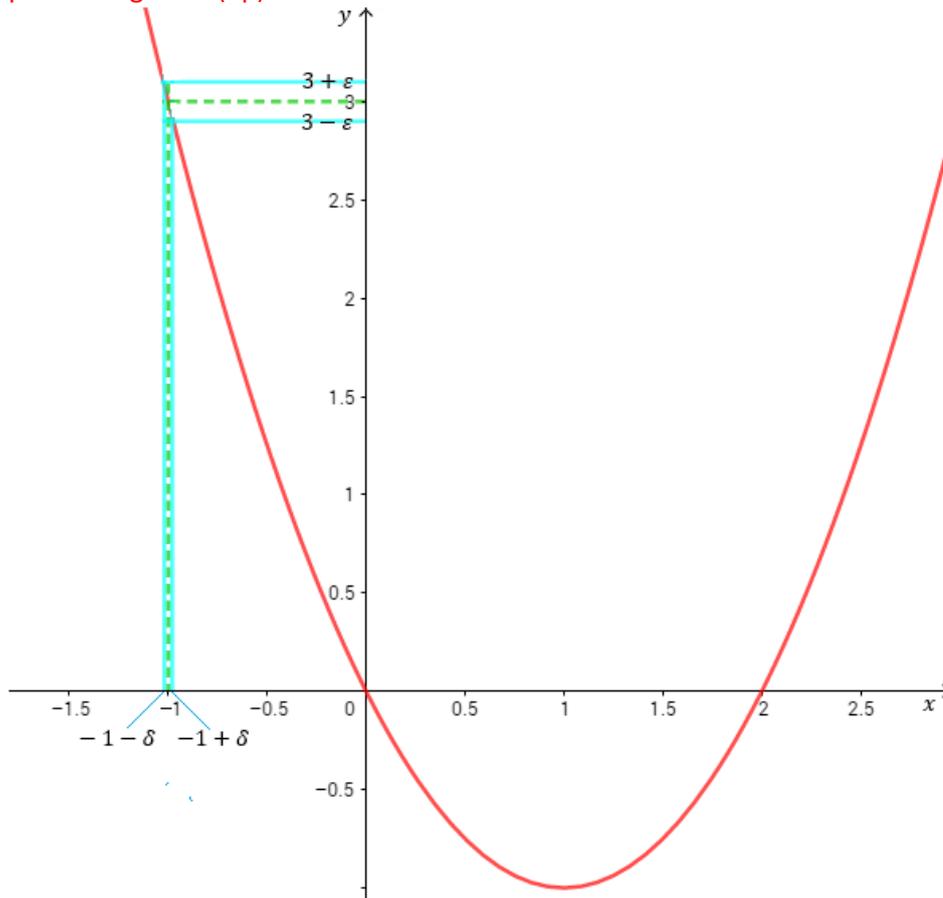


ASIGNATURA	Cálculo I	AÑO	2019	TEMA	1	FECHA	09-09 al 13-09
------------	-----------	-----	------	------	---	-------	----------------

4.	<p>Suponga que la desigualdad $\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} \leq \frac{1-\cos x}{x^2} \leq \frac{1}{2}$ se cumple para valores de x cercanos a 0. ¿Se puede concluir algo acerca del $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$?</p> <p><u>Resolución:</u></p> $1/2 - \frac{x^2}{24} \leq \frac{1 - \cos x}{x^2} \leq 1/2$ <p>Se determina que: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24}\right) = \frac{1}{2}$ y que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (2p)</p> <p>Como ambos límites son iguales (1p) y se cumple que $g(x) \leq h(x) \leq f(x)$, por Teorema del Emparedado es posible afirmar que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right) = 1/2$ (1p)</p>	4 p
5.	<p>Demuestre el siguiente límite por definición: $\lim_{x \rightarrow -1} x^2 - 2x = 3$. A continuación, interprete gráficamente considerando $\varepsilon = 0,1$.</p> <p><u>Resolución:</u></p> $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 2x) = 3$ $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / 0 < x+1 < \delta \Rightarrow x^2 - 2x - 3 < \varepsilon \quad (4p)$ <p>Trabajo con la Tesis: $x^2 - 2x - 3 < \varepsilon$</p> $ (x-3)(x+1) < \varepsilon \quad \text{Aplico Propiedad del valor absoluto: } a \cdot b = a b $ $ x-3 x+1 < \varepsilon \quad (1)$ <p>Por hipótesis $x+1$ está acotado, sin embargo $x-3$ no, por lo cual se emplea la misma δ para acotarlo: (1p)</p> $ x+1 < \delta$ $-\delta < x+1 < \delta$ $-\delta - 4 < x+1 - 4 < \delta - 4 \quad \text{Sumo } (-4) \text{ a todos los miembros de la desigualdad.}$ $-\delta - 4 < x - 3 < \delta - 4$ $-(\delta+4) < x-3 < \delta-4 < \delta+4 \quad \text{Por razonamiento deductivo (considerando que } \delta \text{ tiene que ser el mismo hacia la derecha y hacia la izquierda)}$ $ x-3 < \delta+4 \quad (2)$ <p>Volvemos a la ecuación (1)</p> $ x+1 \cdot x-3 < \varepsilon$ $(\delta+4) \cdot \delta < \varepsilon$ $\delta^2 + 4\delta + 4 - 4 < \varepsilon$ $(\delta+2)^2 - 4 < \varepsilon$ $(\delta+2)^2 < \varepsilon + 4 \Rightarrow \delta+2 < \sqrt{\varepsilon+4}$ $\delta < \sqrt{\varepsilon+4} - 2$ <p>Podemos pedir al alumno que calcule δ para $\varepsilon = 0,1$ (Obtener expresión $\delta(\varepsilon)$, independientemente de la vía usada (5p))</p> $\therefore \delta = \sqrt{4,1} - 2 = 2,02 - 2 = 0,02$	15 p

ASIGNATURA	Cálculo I	AÑO	2019	TEMA	1	FECHA	09-09 al 13-09
-------------------	-----------	------------	------	-------------	---	--------------	----------------

Interpretación gráfica (5p)



6.	Resuelva los siguientes límites sin utilizar la regla de L'Hôpital.	(15p c/u)	30 p
a)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x} - x $	b)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x)}{x}$

ASIGNATURA	Cálculo I	AÑO	2019	TEMA	1	FECHA	09-09 al 13-09
------------	-----------	-----	------	------	---	-------	----------------

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x} - |x|) \stackrel{\infty - \infty \text{ (1p)}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x} - (-x) \text{ (3p)}$$

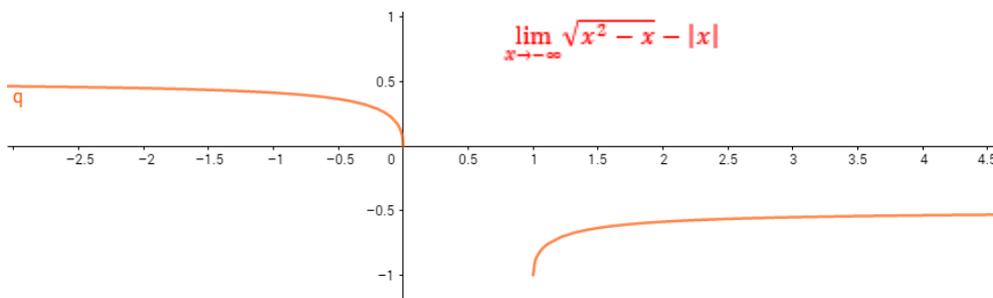
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x} + x \stackrel{(3p)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x} - x}{\sqrt{x^2 - x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - x} - x}$$

Aplicación concepto V.A. (3p) cada vez que se aplica

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} - x} \stackrel{\infty/\infty \text{ (1p)}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x/|x| \text{ (3p)}}{\sqrt{\frac{x^2 - x}{|x|^2}} - \frac{x}{|x|}} \stackrel{(1p)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x/(-x)}{\sqrt{\frac{x^2 - x}{x^2}} - \frac{x}{-x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2} \text{ (3p)}$$



(Identificar indeterminación 1p)

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tan(3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sec(3x)}{\cos(3x)} \cdot \frac{1}{x} \right) \text{ (2p)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\cos(3x)} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sec(3x)}{x} = \text{(4p)}$$

$$= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sec(3x)}{x} \text{ (1p)}$$

sustitución (3p)
 $3x = t \rightarrow x = \frac{t}{3}$
 $x \rightarrow \infty \rightarrow t \rightarrow \infty$

$$= 1 \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sec(t)}{\frac{t}{3}} \text{ (2p)}$$

$$= 3 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sec t}{t} = 3 \cdot 1 = \boxed{3} \text{ (2p)}$$

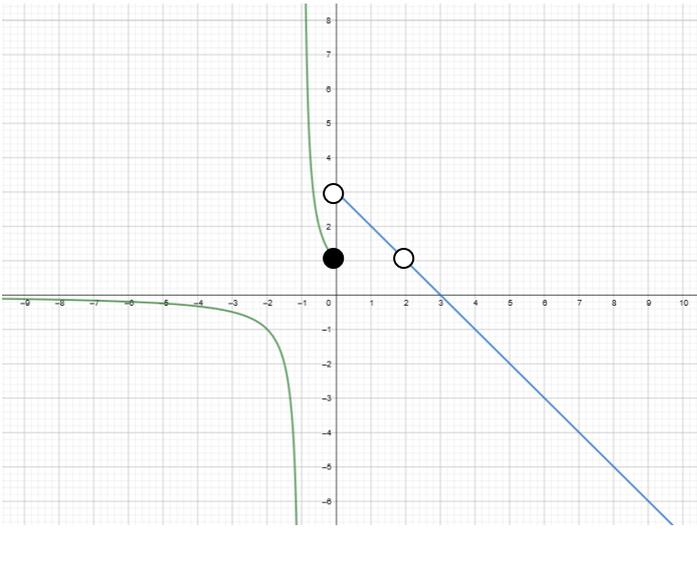
7. a) Escribe a continuación las tres condiciones que deben satisfacerse para que una función $f(x)$ sea continua en un punto $x = c$. (1p c/u - Total 3p) 15 p

Condición 1	Condición 2	Condición 3
f(c) está definida	$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L = f(c)$

b) Dada $f(x)$, grafique (4.5p) y encuentre los valores de x en los cuales la función es discontinua. Complete la siguiente tabla. (12 p)

Resolución: CA: $-x^2 + 5x - 6 = 0$ cuando $x = 2$; $x = 3$

ASIGNATURA	Cálculo I	AÑO	2019	TEMA	1	FECHA	09-09 al 13-09
------------	-----------	-----	------	------	---	-------	----------------

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & x \leq 0 \\ \frac{-x^2 + 5x - 6}{x-2} & x > 0 \end{cases}$	¿Se cumple la condición 1? (0.5 p)	¿Se cumple la condición 2? (0.5 p) Debe estar justificado para obtener el puntaje	¿Se cumple la condición 3? (0.5 p)	Tipo de discontinuidad (0.5 p)
Valores de "x" (0,5 p c/u)				
x=-1	No Cumple $f(-1)$ no está def.	No Cumple $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \infty$	No cumple	Inevitable de salto infinito
x=0	Sí cumple $f(0) = 1$	No Cumple $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$	No cumple	Inevitable de salto finito
x=2	No cumple $f(3)$ no está def.	Sí cumple $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$	No cumple	Evitable
<div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-left: 20px;"> <p>Curvas (1,5p) Asíntota Vertical (1p) Discontinuidad x=0 (1p) Discontinuidad x=2 (1p)</p> </div> </div>				
8.	Dada $f(x) = -\frac{x^3}{x^2-1}$ determine: <ul style="list-style-type: none"> a) Dominio implícito (2p) $D[f]: x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ b) Paridad $f(-x) = -\frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{x^3}{x^2-1} = -f(x)$ (1p) Luego la función es IMPAR (1p) c) Intersecciones con los ejes. Intersección con el eje y: $y=0$ (0,5p) Intersección con el eje x: $x=0$ (0,5p) La gráfica interseca ambos ejes en el origen (0,0) (1p) d) Si tiene asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas). Justifique calculando todos los límites que sean necesarios y determinando la ecuación de las asíntotas. (7p) 			20 p
Análisis de Asíntotas Verticales: $x = -1$ $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} -\frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = +\infty$ (0,5p) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} -\frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = -\infty$ (0,5p)				

ASIGNATURA	Cálculo I	AÑO	2019	TEMA	1	FECHA	09-09 al 13-09
-------------------	-----------	------------	------	-------------	---	--------------	----------------

ASÍNTOTA VERTICAL: $x = -1$ (1p)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = +\infty \quad (0,5p)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = -\infty \quad (0,5p)$$

ASÍNTOTA VERTICAL: $x = 1$. (1p)

Análisis de Asíntotas Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

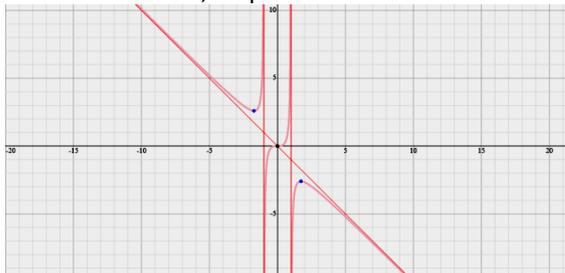
No posee (1p)

Análisis de Asíntotas Oblicuas:

$$f(x) = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -x - \frac{x}{x^2 - 1}$$

ASÍNTOTA OBLICUA: $y = -x$ (2p)

e) Graficar la función, empleando la información encontrada previamente. (5p)



Asíntota oblicua (1p)

Asíntota vertical (1p c/u)

Intersección (0,0) (1p)

Curva (2p)

f) Empleando la gráfica halle el Rango de la función. $I[f]: y \in \mathbb{R}$ (2p)

Puntaje Total: 100 p

Puntaje Obtenido:

Nota Final:

Se determina que: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) = 1$ y que $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ (2p)

Como ambos límites son iguales (1p) y se cumple que $g(x) \leq h(x) \leq f(x)$, por Teorema del Emparedado es posible afirmar que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \operatorname{sen} x}{2 - 2 \cos x}\right) = 1$ (1p)

5. Demuestre el siguiente límite por definición: $\lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 - 4x + 3 = 3$. A continuación, interprete gráficamente considerando $\varepsilon = 0,1$.

15 p

Resolución:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |2x^2 - 4x + 3 - 3| < \varepsilon \quad (4p)$$

Trabajo con la tesis

$$|2x^2 - 4x + 3 - 3| < \varepsilon$$

$$|2x^2 - 4x| < \varepsilon$$

$$2|x^2 - 2x| < \varepsilon$$

por prop de valor absoluto
 $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

$$\textcircled{1} \quad |x| \cdot |x - 2| < \varepsilon / 2 \quad (1p)$$

Por hipótesis $|x - 2| < \delta$

Trabajo con la hipótesis para acotar $|x|$

$$|x - 2| < \delta$$

$$-\delta < x - 2 < \delta$$

$$-\delta + 2 < x < \delta + 2$$

Despejo x

Por razonamiento de dominio

$$-(\delta + 2) < -\delta + 2 < x < \delta + 2$$

$$|x| < \delta + 2$$

Volviendo a la ec. ①

$$|x| \cdot |x - 2| < \varepsilon / 2$$

$$(\delta + 2) \cdot \delta < \varepsilon / 2$$

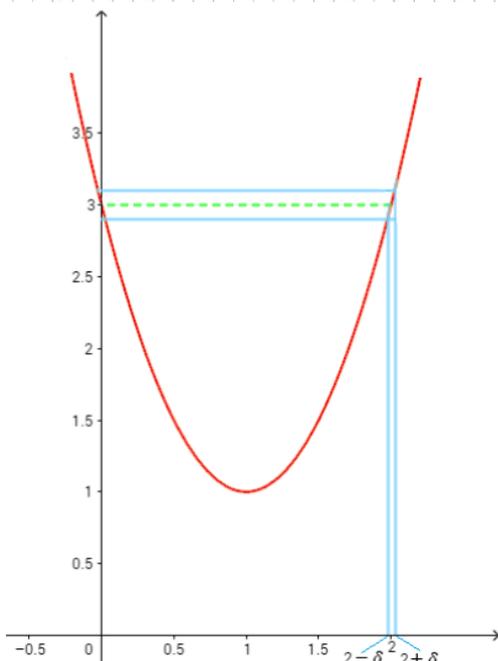
$$\delta^2 + 2\delta + 1 - 1 < \varepsilon / 2 \quad \text{completando cuadrados}$$

$$(\delta + 1)^2 - 1 < \varepsilon / 2$$

$$(\delta + 1)^2 < \frac{\varepsilon}{2} + 1 \Rightarrow \delta + 1 < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2} + 1} \Rightarrow \delta < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2} + 1} - 1$$

Obtener expresión $\delta(\varepsilon)$,
independientemente de la vía
usada (5p)

Interpretación gráfica (5p)



6. Resuelva los siguientes límites sin utilizar la regla de L'Hôpital

(15p c/u)

30 p

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{3-x}-2} =$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\text{sen}(2x-1)}{4x^2-1}$

Resolución

Indeterminación (1p)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{3-x}-2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{3-x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x+5}+2}{\sqrt{x+5}+2} \cdot \frac{\sqrt{3-x}+2}{\sqrt{3-x}+2} & (4p) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x+5})^2 - 2^2}{(\sqrt{3-x})^2 - 2^2} \cdot \frac{\sqrt{3-x}+2}{\sqrt{x+5}+2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+5-4}{3-x-4} \cdot \frac{\sqrt{3-x}+2}{\sqrt{x+5}+2} & (2p) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{-(x+1)} \cdot \frac{\sqrt{3-x}+2}{\sqrt{x+5}+2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3-x}+2}{\sqrt{x+5}+2} = \frac{-4}{4} = \boxed{-1} & (2p) \end{aligned}$$

Indeterminación (1p)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\text{sen}(2x-1)}{4x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\text{sen}(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)} & (4p) \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\text{sen}(2x-1)}{2x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{2x+1} & (4p) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen } u}{u} = \boxed{\frac{1}{2}} & (3p) \end{aligned}$$

CA
u = 2x-1 (3p)
si x → 1/2 ∴ u → 0

7. Resolución:

15 p

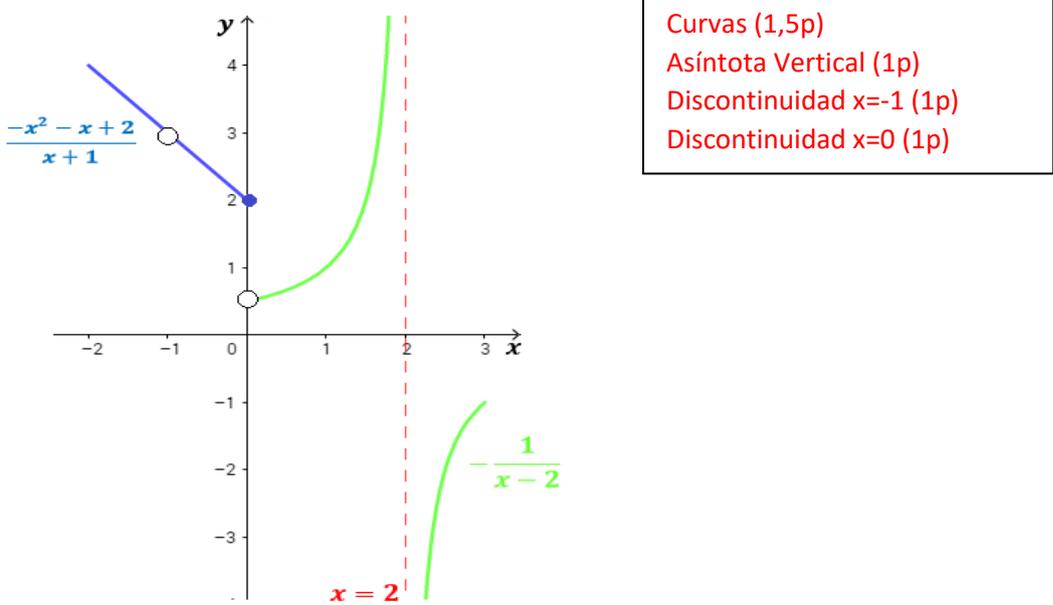
a)

Condición 1	Condición 2	Condición 3
f(c) está definida	$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L = f(c)$

b) CA: $-x^2 + x + 2 = 0$ cuando $x = -1$; $x = 2$

$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 2 & x \leq 0 \\ x + 1 & \\ \frac{1}{x-2} & x > 0 \end{cases}$	¿Se cumple la condición 1? (0.5 p)	¿Se cumple la condición 2? (0.5 p) Debe estar justificado para obtener el puntaje	¿Se cumple la condición 3? (0.5 p)	Tipo de discontinuidad (0.5 p)
Valores de "x" (0,5 p c/u)				
x = -1	No Cumple $f(-1)$ no está def.	Sí cumple $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 3$ $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 3$	No cumple	Evitable
x = 0	Sí cumple $f(0) = 2$	No Cumple $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1/2$	No cumple	Inevitable de salto finito

ASIGNATURA	Cálculo I	AÑO	2019	TEMA	2	FECHA	09-09 al 13-09
------------	-----------	-----	------	------	---	-------	----------------

x=2	No cumple f(2) no está def.	No Cumple $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$	No cumple	Inevitable salto infinito
				

<p>8. Dada $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$ determine:</p> <p>a) Dominio implícito (2p) $D[f]: x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$</p> <p>b) Paridad $f(-x) = \frac{-x+1}{(-x)^2-1} = \frac{-x+1}{x^2-1} \neq -f(x)$ (1p) - La función no es PAR ni IMPAR (1p)</p> <p>c) Intersecciones con los ejes. <u>Intersección con el eje y:</u> $y = -1$ (0.5p) <u>Intersección con el eje x:</u> no tiene (0.5p) La gráfica interseca al eje y en (0,-1) (1p)</p> <p>d) Si tiene asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas). Justifique calculando todos los límites que sean necesarios y determinando la ecuación de las asíntotas. <u>Análisis de Asíntotas Verticales:</u>(analizar $x = -1$ y $x = 1$) $x = -1$ $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x-1} = -1/2$ (0.5p) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x-1} = -1/2$ (0.5p) No existe asíntota en $x = -1$ (1p)</p> $x = 1$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$ (0.5p) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ (0.5p) <p>ASÍNTOTA VERTICAL : $x = 1$. (1p)</p> <p><u>Análisis de Asíntotas Horizontales:</u></p>	<p>20 p</p>
--	-------------

ASIGNATURA	Cálculo I	AÑO	2019	TEMA	2	FECHA	09-09 al 13-09
-------------------	-----------	------------	------	-------------	---	--------------	----------------

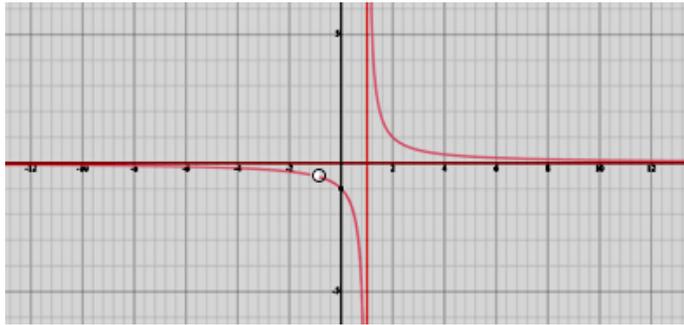
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

ASÍNTOTA HORIZONTAL: $y = 0$. (2p)

Análisis de Asíntotas Oblicuas:

No posee, dado que el grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio el denominador (2p)

e) Graficar la función, empleando la información encontrada previamente.



Asíntota oblicua (1p)

Asíntota vertical (1p c/u)

Intersección (0,-1) (1p)

Curva (2p)

f) Empleando la gráfica halle el Rango de la función. (2p) $I[f]: y \in \mathbb{R} - \{-1/2, 0\}$ (2p)

Puntaje Total: 100 p

Puntaje Obtenido:

Nota Final: