}{\sec\theta}$

$= \int \cos\theta \, d\theta$

$= \operatorname{sen}\theta + C$

$= \boxed{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C}$

Ⓒ $\begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \\ \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \end{cases}$

3. Evalúe la siguiente integral. Indique de qué tipo se trata y qué significa el resultado obtenido. **10p**

$$\int_2^5 \frac{1}{(x-4)^{\frac{4}{3}}} dx$$

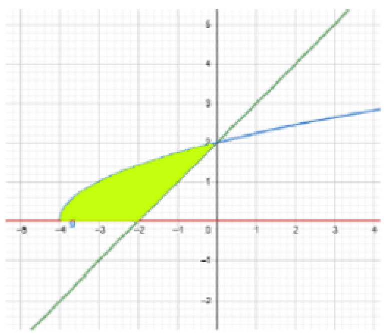
Planteo de integral impropia con el límite (5p)
Resolución de la Integral (10p)
Resultado y conclusión (5p)

$$\int_2^5 \frac{1}{(x-4)^{\frac{4}{3}}} dx = \int_2^5 (x-4)^{-\frac{4}{3}} dx = \int_{-2}^1 u^{-\frac{4}{3}} \, du =$$

$u = x-4 \quad dx = du \quad x = 2 \to u = -2$
$x = 5 \to u = 1$

$$\lim_{a\to 0^-} \int_{-2}^{a} u^{-\frac{4}{3}} \, du + \lim_{b\to 0^+} \int_b^1 u^{-\frac{4}{3}} \, du = \lim_{a\to 0^-} \frac{u^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} \Big|_{-2}^{a} + \lim_{b\to 0^+} \frac{u^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} \Big|_{b}^{1} = \infty \quad Diverge$$

4. Grafique la región delimitada por $f(x) = x+2$, $g(x) = \sqrt{x+4}$ e $y = 0$. Luego proponga las expresiones de cálculo del área: a) respecto al eje "x", b) respecto al eje "y". Seleccione la que ud. crea conveniente y **calcule** el valor del área. **25p**



a. Tomamos las rectas verticales $x = -4$, $x = -2$ y $x = 0$
Tenemos que $f(x) \leq g(x) \ \forall x \in [-4,0]$

$$A_x = \int_{x_1}^{x_2} [g(x) - f(x)] dx =$$

$$\int_{-4}^{-2} \sqrt{x+4} \, dx + \int_{-2}^{0} [\sqrt{x+4} - (x+2) \, dx$$ **(4p)**

b. Tomamos las rectas verticales $y = 0$ $y = 2$
Tenemos que $h(y) \leq p(y) \ \forall y \in [0,2]$

$$A_y = \int_{y_1}^{y_2} [p(y) - h(y)] dy = \int_0^2 [y - 2 - y^2 + 4] dy$$ **(4p)**

Resolución de la integral elegida (4p)

$Area = \frac{10}{3}$ **Resultado (3p)**

ASIGNATURA	Cálculo I	AÑO	2019	TEMA	2	Nº HOJAS	
APELLIDO Y NOMBRE				LEGAJO/DNI		FECHA	

5. Dada la región delimitada por las curvas $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $g(x) = x^3$

a. Plantee **(no resuelva)** una integral que permita calcular el volumen del sólido generado cuando dicha región gira alrededor de la recta $x = 3$. Indique el método empleado y grafique. **(10p)**

b. Obtenga una expresión para calcular la longitud de la curva **superior** que delimita la región. Recuerde que la derivada debe estar definida en el intervalo bajo análisis. **(5p)**

a. Se puede resolver por dos métodos.

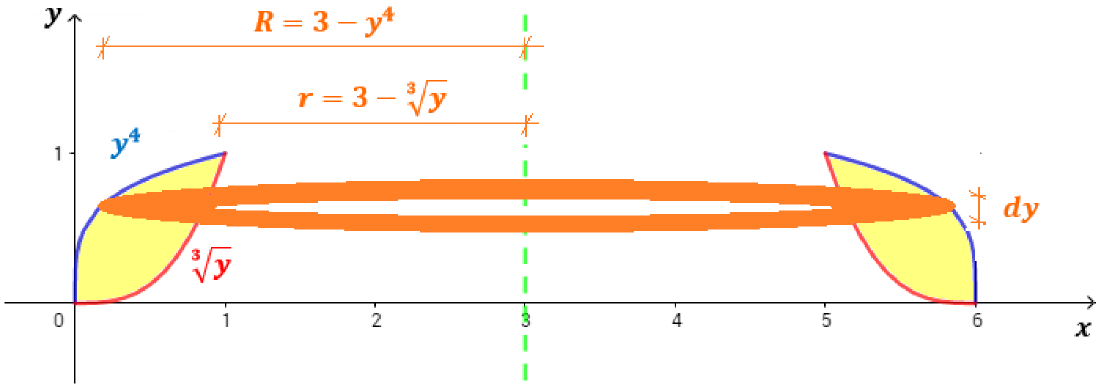
Método de arandelas. **Mencionar método (1p)**

Radio mayor $R(y) = 3 - y^4$ (2p)

Radio menor $r(y) = 3 - \sqrt[3]{y}$ (2p)

$$V = \int_{y_1}^{y_2} \pi[R^2(y) - r^2(y)]dy$$

$$V = \int_0^1 \pi[(3 - y^4)^2 - (3 - \sqrt[3]{y})^2]dy \quad (3p)$$

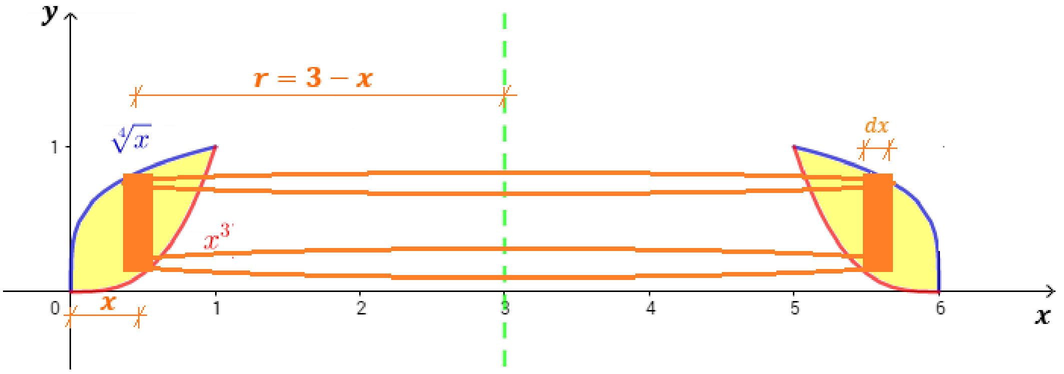


Método por casquillos. **Mencionar el método (1p)**

Altura del casquillo: $h(x) = f(x) - g(x) = \sqrt[4]{x} - x^3$ **(2p)**

Radio: $r(x) = 3 - x$ **(2p)**

$$V = \int_0^1 2\pi(3 - x)(\sqrt[4]{x} - x^3)dx \quad (3p) \quad \text{Gráfico (2p)}$$



ASIGNATURA	Cálculo I	AÑO	2019	TEMA	2	Nº HOJAS	
APELLIDO Y NOMBRE				LEGAJO/DNI		FECHA	

6. Un registro diario de temperatura T (en Cº) en la Payunia durante un año típico, se puede modelar en función del día del año x mediante la ecuación: **15p**

$$T(x) = 20\,cos\left[\frac{2\pi}{365}x\right] + 10$$

Determine cuál es la temperatura promedio en el primer trimestre del año, de $x = 0$ a $x = 365/4$. Aproxime su respuesta a un decimal.

$$T_{prom} = \frac{1}{365/4-0}\int_0^{365/4}\left[20\,cos\left(\frac{2\pi}{365}x\right) + 10\right]dx \quad \textbf{(3p)}$$

$$T_{prom} = \frac{4}{365}\left[20\frac{365}{2\pi}sen\left(\frac{2\pi}{365}x\right) + 10x\right]_0^{\frac{365}{4}} = \frac{4}{365}\left[\frac{3650}{\pi}sen\left(\frac{\pi}{2}\right) + 10\frac{365}{4} - \left(\frac{3650}{\pi}sen0 + 0\right)\right] \quad \textbf{(5p)}$$

$$T_{prom} = \frac{4}{365}\left[\frac{3650}{\pi} + \frac{3650}{4}\right] = \frac{40}{\pi} + 10 \approx 22.7 \quad \textbf{(2p)}$$

PUNTAJE TOTAL: 100 P	PUNTAJE OBTENIDO:	NOTA FINAL: