ASIGNATURA	Cálculo I	AÑO	2018	TEMA	1

Instrucciones: coloque nombre y apellido **en cada hoja** que va a entregar. Lea atentamente cada consigna. Desarrolle detalladamente y con letra clara los ejercicios para obtener el puntaje completo. Puede usar lápiz o tinta para desarrollar los ejercicios, pero el **resultado final debe estar en tinta**. No se permite corrector, tache si es necesario. Cuando finalice, indique el número de hojas empleadas en el encabezado. Debe obtener un **mínimo de 60 puntos para aprobar** el examen. Dispone de **2 horas** para su resolución. ÉXITO!

1. Indique Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. **Justifique las respuestas falsas mediante contraejemplo o respuesta correcta**. Se considera el puntaje sólo si la respuesta está debidamente justificada. **(2p c/u, Total 12p)**

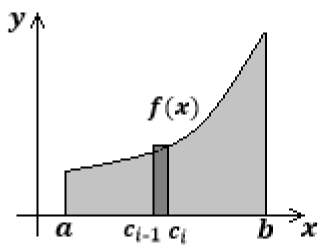
Enunciado	V	F
a. Si $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to c} p(x) = 0$, entonces se tiene que $\lim_{x\to c}[p(x)]^{f(x)} = 0$.		X
b. Dados $\lim_{x\to c} f(x) = 0$, $\lim_{x\to c} p(x) = \infty$ y $\lim_{x\to c} g(x) = 1$, las siguientes son formas indeterminadas de límites: $\lim_{x\to c}[g(x)]^{p(x)}$ y $\lim_{x\to c}[f(x) * p(x)]$.	X	
c. Supóngase que una función f es no negativa y creciente en $[a,b]$, si se divide el intervalo en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, y se toma el extremo derecho c_i de cada subintervalo para obtener $f(c_i)$ en la suma de Riemann, entonces se obtiene una aproximación por defecto del área bajo la curva.		X
d. Si f es continua en el intervalo $[a,b]$, entonces el área de la región acotada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ está dada por $\int_a^b f(x)dx$.		X
e. Si f es una función impar, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0$.		X
f. Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ o si tiene a lo sumo un número finito de discontinuidades de salto allí, entonces f es integrable en $[a,b]$. Es decir, $\int_a^b f(x)dx$ existe.	X	

Respuestas **(Sólo considerar puntaje si se justifican las respuestas falsas adecuadamente)**

a. **FALSO,** $\lim_{x\to c}[p(x)]^{f(x)} = 0^0$ es una forma indeterminada de límite.

b. **VERDADERO,** $\lim_{x\to c}[g(x)]^{p(x)} = 1^\infty$ y $\lim_{x\to c}[f(x) * p(x)] = 0 * \infty$ son formas indeterminadas de límite.

c. **FALSO,** se obtiene el área por exceso.



d. **FALSO,** f debe ser no negativa para que el área esté dada por $\int_a^b f(x)dx$.

e. **FALSO,** los límites de integración deben ser finitos y tener un intervalo cerrado para aplicar la definición de integral de una función impar: "Sea f en un intervalo cerrado $[-a,a]$, si f es una función *impar*, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$". Si se encara desde el punto de vista de una integral impropia, la afirmación también sería falsa dado que falta la hipótesis de que la función sea integrable.

f. **VERDADERO.** Para que una función no sea integrable, necesita ser suficientemente discontinua para que la región entre su gráfica y el eje x no pueda aproximarse bien por rectángulos cada vez más delgados.

Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$

2. Evalúe la expresión dada, indique la indeterminación que se produce y encuentre el límite aplicando la regla de L'Hôpital: $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+tgx)^{cosec(4x)}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}(1+tgx)^{cosec(4x)}$ al evaluar este límite se obtiene la forma indeterminada 1^∞ por lo que debe aplicarse para el cálculo:

> Si $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x) = L$ entonces:
>
> $$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} e^{\ln f(x)} = e^L$$
>
> Aquí a puede ser finito o infinito.

Se toma $f(x) = (1+tgx)^{cosec(4x)}$ y se determina $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln f(x)$:

$$ln\, f(x) = ln\left[(1+tgx)^{cosec(4x)}\right] = cosec(4x) * ln(1+tgx)$$

0/0 Aplico L'H

$$\lim_{x\to 0^+} ln\, f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{sen\,(4x)}ln(1+tgx) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+tgx} * \sec^2(x)}{\cos(4x)*4} = \frac{1*1}{1*4} = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto,

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0^+}(1+tgx)^{cosec(4x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln f(x)} = e^{\frac{1}{4}}}$$

3. Determine la derivada de: $f(x) = \int_{1-x^2}^{\sqrt{x}} t \cdot sen\,(t)dt$

Para obtener la derivada se debe aplicar el TFCI:

$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$ en nuestro caso $F(x) = \int_{1-x^2}^{\sqrt{x}} t \cdot sen\,(t)dt$. Puesto que los límites de integración son dos funciones de x, se aplican propiedades de integrales para llegar a la forma conveniente y se tiene en cuenta la regla de la cadena, por lo que:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt\right] = \frac{d}{dx}\left[-\int_a^{u(x)} f(t)dt + \int_a^{v(x)} f(t)dt\right] = -f[u(x)] * u'(x) + f[v(x)] * v'(x)$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_{1-x^2}^{a} t \cdot sen\,(t)dt + \int_a^{\sqrt{x}} t \cdot sen\,(t)dt\right] = \frac{d}{dx}\left[\int_{1-x^2}^{a} t \cdot sen\,(t)dt + \int_a^{\sqrt{x}} t \cdot sen\,(t)dt\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left[-\int_a^{1-x^2} t \cdot sen\,(t)dt + \int_a^{\sqrt{x}} t \cdot sen\,(t)dt\right]$$

$$= -(1-x^2)sen(1-x^2)(-2x) + \sqrt{x}\, sen(\sqrt{x})\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \boldsymbol{2x(1-x^2)sen(1-x^2) + \frac{1}{2}sen(\sqrt{x})}$$

4. Calcule las siguientes integrales:

a. $\int cos\,(\sqrt{x})\,dx = \int 2u\,cos(u)\,du = 2\int u\,cos(u)\,du = 2\,[u\,sen(u) - \int sen(u)\,du]$

$$= 2\,[u\,sen(u) + \cos(u) + C]$$

$$= 2\,\boldsymbol{[\sqrt{x}\,sen(\sqrt{x}) + \cos(\sqrt{x})] + C}$$

1º Se elige una sustitución conveniente: $\boldsymbol{u} = \sqrt{\boldsymbol{x}} \to u^2 = x \to \boldsymbol{2udu} = \boldsymbol{dx}$

2º Se integra por partes: $p = u \to dp = du$

$$dv = \cos(u)\, du \to v = sen(u)$$

3º Una vez realizada la integración se expresa en función de la variable x, empleando la sustitución elegida inicialmente.

b. $\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} dx$

Se observa que es una integral que debe resolverse mediante sustitución trigonométrica

$$x = \frac{1}{3}\, sen(\theta) \to x^2 = \frac{1}{9}\, sen^2(\theta)$$

$$dx = \frac{1}{3}\cos(\theta)\, d\theta$$

Se efectúa la sustitución correspondiente y se resuelve la integral:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} dx = \int \frac{(1/3)\cos(\theta) d\theta}{\sqrt{9\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9} sen^2(\theta)\right)}} = \frac{1}{3}\int \frac{\cos(\theta) d\theta}{\sqrt{(1 - sen^2(\theta))}} = \frac{1}{3}\int d\theta = \frac{1}{3}\theta + C = \boldsymbol{\frac{1}{3} arcsen(3x) + C}$$

c. $\int_1^2 \frac{1}{x^2-1} dx$

Al analizar la validez de la integral dada para los extremos de integración, se encuentra que existe una discontinuidad para $x = 1$, por lo que se trata de una integral impropia. Adicionalmente, se puede resolver por fracciones simples:

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2-1} dx = \lim_{b\to 1} \int_b^2 \frac{1}{(x-1)(x+1)} dx = \lim_{b \to 1} \int_b^2 \left[\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}\right] dx$$

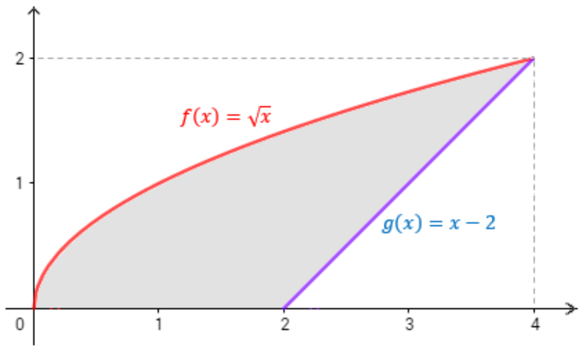
$$= \frac{1}{2}\left[\lim_{b\to 1} \ln(x-1)|_b^2 - \ln(x+1)|_b^2\right] = \frac{1}{2}\lim_{b\to 1}[\ln(1) - \ln(1-b) - \ln(3) + \ln(1+b)] = \infty$$

Por lo tanto, la **integral diverge**.

Cálculo auxiliar:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{1-x^2} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2}; B = -\frac{1}{2}$$

5. Dadas $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x - 2$



a. Indique la integral expresión que permite calcular el área delimitada por $f(x)$, $g(x)$ y el eje x:
i. Respecto de x; ii. Respecto de y.

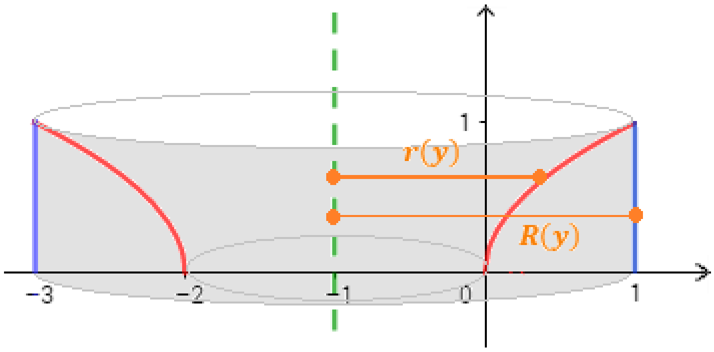
Puesto que ambas funciones son no negativas, el área se calcula como $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

i. $A_x = \int_0^2 \sqrt{x}\, dx + \int_2^4 [\sqrt{x} - (x-2)]dx = \boldsymbol{\int_0^2 \sqrt{x}\, dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2)\, dx}$

ii. $A_y = \int_0^2 [(y+2) - y^2]\, dy = \boldsymbol{\int_0^2 (-y^2 + y + 2)\, dy}$

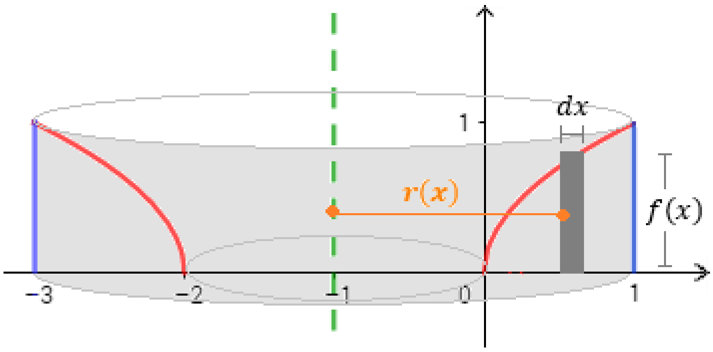
b. Plantee una integral que permita calcular el volumen del sólido generado cuando el área delimitada por $f(x)$, $y = 0$ y $x = 1$ gira alrededor de $x = -1$. Indique el método empleado.

Por el método de arandelas: $V = \int_c^d \pi\, [R(y)^2 - r(y)^2]dy$



$$V = \int_0^1 \pi\, [2^2 - (1+y^2)^2]dy = \boldsymbol{\pi \int_0^1 (-y^4 - 2y^2 + 3)\, dy}$$

Por el método casquillos cilíndricos: $V = \int_a^b 2\, \pi\, r\, f(x)dx$



$$\boldsymbol{V = \int_0^1 2\, \pi\, (x+1)\, \sqrt{x}\, dx}$$

Plantee (no resuelva) una expresión que le permita calcular el área de superficie del sólido que se obtiene cuando $f(x)$ gira alrededor del eje x, en $[1,2]$

Debe confeccionar el gráfico correspondiente en a. y b. para que el puntaje se considere en forma completa.

$$A = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_1^2 \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx = 2\pi \int_1^2 \sqrt{\left(1 + \frac{1}{4x}\right) x dx} = \boldsymbol{2\pi \int_1^2 \sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right)} dx}$$

Cálculos auxiliares: $y = \sqrt{x} \to y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \to (y')^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{1}{4x}$

6. Demuestre que cualquier integrante de la familia de funciones $y = (lnx + C)/x$ es una solución de la ecuación diferencial: $x^2y' + xy = 1$

   Para demostrar que cualquier integrante de la familia de funciones dada es solución de la ecuación diferencial se debe derivar y luego verificar si al reemplazar y e y' en dicha ecuación se cumple la igualdad:

$$y = \frac{lnx + C}{x}$$

$$\boldsymbol{y'} = \frac{\frac{1}{x} * x - (\ln(x) + C) * 1}{x^2} = \boldsymbol{\frac{1 - ln(x) - C}{x^2}}$$

$$x^2y' + xy = x^2\left(\frac{1 - ln(x) - C}{x^2}\right) + x\left(\frac{lnx + C}{x}\right) = 1 - \ln(x) - C + \ln(x) + C = \mathbf{1}$$

Por lo tanto, se demuestra que la familia dada es solución de la ecuación diferencial.

RESOLUCIÓN TERCER PARCIAL

ASIGNATURA	Cálculo I	AÑO	2018	TEMA	2

Instrucciones: coloque nombre y apellido **en cada hoja** que va a entregar. Lea atentamente cada consigna. Desarrolle detalladamente y con letra clara los ejercicios para obtener el puntaje completo. Puede usar lápiz o tinta para desarrollar los ejercicios, pero el **resultado final debe estar en tinta**. No se permite corrector, tache si es necesario. Cuando finalice, indique el número de hojas empleadas en el encabezado. Debe obtener un **mínimo de 60 puntos para aprobar** el examen. Dispone de **2 horas** para su resolución. ÉXITO!

1. Indique Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. **Justifique las respuestas falsas mediante contraejemplo o respuesta correcta**. Se considera el puntaje sólo si la respuesta está debidamente justificada. **(2p c/u, Total 12p)**

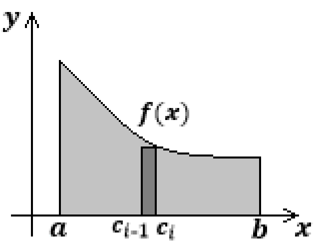
Enunciado	V	F
Si $\lim_{x \to c} f(x) = 1$ y $\lim_{x \to c} p(x) = \infty$, entonces se tiene que $\lim_{x \to c} [f(x)]^{p(x)}$ es forma indeterminada de límite.	X	
Dados $\lim_{x \to c} f(x) = 0$, $\lim_{x \to c} p(x) = \infty$ y $\lim_{x \to c} g(x) = 1$, las siguientes son formas indeterminadas de límites: $\lim_{x \to c} [p(x)]^{g(x)}$ y $\lim_{x \to c} [f(x) + p(x)]$.		X
Supóngase que una función f es no negativa y decreciente en $[a, b]$, si se divide el intervalo en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, y se toma el extremo derecho c_i de cada subintervalo para obtener $f(c_i)$ en la suma de Riemann, entonces se obtiene una aproximación por exceso del área bajo la curva.		X
Si f es continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$, entonces el **área** de la región acotada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ está dada por $\int_a^b f(x)dx$.	X	
Si f es una función *par*, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\int_0^{\infty} f(x)dx$.		X
Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces de acuerdo al Teorema del valor medio para integrales existe un número c en el intervalo cerrado $[a, b]$, tal que: $f'(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.		X

Respuestas (Sólo considerar puntaje si se justifican las respuestas falsas adecuadamente) (2p c/u)

a. **VERDADERO,** $\lim_{x \to c} [f(x)]^{p(x)} = 0^{\infty}$ no es una forma indeterminada de límite.

b. **FALSO,** $\lim_{x \to c} [p(x)]^{g(x)} = \infty^1 = \infty$ y $\lim_{x \to c} [f(x) + p(x)] = 0 + \infty = \infty$ no son formas indeterminadas de límite.

c. **FALSO,** se obtiene el área por defecto.



d. **VERDADERO.** La definición de área cumple con todas las hipótesis.

e. **FALSO,** los límites de integración deben ser finitos y tener un intervalo cerrado para aplicar la definición de integral de una función par: "Sea f en un intervalo cerrado $[-a, a]$, si f es una función *par*, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$". Si se encara desde el punto de vista de una integral impropia, la afirmación también sería falsa dado que falta la hipótesis de que la función sea integrable.

f. **FALSO.** El teorema del valor medio establece que: $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

2. Evalúe la expresión dada, indique la indeterminación que se produce y encuentre el límite aplicando la regla de L'Hôpital: $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{ln(x)}\right]$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right]$ al evaluar esta expresión se produce una indeterminación del tipo $\infty-\infty$ por lo que se debe trabajar algebraicamente para que resulte una indeterminación correspondiente para aplicar L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right]=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x)-(x-1)}{(x-1).\,ln(x)}\overset{0/0\text{ Aplico L'H}}{=}\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln(x)+\frac{1}{x}(x-1)}\overset{0/0\text{ Aplico L'H}}{=}\lim_{x\to 1^+}\frac{-1/x^2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

3. Determine la derivada de: $f(x)=\int_{\sqrt{x}}^{(1-x)} v\cdot sen\,(v)dv$

Para obtener la derivada se debe aplicar el TFCI:

$F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right]=f(x)$ en nuestro caso $F(x)=\int_{\sqrt{x}}^{(1-x)} v\cdot sen\,(v)dv$. Puesto que los límites de integración son dos funciones de x, se aplican propiedades de integrales para llegar a la forma conveniente y se tiene en cuenta la regla de la cadena, por lo que:

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt\right]=\frac{d}{dx}\left[-\int_a^{u(x)} f(t)dt+\int_a^{v(x)} f(t)dt\right]=-f[u(x)]*u'(x)+f[v(x)]*v'(x)$$

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_{\sqrt{x}}^{a} v\cdot sen\,(v)dv+\int_a^{(1-x)} v\cdot sen\,(v)dv\right]=\frac{d}{dx}\left[-\int_a^{\sqrt{x}} v\cdot sen\,(v)dv+\int_a^{(1-x)} v\cdot sen\,(v)dv\right]$$

$$=-\sqrt{x}\,sen(\sqrt{x})\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)+(1-x)\,sen(1-x)(-1)$$

$$=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{sen(\sqrt{x})-(1-x)sen(1-x)}$$

4. Calcule las siguientes integrales:

a. $\int sen\,[\ln(x)]\,dx=\int sen(u)\,e^u du=e^u\,sen(u)-\int cos(u)\,e^u du=e^u\,sen(u)-[e^u\,cos(u)-\int -sen(u)\,e^u du]$

$$\int sen(u)\,e^u du=e^u\,sen(u)-e^u\,cos(u)-\int sen(u)\,e^u du$$

$$2\int sen(u)\,e^u du=e^u\,sen(u)-e^u\,cos(u)$$

$$\int sen(u)\,e^u du=\frac{e^u\,sen(u)-e^u\,cos(u)}{2}+C$$

$$\boldsymbol{\int sen\,[\ln(x)]\,dx=\frac{x}{2}[sen(\ln x)-\cos(lnx)]+C}$$

1º Se elige una sustitución conveniente: $\boldsymbol{u}=l\,n(x)\to e^u=x\to \boldsymbol{e^u du=dx}$

2º Se integra por partes: $p=sen(u)\to dp=\cos(u)\,du$
$dv=e^u du\to v=e^u$

3º Se vuelve a integrar por partes dado que se trata de una integral cíclica:
$p = cos(u) \rightarrow dp = -sen(u)\, du$
$dv = e^u du \rightarrow v = e^u$

4º Una vez realizada la integración se expresa en función de la variable x, empleando la sustitución elegida inicialmente.

b. $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{4\left(x^2-\frac{1}{4}\right)}} dx$

Se observa que es una integral que debe resolverse mediante sustitución trigonométrica:

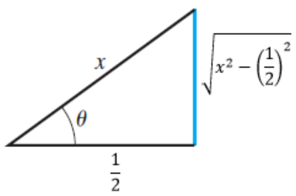
$x = \frac{1}{2}\, sec(\theta) \rightarrow x^2 = \frac{1}{4}\sec^2(\theta)$ y $\theta = arcsec(2x)$

$dx = \frac{1}{2} sec(\theta)\, tan(\theta) d\theta$

Se efectúa la sustitución correspondiente y se resuelve la integral:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4\left(x^2-\frac{1}{4}\right)}} dx = \int \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\sec(\theta)\tan(\theta)\, d\theta}{\sqrt{4\left(\frac{1}{4}\sec^2(\theta)-\frac{1}{4}\right)}} = \frac{1}{2}\int \frac{\sec(\theta)\tan(\theta) d\theta}{\sqrt{(sec^2(\theta)-1)}} = \frac{1}{2}\int \sec(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2} ln|\tan(\theta)+\sec(\theta)| + C =$$
$$\frac{1}{2} ln|\tan(arcsec(2x)) + \sec(arcsec(2x))| = \boldsymbol{\frac{1}{2} ln\left|\sqrt{4x^2-1} + 2x\right| + C}$$

Teniendo en cuenta que de tabla: $\int \sec(\theta)\, d\theta = ln|\tan(\theta)+\sec(\theta)| + C$ y que de acuerdo con la siguiente figura:



se tiene que $\tan(\theta) = \frac{\sqrt{x^2-1/4}}{1/2} = \sqrt{\frac{x^2-1/4}{1/4}} = \sqrt{4x^2-1}$

c. $\int_1^2 \frac{1}{1-x^2} dx$

Al analizar la validez de la integral dada para los extremos de integración, se encuentra que existe una discontinuidad para $x = 1$, por lo que se trata de una integral impropia. Adicionalmente, se puede resolver por fracciones simples:

$$\int_1^2 \frac{1}{1-x^2} dx = \lim_{b\to 1^+} \int_b^2 \frac{1}{(1-x)(x+1)} dx = \lim_{b\to 1^+} \int_b^2 \left[\frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(x+1)}\right] dx$$

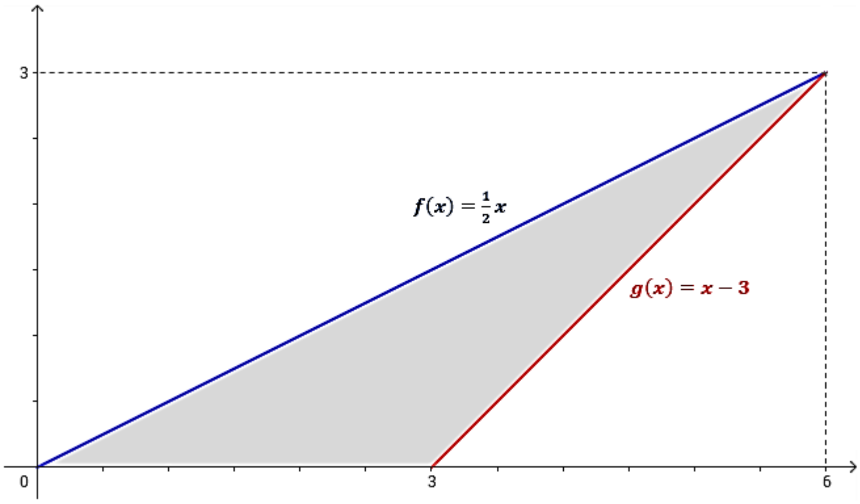
$$= \frac{1}{2}\left[\lim_{b\to 1^+} \ln(1-x)|_b^2 + \ln(x+1)|_b^2\right] = \frac{1}{2}\lim_{b\to 1^+}[\ln(-1) - \ln(1-b) + \ln(3) + \ln(1+b)] = \infty$$

Cálculo auxiliar:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} = \frac{A(1+x)+B(1-x)}{1-x^2} \Rightarrow \begin{cases} A - B = 0 \\ A + B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2}; B = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la **integral diverge**.

5. Dadas $f(x) = \frac{1}{2}x$ y $g(x) = x - 3$



a. Indique la integral expresión que permite calcular el área: i. Respecto de x; ii. Respecto de y.

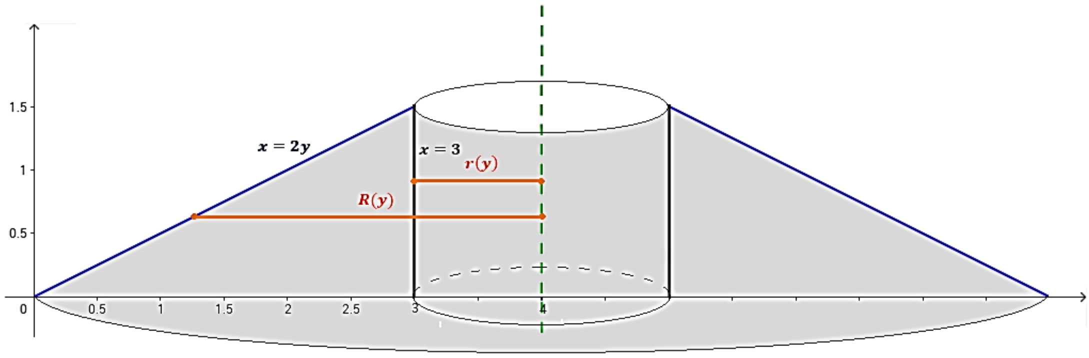
Puesto que ambas funciones son no negativas, el área se calcula como $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

i. $A_x = \int_0^3 \frac{1}{2}x\,dx + \int_3^6 \left[\frac{1}{2}x - (x-3)\right]dx = \boldsymbol{\frac{1}{2}\int_0^3 x\,dx + \int_3^6 \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)dx}$

ii. $A_y = \int_0^3 [(y+3) - 2y]\,dy = \boldsymbol{\int_0^3 (-y+3)\,dy}$

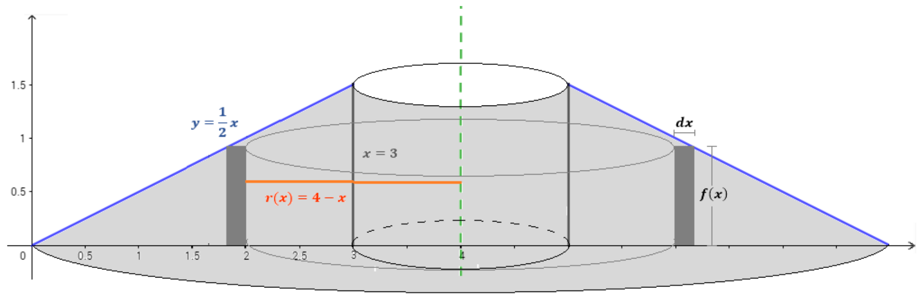
b. Plantee una integral que permita calcular el volumen del sólido generado cuando el área delimitada por $f(x)$, $y = 0$ y $x = 3$ gira alrededor de $x = 4$. Indique el método empleado.

Por el método de arandelas: $V = \int_c^d \pi\,[R(y)^2 - r(y)^2]dy$



$$V = \int_0^{3/2} \pi\,[(2y)^2 - (4-3)^2]dy = \boldsymbol{\pi \int_0^{3/2} (4y^2 - 1)\,dy}$$

Por el método casquillos cilíndricos: $V = \int_a^b 2\,\pi\, r\, f(x)dx$



$$V = \int_0^3 2\,\pi\,(4-x)\frac{1}{2}x\,dx = \pi\int_0^3 (4x - x^2)\,dx$$

d. Plantee una expresión que le permita calcular el área de superficie del sólido que se obtiene cuando $g(x)$ gira alrededor del eje x, en $[0,1]$

$$A = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_0^1 (x-3)\sqrt{1+1}dx = \mathbf{2\sqrt{2}\,\pi\int_1^2 (x-3)dx}$$

Cálculos auxiliares: $y = x - 3 \rightarrow y' = 1 \rightarrow (y')^2 = (1)^2 = 1$

6. Compruebe que cualquier integrante de la familia de funciones $y = \frac{\ln(x)+C}{x}$ es una solución de:

$$x^2y' + xy = 1$$

Para demostrar que cualquier integrante de la familia de funciones dada es solución de la ecuación diferencial se debe derivar y luego verificar si al reemplazar y e y' en dicha ecuación se cumple la igualdad:

$$y = \frac{lnx + C}{x}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{x}*x - (\ln(x)+C)*1}{x^2} = \frac{1 - ln(x) - C}{x^2}$$

$$x^2y' + xy = x^2\left(\frac{1-ln(x)-C}{x^2}\right) + x\left(\frac{lnx+C}{x}\right) = 1 - \ln(x) - C + \ln(x) + C = \mathbf{1}$$

Por lo tanto, se demuestra que la familia dada es solución de la ecuación diferencial.