UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO	RESOLUCIÓN TERCER PARCIAL		FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES		
ASIGNATURA	Elementos de Cálculo I	**AÑO**	2018	**TEMA**	1

Instrucciones: coloque nombre y apellido **en cada hoja** que va a entregar. Lea atentamente cada consigna. Desarrolle detalladamente y con letra clara los ejercicios para obtener el puntaje completo. Puede usar lápiz o tinta para desarrollar los ejercicios, pero el **resultado final debe estar en tinta**. No se permite corrector, tache si es necesario. Cuando finalice, indique el número de hojas empleadas en el encabezado. Debe obtener un **mínimo de 60 puntos para aprobar** el examen. Dispone de **2 horas** para su resolución. ÉXITO!

1. Indique Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. **Justifique las respuestas falsas mediante contraejemplo o respuesta correcta**. Se considera el puntaje sólo si la respuesta está debidamente justificada. **(2p c/u, Total 12p)**

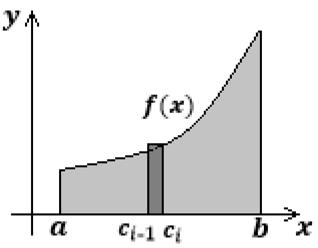
Enunciado	V	F
Si $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to c} p(x) = 0$, entonces se tiene que $\lim_{x\to c}[p(x)]^{f(x)} = 0$.		X
Dados $\lim_{x\to c} f(x) = 0$, $\lim_{x\to c} p(x) = \infty$ y $\lim_{x\to c} g(x) = 1$, las siguientes son formas indeterminadas de límites: $\lim_{x\to c}[g(x)]^{p(x)}$ y $\lim_{x\to c}[f(x) * p(x)]$.	X	
Supóngase que una función f es no negativa y creciente en $[a, b]$, si se divide el intervalo en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, y se toma el extremo derecho c_i de cada subintervalo para obtener $f(c_i)$ en la suma de Riemann, entonces se obtiene una aproximación por defecto del área bajo la curva.		X
Si f es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces el **área** de la región acotada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ está dada por $\int_a^b f(x)dx$.		X
Si f es una función *impar*, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0$.		X
Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ o si tiene a lo sumo un número finito de discontinuidades de salto allí, entonces f es integrable en $[a, b]$. Es decir, $\int_a^b f(x)dx$ existe.	X	

Respuestas **(Sólo considerar puntaje si se justifican las respuestas falsas adecuadamente)**

a. **FALSO,** $\lim_{x\to c}[p(x)]^{f(x)} = 0^0$ es una forma indeterminada de límite.

b. **VERDADERO,** $\lim_{x\to c}[g(x)]^{p(x)} = 1^\infty$ y $\lim_{x\to c}[f(x) * p(x)] = 0 * \infty$ son formas indeterminadas de límite.

c. **FALSO,** se obtiene el área por exceso.



d. **FALSO,** f debe ser no negativa para que el área esté dada por $\int_a^b f(x)dx$.

e. **FALSO,** los límites de integración deben ser finitos y tener un intervalo cerrado para aplicar la definición de integral de una función impar: "Sea f en un intervalo cerrado $[-a, a]$, si f es una función *impar*, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$". Si se encara desde el punto de vista de una integral impropia, la afirmación también sería falsa dado que falta la hipótesis de que la función sea integrable.

f. **VERDADERO.** Para que una función no sea integrable, necesita ser suficientemente discontinua para que la región entre su gráfica y el eje x no pueda aproximarse bien por rectángulos cada vez más delgados. Ejemplo:
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

2. Evalúe la expresión dada, indique la indeterminación que se produce y encuentre el límite <u>aplicando la regla de L'Hôpital:</u> $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{sen(x)}-\frac{1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{sen(x)}-\frac{1}{x}\right)$ al evaluar esta expresión se produce una indeterminación del tipo $\infty-\infty$ por lo que se debe trabajar algebraicamente para que resulte una indeterminación correspondiente para aplicar L'Hôpital.

0/0 Aplico L'H **0/0 Aplico L'H**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{sen(x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-sen(x)}{x.sen(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x.\cos(x)+sen(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{\cos(x)-x\,sen(x)+\cos(x)}=\frac{0}{2}$$
$$=\mathbf{0}$$

3. Determine la derivada de: $f(x)=\int_{sec(x)}^{1}\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}dt$

   Para obtener la derivada se debe aplicar el TFCI:

   $F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right]=f(x)$ en nuestro caso $F(x)=\int_{\sec(x)}^{1}\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}dt$. Puesto que los límites de integración son dos funciones de x, se aplican propiedades de integrales para llegar a la forma conveniente y se tiene en cuenta la regla de la cadena, por lo que:

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)dt\right]=\frac{d}{dx}\left[-\int_a^{u(x)}f(t)dt+\int_a^{v(x)}f(t)dt\right]=-f[u(x)]*u'(x)+f[v(x)]*v'(x)$$

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_{\sec(x)}^{1}\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}dt\right]=\frac{d}{dx}\left[-\int_1^{\sec(x)}\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}dt\right]$$

$$=-\frac{\sqrt{sec^2(x)-1}}{\sec(x)}\cdot\sec(x)\cdot\tan(x)=\mathbf{-\tan^2(x)}$$

   Se aplicó la identidad trigonométrica: $1+\tan^2(x)=\sec^2(x)\to\tan^2(x)=\sec^2(x)-1$

   Se simplificaron factores y se agruparon otros.

4. Calcule las siguientes integrales:

   a. $\int_{-1}^{0}\frac{x}{\sqrt{1-2x}}dx$

      Esta integral se resuelve por sustitución, para lo cual se elige:

      $u=1-2x\to x=\frac{u-1}{-2}=\frac{1-u}{2}$
      $du=-2dx$

      Y por ende los extremos de integración también se modifican según el cambio de variable seleccionado:
      Si $x=-1\to u=3$
      Si $x=0\to u=1$
      Al efectuar todos los reemplazos correspondientes:

$$\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-2x}}dx = \int_{3}^{1} \frac{\left(\frac{1-u}{2}\right)}{\sqrt{u}}\frac{du}{(-2)} = -\frac{1}{4}\int_{3}^{1}\frac{1-u}{\sqrt{u}}du = \frac{1}{4}\int_{1}^{3}(1-u)u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$= \frac{1}{4}\int_{1}^{3}\left(u^{-\frac{1}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right)du = \frac{1}{4}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{1/2} - \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3/2}\right)\Bigg|_{1}^{3} = \left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{2} - \frac{u^{\frac{3}{2}}}{6}\right)\Bigg|_{1}^{3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(3^{\frac{1}{2}} - 1^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{6}\left(3^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = -\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

b. $\int \frac{\ln(x)}{x^2}dx$

Esta integral se resuelve por partes: $\int udv = uv - \int vdu$, para lo cual se elige:

$u = \ln(x) \quad \rightarrow \quad du = \frac{1}{x}dx$

$dv = \frac{1}{x}dx \quad \rightarrow \quad v = -\frac{1}{x}$

Efectuando los reemplazos correspondientes:

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\ln(x) - \int -\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx = -\frac{1}{x}\ln(x) + \int \frac{1}{x^2}dx = \boldsymbol{-\frac{1}{x}\ln(x) - \frac{1}{x} + C}$$

$$\boldsymbol{= -\frac{1}{x}[\ln(x) + 1] + C}$$

c. $\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$

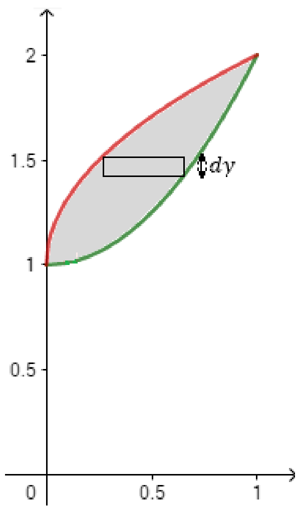
Al evaluar los extremos de integración se verifica que para $x = 0$ la función integrando no está definida, por lo que se trata de una integral impropia:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to 0}\int_b^1 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to 0}\frac{1}{x}\Bigg|_b^1 = \lim_{b\to 0}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{b}\right) = 1 - \infty$$

La integral diverge.

5. Dadas $f(x) = \boldsymbol{x^2 + 1}$ y $\boldsymbol{g(x) = \sqrt{x} + 1}$

a. Determine el área de la región delimitada por ambas curvas integrando **respecto a y**.



Para obtener el área de la región respecto de y, se determina un rectángulo representativo horizontal, y se plantea la fórmula del área respecto de y:

$$A=\int_b^c [f(y)-g(y)]dy=\int_1^2\left[\sqrt{y-1}-(y-1)^2\right]dy=\int_1^2\left(\sqrt{y-1}-y^2+2y-1\right)dy$$

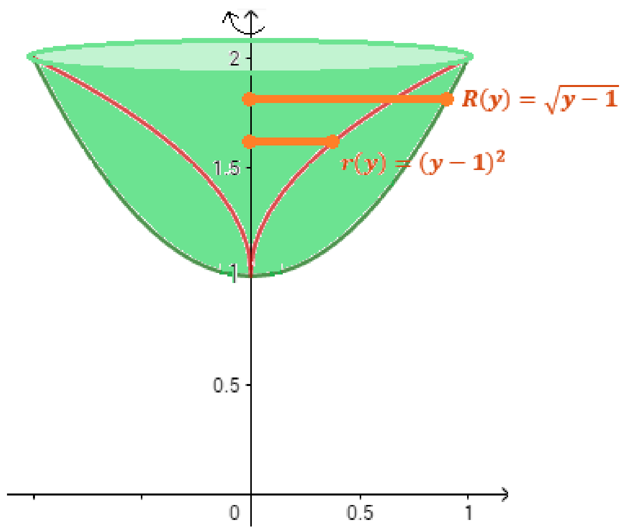
$$=\int_1^2\sqrt{y-1}\,dy-\int_1^2 y^2\,dy+2\int_1^2 y\,dy-\int_1^2 dy=\left.\frac{(y-1)^{\frac{3}{2}}}{3/2}\right|_1^2-\left.\frac{y^3}{3}\right|_1^2+y^2|_1^2-y|_1^2$$

$$=\frac{2}{3}\left(1^{\frac{3}{2}}-0^{\frac{3}{2}}\right)-\frac{1}{3}\left(2^3-1^3\right)+\left(2^2-1^2\right)-(2-1)=\frac{1}{3}$$

b. Calcule el volumen del sólido generado cuando el área delimitada por ambas curvas gira alrededor del eje y. Indique el método empleado.

Para calcular el volumen del sólido se puede emplear arandelas o casquillos cilíndricos:

- ***Por el método de arandelas***: $V=\int_c^d \pi\,[R(y)^2-r(y)^2]dy$



Al aplicarlo en este caso sería:

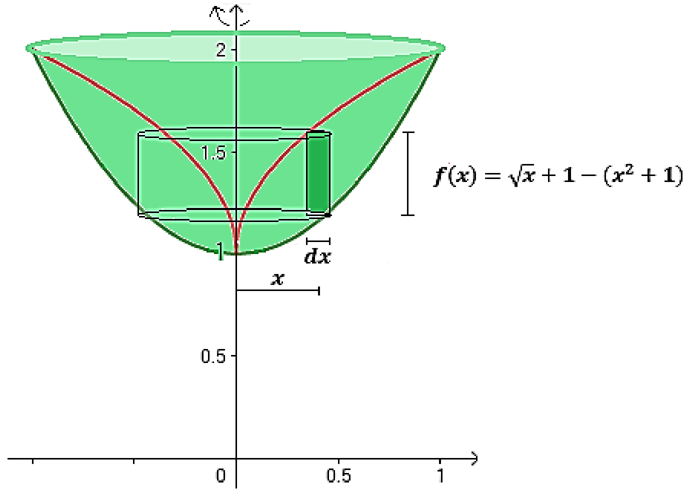
$$V=\int_1^2\pi\left[\left(\sqrt{y}-1\right)^2-[(y-1)^2]^2\right]dy=\pi\int_1^2[y-1-(y^2-2y+1)^2]\,dy$$

$$=\pi\int_1^2[y-1-(y^2-2y)^2-2(y^2-2y)-1]\,dy$$

$$=\pi\int_1^2(y-1-y^4+4y^3+4y^2-2y^2+2y^3-1)\,dy$$

$$=\pi\int_1^2(-y^4+6y^3+2y^2-1)\,dy=\boldsymbol{\frac{3}{10}\pi}$$

- ***Por el método casquillos cilíndricos:*** $V = \int_a^b 2\,\pi\, r\, f(x)dx$



$$V = \int_0^1 2\,\pi\, x\left(\sqrt{x} + 1 - x^2 - 1\right)dx = 2\,\pi\int_0^1 x\left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = 2\pi\int_0^1 \left(x^{3/2} - x^3\right)dx$$

$$= 2\pi\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5/2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = 2\pi\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right) = 2\pi\frac{3}{20} = \boldsymbol{\frac{3}{10}\pi}$$

c. Plantee (no resuelva) una integral que permita calcular la longitud de curva de la función $\boldsymbol{g(x)}$ en el intervalo $[0,1]$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\,dx$$

Cálculos auxiliares: $y = \sqrt{x} + 1 \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow (y')^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{1}{4x}$

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO	RESOLUCIÓN TERCER PARCIAL			FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES Naturaleza - Ciencia - Humanismo	
ASIGNATURA	Elementos de Cálculo I	**AÑO**	2018	**TEMA**	**2**

Instrucciones: coloque nombre y apellido **en cada hoja** que va a entregar. Lea atentamente cada consigna. Desarrolle detalladamente y con letra clara los ejercicios para obtener el puntaje completo. Puede usar lápiz o tinta para desarrollar los ejercicios, pero el **resultado final debe estar en tinta**. No se permite corrector, tache si es necesario. Cuando finalice, indique el número de hojas empleadas en el encabezado. Debe obtener un **mínimo de 60 puntos para aprobar** el examen. Dispone de **2 horas** para su resolución. ÉXITO!

1. Indique Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. **Justifique las respuestas falsas mediante contraejemplo o respuesta correcta**. Se considera el puntaje sólo si la respuesta está debidamente justificada.

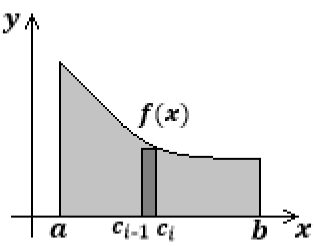
Enunciado	V	F
Si $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to c} p(x) = \infty$, entonces se tiene que $\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^{p(x)}$ es forma indeterminada de límite.	X	
Dados $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to c} p(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to c} g(x) = 1$, las siguientes son formas indeterminadas de límites: $\lim\limits_{x \to c} [p(x)]^{g(x)}$ y $\lim\limits_{x \to c} [f(x) + p(x)]$.		X
Supóngase que una función f es no negativa y decreciente en $[a, b]$, si se divide el intervalo en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, y se toma el extremo derecho c_i de cada subintervalo para obtener $f(c_i)$ en la suma de Riemann, entonces se obtiene una aproximación por exceso del área bajo la curva.		X
Si f es continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$, entonces el **área** de la región acotada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ está dada por $\int_a^b f(x)dx$.	X	
Si f es una función *par*, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\int_0^{\infty} f(x)dx$.		X
Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces de acuerdo al Teorema del valor medio para integrales existe un número c en el intervalo cerrado $[a, b]$, tal que: $f'(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.		X

Respuestas (Sólo considerar puntaje si se justifican las respuestas falsas adecuadamente)

a. **VERDADERO,** $\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^{p(x)} = 1^{\infty}$ es una forma indeterminada de límite.

b. **FALSO,** $\lim\limits_{x \to c} [p(x)]^{g(x)} = \infty^1 = \infty$ y $\lim\limits_{x \to c} [f(x) + p(x)] = 0 + \infty = \infty$ no son formas indeterminadas de límite.

c. **FALSO,** se obtiene el área por defecto.



d. **VERDADERO.** La definición de área cumple con todas las hipótesis.

e. **FALSO,** los límites de integración deben ser finitos y tener un intervalo cerrado para aplicar la definición de integral de una función par: "Sea f en un intervalo cerrado $[-a, a]$, si f es una función *par*, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$". Si se encara desde el punto de vista de una integral impropia, la afirmación también sería falsa dado que falta la hipótesis de que la función sea integrable.

f. **FALSO.** El teorema del valor medio establece que: $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

2. Evalúe la expresión dada, indique la indeterminación que se produce y encuentre el límite aplicando la regla de L'Hôpital: $\lim\limits_{x\to 0}[\cos(x)]^{1/x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0}[\cos(x)]^{1/x^2}$ al evaluar este límite se obtiene la forma indeterminada 1^{∞} por lo que debe aplicarse para el cálculo:

> Si $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x) = L$ entonces:
>
> $$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} e^{\ln f(x)} = e^{L}$$
>
> Aquí a puede ser finito o infinito.

Se toma $f(x) = [\cos(x)]^{1/x^2}$ y se determina $\lim\limits_{x\to 0}\ln f(x)$:

$$\ln f(x) = \ln\left\{[\cos(x)]^{1/x^2}\right\} = \frac{1}{x^2} * \ln\,[\cos(x)]$$

$$\lim_{x\to 0}\ln f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} * \ln\,[\cos(x)] \overset{0/0\text{ Aplico L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos(x)} * [-sen(x)]}{2x} \overset{0/0\text{ Aplico L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sec^2(x)}{2} = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0}[\cos(x)]^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\ln f(x)} = e^{-\frac{1}{2}} = 1/\sqrt{e}$$

3. Determine la derivada de: $f(x) = \int_{cosec(x)}^{2}\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}dt$

Para obtener la derivada se debe aplicar el TFCI:

$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$ en nuestro caso $F(x) = \int_{\text{cosec}(x)}^{1}\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}dt$. Puesto que los límites de integración son dos funciones de x, se aplican propiedades de integrales para llegar a la forma conveniente y se tiene en cuenta la regla de la cadena, por lo que:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt\right] = \frac{d}{dx}\left[-\int_a^{u(x)} f(t)dt + \int_a^{v(x)} f(t)dt\right]$$
$$= -f[u(x)] * u'(x) + f[v(x)] * v'(x)$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_{\text{cosec}(x)}^{1}\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}dt\right] = \frac{d}{dx}\left[-\int_1^{\text{cosec}(x)}\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}dt\right]$$

$$= -\frac{\sqrt{cosec^2(x)-1}}{\text{cosec}(x)}\cdot[-\text{cosec}(x)\cdot\text{cotan}(x)] = cotan^2(x)$$

Se aplicó la identidad trigonométrica: $1 + cotan^2(x) = cosec^2(x) \to cotan^2(x) = cosec^2(x) - 1$

Se simplificaron factores y se agruparon otros.

4. Calcule las siguientes integrales:

a. $\int_{-1}^{0} 3x\sqrt{1-2x}\,dx$

Esta integral se resuelve por sustitución, para lo cual se elige:

$u = 1 - 2x \rightarrow x = \frac{u-1}{-2} = \frac{1-u}{2}$
$du = -2dx$

Y por ende los extremos de integración también se modifican según el cambio de variable seleccionado:
Si $x = -1 \rightarrow u = 3$
Si $x = 0 \rightarrow u = 1$
Al efectuar todos los reemplazos correspondientes:

$$\int_{-1}^{0} 3x\sqrt{1-2x}dx = 3\int_{3}^{1}\left(\frac{1-u}{2}\right)\sqrt{u}\frac{du}{(-2)} = -\frac{3}{4}\int_{3}^{1}(1-u)u^{\frac{1}{2}}\,du = -\frac{3}{4}\int_{3}^{1}\left(u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}}\right)du$$

$$= \frac{3}{4}\int_{1}^{3}\left(u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}}\right)du = \frac{3}{4}\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3/2} - \frac{u^{\frac{5}{2}}}{5/2}\right)\Bigg|_{1}^{3} = \left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{2} - 3\frac{u^{\frac{5}{2}}}{10}\right)\Bigg|_{1}^{3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(3^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{3}{10}\left(3^{\frac{5}{2}} - 1^{\frac{5}{2}}\right) = \boldsymbol{\frac{-1-6\sqrt{3}}{5}}$$

b. $\int x^3\, ln(x)\, dx$

Esta integral se resuelve por partes: $\int udv = uv - \int vdu$, para lo cual se elige:

$u = \ln(x) \quad \rightarrow \quad du = \frac{1}{x}dx$

$dv = x^3dx \quad \rightarrow \quad v = \frac{x^4}{4}$

Efectuando los reemplazos correspondientes:

$$\int x^3\, ln(x)\, dx = \frac{x^4}{4}\ln(x) - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^4}{4}dx = \frac{x^4}{4}\ln(x) - \frac{1}{4}\int x^3dx = \boldsymbol{\frac{x^4}{4}\ln(x) - \frac{1}{16}x^4 + C}$$

$$\boldsymbol{= \frac{x^4}{4}\left[\ln(x) - \frac{1}{4}\right] + C}$$

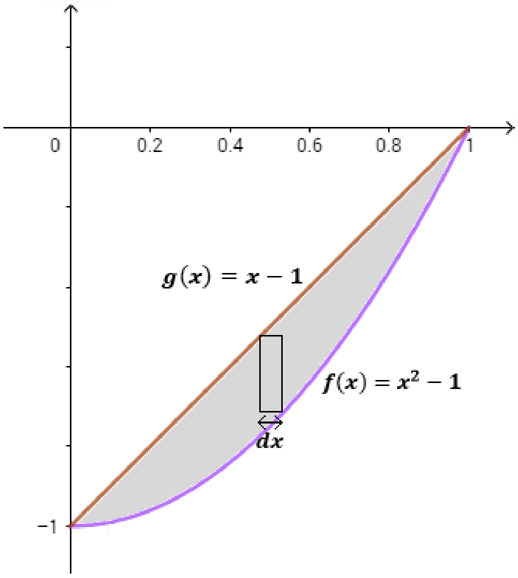
c. $\int_2^3 \frac{1}{x-2}dx$ (*Ayuda: esta integral ¿converge o diverge?)*

Al evaluar los extremos de integración se verifica que para $x = 2$ la función integrando no está definida, por lo que se trata de una integral impropia:

$$\int_2^3 \frac{1}{x-2}dx = \lim_{b\to 2}\int_b^3 \frac{1}{x-2}dx = \lim_{b\to 2}\ ln(x-2)|_b^3 = \lim_{b\to 2}[ln(3-2) - ln(b-2)] = 0 - \infty$$

La integral diverge.

5. Dadas $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 1}$ y $\boldsymbol{g(x) = x - 1}$
   a. Determine el área de la región delimitada por ambas curvas integrando **respecto a x**.



Para obtener el área de la región respecto de x, se determina un rectángulo representativo horizontal, y se plantea la fórmula del área respecto de y:

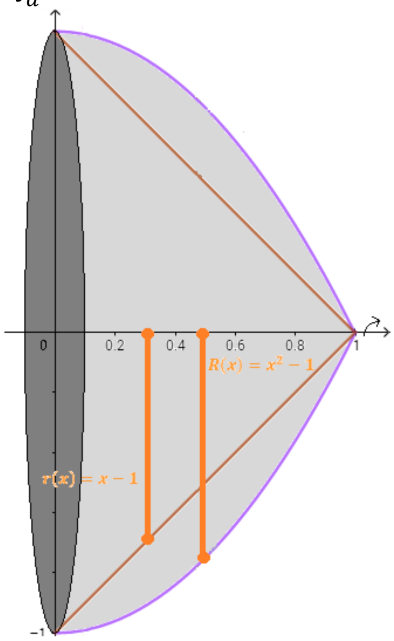
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_0^1 [x - 1 - (x^2 - 1)]\, dx = \int_0^1 (x - 1 - x^2 + 1)\, dx = \int_0^1 (x - x^2)\, dx$$

$$= \int_0^1 x\, dx - \int_0^1 x^2\, dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 - \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{2}\left(1^2 - 0^2\right) - \frac{1}{3}\left(1^3 - 0^3\right) = \mathbf{\frac{1}{6}}$$

b. Calcule el volumen del sólido generado cuando el área delimitada por ambas curvas gira alrededor del eje x. Indique el método empleado.

Para calcular el volumen del sólido se puede emplear arandelas o casquillos cilíndricos:

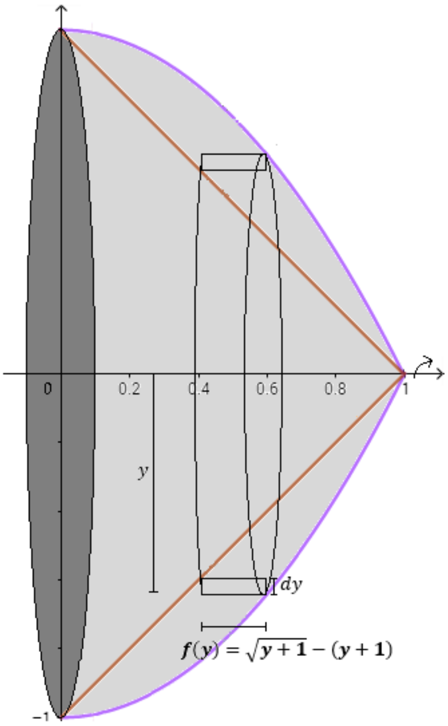
- ***Por el método de arandelas***: $V = \int_a^b \pi\, [R(x)^2 - r(x)^2]dx$



Al aplicarlo en este caso sería:

$$V = \int_0^1 \pi\,[(x^2-1)^2-(x-1)^2]\,dx = \pi\int_0^1 (x^4-2x^2+1-x^2+2x-1)\,dx$$
$$= \pi\int_0^1 (x^4-3x^2+2x)\,dx = \pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{3x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{1}{5}\pi}$$

- ***Por el método casquillos cilíndricos:*** $V=\int_c^d 2\,\pi\,r\,f(y)dy$



$$V=\int_{-1}^{0} 2\,\pi\,y\,[\sqrt{y+1}-(y+1)]\,dy = 2\,\pi\int_{-1}^{0} y\,[\sqrt{y+1}-y-1]dy$$
$$=2\,\pi\int_{-1}^{0}\left(y\sqrt{y+1}-y^2-y\right)dy = 2\pi\left[\frac{2}{5}(y+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(y+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{0}$$
$$=\left|-\frac{1}{5}\pi\right| = \boldsymbol{\frac{1}{5}\pi}$$

c. Plantee (no resuelva) una integral que permita calcular la longitud de curva de la función $\boldsymbol{f(x)}$ en el intervalo $[0,1]$

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \boldsymbol{\int_0^1\sqrt{1+4x^2}dx}$$

Cálculos auxiliares: $y=x^2+1 \to y'=2x \to (y')^2=(2x)^2=4x^2$