

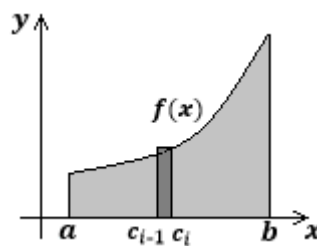
**Instrucciones:** coloque nombre y apellido en cada hoja que va a entregar. Lea atentamente cada consigna. Desarrolle detalladamente y con letra clara los ejercicios para obtener el puntaje completo. Puede usar lápiz o tinta para desarrollar los ejercicios, pero el **resultado final debe estar en tinta**. No se permite corrector, tache si es necesario. Cuando finalice, indique el número de hojas empleadas en el encabezado. Debe obtener un **mínimo de 60 puntos para aprobar** el examen. Dispone de **2 horas** para su resolución. ÉXITO!

1. Indique Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. **Justifique las respuestas falsas mediante contraejemplo o respuesta correcta.** Se considera el puntaje sólo si la respuesta está debidamente justificada. (2p c/u, Total 12p)

Enunciado	V	F
Si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow c} p(x) = 0$ , entonces se tiene que $\lim_{x \rightarrow c} [p(x)]^{f(x)} = 0$ .		X
Dados $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ , $\lim_{x \rightarrow c} p(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 1$ , las siguientes son formas indeterminadas de límites: $\lim_{x \rightarrow c} [g(x)]^{p(x)}$ y $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) * p(x)]$ .	X	
Supóngase que una función $f$ es no negativa y creciente en $[a, b]$ , si se divide el intervalo en $n$ subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ , y se toma el extremo derecho $c_i$ de cada subintervalo para obtener $f(c_i)$ en la suma de Riemann, entonces se obtiene una aproximación por defecto del área bajo la curva.		X
Si $f$ es continua en el intervalo $[a, b]$ , entonces el <b>área</b> de la región acotada por la gráfica de $f$ , el eje $x$ y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ está dada por $\int_a^b f(x) dx$ .		X
Si $f$ es una función <i>impar</i> , entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 0$ .		X
Si una función $f$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ o si tiene a lo sumo un número finito de discontinuidades de salto allí, entonces $f$ es integrable en $[a, b]$ . Es decir, $\int_a^b f(x) dx$ existe.	X	

**Respuestas (Sólo considerar puntaje si se justifican las respuestas falsas adecuadamente)**

- a. **FALSO**,  $\lim_{x \rightarrow c} [p(x)]^{f(x)} = 0^0$  es una forma indeterminada de límite.
- b. **VERDADERO**,  $\lim_{x \rightarrow c} [g(x)]^{p(x)} = 1^\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) * p(x)] = 0 * \infty$  son formas indeterminadas de límite.
- c. **FALSO**, se obtiene el área por exceso.



- d. **FALSO**,  $f$  debe ser no negativa para que el área esté dada por  $\int_a^b f(x) dx$ .
- e. **FALSO**, los límites de integración deben ser finitos y tener un intervalo cerrado para aplicar la definición de integral de una función impar: "Sea  $f$  en un intervalo cerrado  $[-a, a]$ , si  $f$  es una función *impar*, entonces  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ ". Si se encara desde el punto de vista de una integral impropia, la afirmación también sería falsa dado que falta la hipótesis de que la función sea integrable.
- f. **VERDADERO**. Para que una función no sea integrable, necesita ser suficientemente discontinua para que la región entre su gráfica y el eje  $x$  no pueda aproximarse bien por rectángulos cada vez más delgados. Ejemplo:
- $$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

<b>ASIGNATURA</b>	Elementos de Cálculo I	<b>AÑO</b>	2018	<b>TEMA</b>	<b>1</b>
-------------------	------------------------	------------	------	-------------	----------

2. Evalúe la expresión dada, indique la indeterminación que se produce y encuentre el límite aplicando la

regla de L'Hôpital:  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\text{sen}(x)} - \frac{1}{x} \right)$

$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\text{sen}(x)} - \frac{1}{x} \right)$  al evaluar esta expresión se produce una indeterminación del tipo  $\infty - \infty$  por lo que se debe trabajar algebraicamente para que resulte una indeterminación correspondiente para aplicar L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\text{sen}(x)} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \text{sen}(x)}{x \cdot \text{sen}(x)} \stackrel{\text{0/0 Aplico L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x \cdot \cos(x) + \text{sen}(x)} \stackrel{\text{0/0 Aplico L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x) - x \text{sen}(x) + \cos(x)} = \frac{0}{2} = 0$$

3. Determine la derivada de:  $f(x) = \int_{\text{sec}(x)}^1 \frac{\sqrt{t^2-1}}{t} dt$

Para obtener la derivada se debe aplicar el TFCl:

$F'(x) = \frac{d}{dx} \left[ \int_a^x f(t) dt \right] = f(x)$  en nuestro caso  $F(x) = \int_{\text{sec}(x)}^1 \frac{\sqrt{t^2-1}}{t} dt$ . Puesto que los límites de integración son dos funciones de  $x$ , se aplican propiedades de integrales para llegar a la forma conveniente y se tiene en cuenta la regla de la cadena, por lo que:

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left[ \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \right] = \frac{d}{dx} \left[ - \int_a^{u(x)} f(t) dt + \int_a^{v(x)} f(t) dt \right] = -f[u(x)] \cdot u'(x) + f[v(x)] \cdot v'(x)$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left[ \int_{\text{sec}(x)}^1 \frac{\sqrt{t^2-1}}{t} dt \right] = \frac{d}{dx} \left[ - \int_1^{\text{sec}(x)} \frac{\sqrt{t^2-1}}{t} dt \right]$$

$$= - \frac{\sqrt{\text{sec}^2(x)-1}}{\text{sec}(x)} \cdot \text{sec}(x) \cdot \tan(x) = -\tan^2(x)$$

Se aplicó la identidad trigonométrica:  $1 + \tan^2(x) = \text{sec}^2(x) \rightarrow \tan^2(x) = \text{sec}^2(x) - 1$

Se simplificaron factores y se agruparon otros.

4. Calcule las siguientes integrales:

a.  $\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{1-2x}} dx$

Esta integral se resuelve por sustitución, para lo cual se elige:

$$u = 1 - 2x \rightarrow x = \frac{u-1}{-2} = \frac{1-u}{2}$$

$$du = -2dx$$

Y por ende los extremos de integración también se modifican según el cambio de variable seleccionado:

Si  $x = -1 \rightarrow u = 3$

Si  $x = 0 \rightarrow u = 1$

Al efectuar todos los reemplazos correspondientes:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{1-2x}} dx &= \int_3^1 \frac{\left(\frac{1-u}{2}\right)}{\sqrt{u}} \frac{du}{(-2)} = -\frac{1}{4} \int_3^1 \frac{1-u}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{4} \int_1^3 (1-u)u^{-\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{1}{4} \int_1^3 \left(u^{-\frac{1}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right) du = \frac{1}{4} \left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{1/2} - \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3/2}\right) \Bigg|_1^3 = \left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{2} - \frac{u^{\frac{3}{2}}}{6}\right) \Bigg|_1^3 \\ &= \frac{1}{2} \left(3^{\frac{1}{2}} - 1^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{6} \left(3^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

b.  $\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx$

Esta integral se resuelve por partes:  $\int u dv = uv - \int v du$ , para lo cual se elige:

$$u = \ln(x) \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = \frac{1}{x^2} dx \rightarrow v = -\frac{1}{x}$$

Efectuando los reemplazos correspondientes:

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(x)}{x^2} dx &= -\frac{1}{x} \ln(x) - \int -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{x} \ln(x) + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln(x) - \frac{1}{x} + C \\ &= -\frac{1}{x} [\ln(x) + 1] + C \end{aligned}$$

c.  $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$

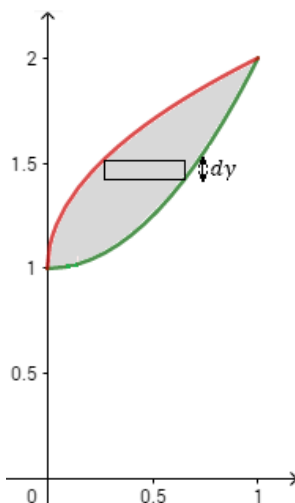
Al evaluar los extremos de integración se verifica que para  $x = 0$  la función integrando no está definida, por lo que se trata de una integral impropia:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow 0} \int_b^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow 0} \left. \frac{1}{x} \right|_b^1 = \lim_{b \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{b} \right) = 1 - \infty$$

**La integral diverge.**

5. Dadas  $f(x) = x^2 + 1$  y  $g(x) = \sqrt{x} + 1$

a. Determine el área de la región delimitada por ambas curvas integrando **respecto a y**.



<b>ASIGNATURA</b>	Elementos de Cálculo I	<b>AÑO</b>	2018	<b>TEMA</b>	<b>1</b>
-------------------	------------------------	------------	------	-------------	----------

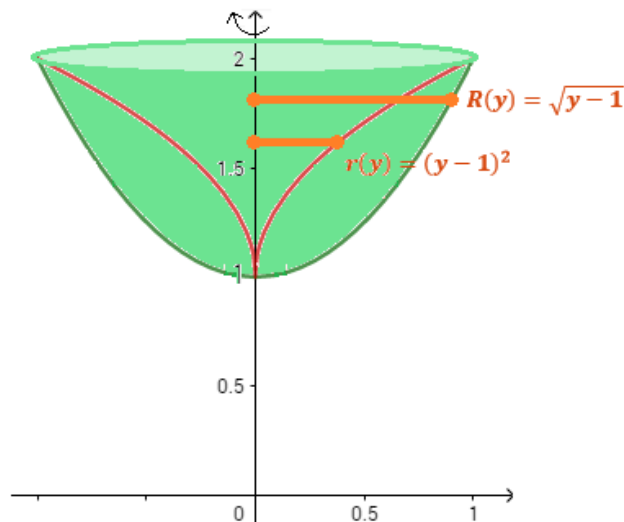
Para obtener el área de la región respecto de  $y$ , se determina un rectángulo representativo horizontal, y se plantea la fórmula del área respecto de  $y$ :

$$\begin{aligned}
 A &= \int_b^c [f(y) - g(y)] dy = \int_1^2 [\sqrt{y-1} - (y-1)^2] dy = \int_1^2 (\sqrt{y-1} - y^2 + 2y - 1) dy \\
 &= \int_1^2 \sqrt{y-1} dy - \int_1^2 y^2 dy + 2 \int_1^2 y dy - \int_1^2 dy = \frac{(y-1)^{3/2}}{3/2} \Big|_1^2 - \frac{y^3}{3} \Big|_1^2 + y^2 \Big|_1^2 - y \Big|_1^2 \\
 &= \frac{2}{3} (1^{3/2} - 0^{3/2}) - \frac{1}{3} (2^3 - 1^3) + (2^2 - 1^2) - (2 - 1) = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

- b. Calcule el volumen del sólido generado cuando el área delimitada por ambas curvas gira alrededor del eje  $y$ . Indique el método empleado.

Para calcular el volumen del sólido se puede emplear arandelas o casquillos cilíndricos:

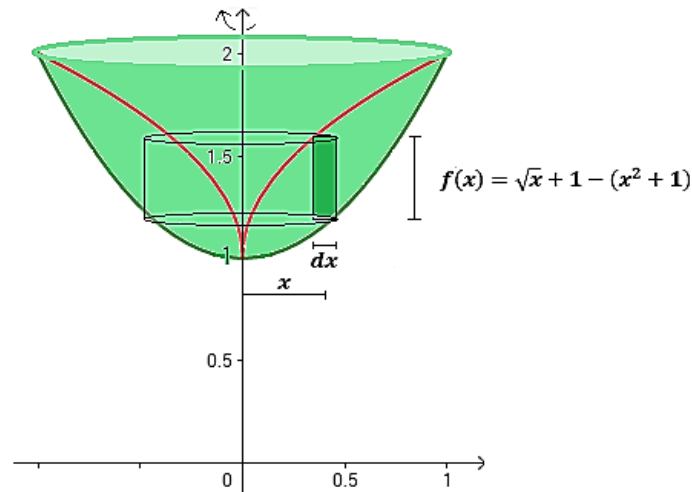
- **Por el método de arandelas:**  $V = \int_c^d \pi [R(y)^2 - r(y)^2] dy$



Al aplicarlo en este caso sería:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_1^2 \pi [(\sqrt{y-1})^2 - [(y-1)^2]^2] dy = \pi \int_1^2 [y-1 - (y^2 - 2y + 1)^2] dy \\
 &= \pi \int_1^2 [y-1 - (y^2 - 2y)^2 - 2(y^2 - 2y) - 1] dy \\
 &= \pi \int_1^2 (y-1 - y^4 + 4y^3 + 4y^2 - 2y^2 + 2y^3 - 1) dy \\
 &= \pi \int_1^2 (-y^4 + 6y^3 + 2y^2 - 1) dy = \frac{3}{10} \pi
 \end{aligned}$$

- Por el método casquillos cilíndricos:  $V = \int_a^b 2\pi r f(x) dx$



$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^1 2\pi x (\sqrt{x} + 1 - x^2 - 1) dx = 2\pi \int_0^1 x (\sqrt{x} - x^2) dx = 2\pi \int_0^1 (x^{3/2} - x^3) dx \\
 &= 2\pi \left( \frac{x^{5/2}}{5/2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left( \frac{2}{5} - \frac{1}{4} \right) = 2\pi \frac{3}{20} = \frac{3}{10}\pi
 \end{aligned}$$

- c. Plantee (no resuelva) una integral que permita calcular la longitud de curva de la función  $g(x)$  en el intervalo  $[0,1]$

$$L = \int_a^b 2\pi \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx$$

**Cálculos auxiliares:**  $y = \sqrt{x} + 1 \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow (y')^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{1}{4x}$

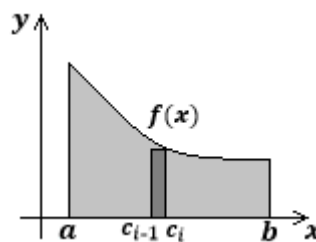
**Instrucciones:** coloque nombre y apellido en cada hoja que va a entregar. Lea atentamente cada consigna. Desarrolle detalladamente y con letra clara los ejercicios para obtener el puntaje completo. Puede usar lápiz o tinta para desarrollar los ejercicios, pero el **resultado final debe estar en tinta**. No se permite corrector, tache si es necesario. Cuando finalice, indique el número de hojas empleadas en el encabezado. Debe obtener un **mínimo de 60 puntos para aprobar** el examen. Dispone de **2 horas** para su resolución. ÉXITO!

1. Indique Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. **Justifique las respuestas falsas mediante contraejemplo o respuesta correcta.** Se considera el puntaje sólo si la respuesta está debidamente justificada.

Enunciado	V	F
Si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow c} p(x) = \infty$ , entonces se tiene que $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^{p(x)}$ es forma indeterminada de límite.	X	
Dados $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ , $\lim_{x \rightarrow c} p(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 1$ , las siguientes son formas indeterminadas de límites: $\lim_{x \rightarrow c} [p(x)]^{g(x)}$ y $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + p(x)]$ .		X
Supóngase que una función $f$ es no negativa y decreciente en $[a, b]$ , si se divide el intervalo en $n$ subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ , y se toma el extremo derecho $c_i$ de cada subintervalo para obtener $f(c_i)$ en la suma de Riemann, entonces se obtiene una aproximación por exceso del área bajo la curva.		X
Si $f$ es continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$ , entonces el <b>área</b> de la región acotada por la gráfica de $f$ , el eje $x$ y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ está dada por $\int_a^b f(x) dx$ .	X	
Si $f$ es una función <i>par</i> , entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) dx$ .		X
Si $f$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ , entonces de acuerdo al Teorema del valor medio para integrales existe un número $c$ en el intervalo cerrado $[a, b]$ , tal que: $f'(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ .		X

**Respuestas (Sólo considerar puntaje si se justifican las respuestas falsas adecuadamente)**

- a. **VERDADERO**,  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^{p(x)} = 1^\infty$  es una forma indeterminada de límite.
- b. **FALSO**,  $\lim_{x \rightarrow c} [p(x)]^{g(x)} = \infty^1 = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + p(x)] = 0 + \infty = \infty$  no son formas indeterminadas de límite.
- c. **FALSO**, se obtiene el área por defecto.



- d. **VERDADERO**. La definición de área cumple con todas las hipótesis.
- e. **FALSO**, los límites de integración deben ser finitos y tener un intervalo cerrado para aplicar la definición de integral de una función par: "Sea  $f$  en un intervalo cerrado  $[-a, a]$ , si  $f$  es una función *par*, entonces  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ ". Si se encara desde el punto de vista de una integral impropia, la afirmación también sería falsa dado que falta la hipótesis de que la función sea integrable.
- f. **FALSO**. El teorema del valor medio establece que:  $f'(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ .

<b>ASIGNATURA</b>	Elementos de Cálculo I	<b>AÑO</b>	2018	<b>TEMA</b>	<b>2</b>
-------------------	------------------------	------------	------	-------------	----------

2. Evalúe la expresión dada, indique la indeterminación que se produce y encuentre el límite aplicando la regla de L'Hôpital:  $\lim_{x \rightarrow 0} [\cos(x)]^{1/x^2}$

$\lim_{x \rightarrow 0} [\cos(x)]^{1/x^2}$  al evaluar este límite se obtiene la forma indeterminada  $1^\infty$  por lo que debe aplicarse para el cálculo:

Si  $\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = L$  entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln f(x)} = e^L$$

Aquí a puede ser finito o infinito.

Se toma  $f(x) = [\cos(x)]^{1/x^2}$  y se determina  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln f(x)$ :

$$\ln f(x) = \ln \{ [\cos(x)]^{1/x^2} \} = \frac{1}{x^2} * \ln [\cos(x)]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} * \ln [\cos(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos(x)} * [-\operatorname{sen}(x)]}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sec^2(x)}{2} = -\frac{1}{2}$$

0/0 Aplico L'H      0/0 Aplico L'H

Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\cos(x)]^{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln f(x)} = e^{-\frac{1}{2}} = 1/\sqrt{e}$$

3. Determine la derivada de:  $f(x) = \int_{\operatorname{cosec}(x)}^2 \frac{\sqrt{t^2-1}}{t} dt$

Para obtener la derivada se debe aplicar el TFCl:

$F'(x) = \frac{d}{dx} \left[ \int_a^x f(t) dt \right] = f(x)$  en nuestro caso  $F(x) = \int_{\operatorname{cosec}(x)}^1 \frac{\sqrt{t^2-1}}{t} dt$ . Puesto que los límites de integración son dos funciones de  $x$ , se aplican propiedades de integrales para llegar a la forma conveniente y se tiene en cuenta la regla de la cadena, por lo que:

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left[ \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \right] = \frac{d}{dx} \left[ - \int_a^{u(x)} f(t) dt + \int_a^{v(x)} f(t) dt \right]$$

$$= -f[u(x)] * u'(x) + f[v(x)] * v'(x)$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left[ \int_{\operatorname{cosec}(x)}^1 \frac{\sqrt{t^2-1}}{t} dt \right] = \frac{d}{dx} \left[ - \int_1^{\operatorname{cosec}(x)} \frac{\sqrt{t^2-1}}{t} dt \right]$$

$$= - \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2(x)-1}}{\operatorname{cosec}(x)} \cdot \operatorname{cosec}(x) \cdot \cotan(x) = -\cotan^2(x)$$

Se aplicó la identidad trigonométrica:  $1 + \cotan^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x) \rightarrow \cotan^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x) - 1$

Se simplificaron factores y se agruparon otros.

4. Calcule las siguientes integrales:

a.  $\int_{-1}^0 3x\sqrt{1-2x} dx$

Esta integral se resuelve por sustitución, para lo cual se elige:

<b>ASIGNATURA</b>	Elementos de Cálculo I	<b>AÑO</b>	2018	<b>TEMA</b>	<b>2</b>
-------------------	------------------------	------------	------	-------------	----------

$$u = 1 - 2x \rightarrow x = \frac{u-1}{-2} = \frac{1-u}{2}$$

$$du = -2dx$$

Y por ende los extremos de integración también se modifican según el cambio de variable seleccionado:

Si  $x = -1 \rightarrow u = 3$

Si  $x = 0 \rightarrow u = 1$

Al efectuar todos los reemplazos correspondientes:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 3x \sqrt{1-2x} dx &= 3 \int_3^1 \left(\frac{1-u}{2}\right) \sqrt{u} \frac{du}{(-2)} = -\frac{3}{4} \int_3^1 (1-u)u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{3}{4} \int_3^1 \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}}\right) du \\ &= \frac{3}{4} \int_1^3 \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}}\right) du = \frac{3}{4} \left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right) \Big|_1^3 = \left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{2} - 3\frac{u^{\frac{5}{2}}}{10}\right) \Big|_1^3 \\ &= \frac{1}{2} \left(3^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{3}{10} \left(3^{\frac{5}{2}} - 1^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{-1 - 6\sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$

b.  $\int x^3 \ln(x) dx$

Esta integral se resuelve por partes:  $\int u dv = uv - \int v du$ , para lo cual se elige:

$$u = \ln(x) \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = x^3 dx \rightarrow v = \frac{x^4}{4}$$

Efectuando los reemplazos correspondientes:

$$\begin{aligned} \int x^3 \ln(x) dx &= \frac{x^4}{4} \ln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^4}{4} dx = \frac{x^4}{4} \ln(x) - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \ln(x) - \frac{1}{16} x^4 + C \\ &= \frac{x^4}{4} \left[ \ln(x) - \frac{1}{4} \right] + C \end{aligned}$$

c.  $\int_2^3 \frac{1}{x-2} dx$  (Ayuda: esta integral ¿converge o diverge?)

Al evaluar los extremos de integración se verifica que para  $x = 2$  la función integrando no está definida, por lo que se trata de una integral impropia:

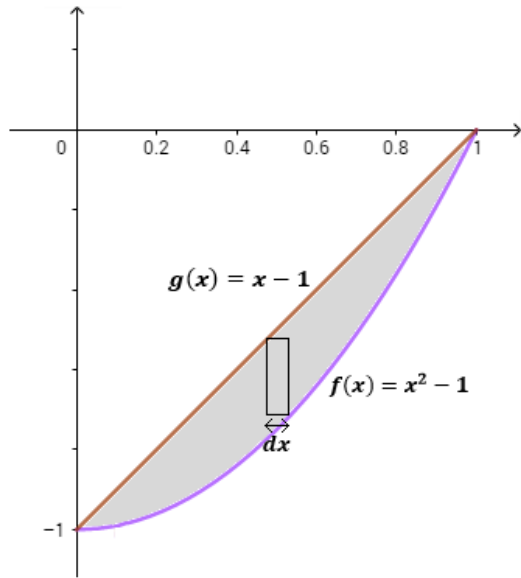
$$\int_2^3 \frac{1}{x-2} dx = \lim_{b \rightarrow 2} \int_b^3 \frac{1}{x-2} dx = \lim_{b \rightarrow 2} \ln(x-2) \Big|_b^3 = \lim_{b \rightarrow 2} [\ln(3-2) - \ln(b-2)] = 0 - \infty$$

**La integral diverge.**

5. Dadas  $f(x) = x^2 - 1$  y  $g(x) = x - 1$

a. Determine el área de la región delimitada por ambas curvas integrando **respecto a x**.





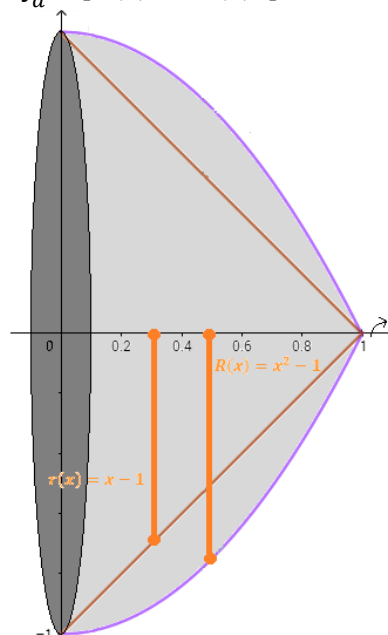
Para obtener el área de la región respecto de  $x$ , se determina un rectángulo representativo horizontal, y se plantea la fórmula del área respecto de  $y$ :

$$\begin{aligned}
 A &= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_0^1 [x - 1 - (x^2 - 1)] dx = \int_0^1 (x - 1 - x^2 + 1) dx = \int_0^1 (x - x^2) dx \\
 &= \int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1^2 - 0^2) - \frac{1}{3}(1^3 - 0^3) = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

- b. Calcule el volumen del sólido generado cuando el área delimitada por ambas curvas gira alrededor del eje  $x$ . Indique el método empleado.

Para calcular el volumen del sólido se puede emplear arandelas o casquillos cilíndricos:

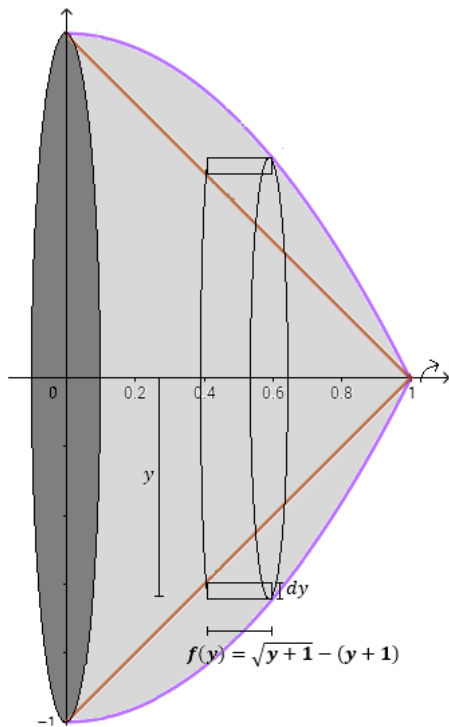
- **Por el método de arandelas:**  $V = \int_a^b \pi [R(x)^2 - r(x)^2] dx$



Al aplicarlo en este caso sería:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^1 \pi [(x^2 - 1)^2 - (x - 1)^2] dx = \pi \int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 1 - x^2 + 2x - 1) dx \\
 &= \pi \int_0^1 (x^4 - 3x^2 + 2x) dx = \pi \left[ \frac{x^5}{5} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{5} \pi
 \end{aligned}$$

- **Por el método casquillos cilíndricos:**  $V = \int_c^d 2 \pi r f(y) dy$



$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-1}^0 2 \pi y [\sqrt{y+1} - (y+1)] dy = 2 \pi \int_{-1}^0 y [\sqrt{y+1} - y - 1] dy \\
 &= 2 \pi \int_{-1}^0 (y \sqrt{y+1} - y^2 - y) dy = 2 \pi \left[ \frac{2}{5} (y+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} (y+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} \right]_{-1}^0 \\
 &= \left| -\frac{1}{5} \pi \right| = \frac{1}{5} \pi
 \end{aligned}$$

- c. Plantee (no resuelva) una integral que permita calcular la longitud de curva de la función  $f(x)$  en el intervalo  $[0,1]$

$$L = \int_a^b 2\pi \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

**Cálculos auxiliares:**  $y = x^2 + 1 \rightarrow y' = 2x \rightarrow (y')^2 = (2x)^2 = 4x^2$