ASIGNATURA	Elementos de Cálculo I	AÑO	2019	TEMA	1	FECHA	09-09 al 13-09

	ACTIVIDADES	Puntaje Total
1.	Suponga que se realizan las siguientes transformaciones sobre la gráfica de la función $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Primero se la refleja con respecto al eje y, luego se la acorta verticalmente por un factor de $\frac{1}{2}$ y finalmente se la desplaza hacia arriba $\frac{2}{5}$ unidades. Determine la ecuación de la función transformada. Función original — $\sqrt[3]{x}$ Refleja en el eje y — $\sqrt[3]{(-x)}$ (1p) Acorta verticalmente por un factor de $\frac{1}{2}$ — $\frac{1}{2}\sqrt[3]{(-x)}$ (1p) Desplaza hacia arriba $\frac{2}{5}$ unidades — $\frac{1}{2}\sqrt[3]{(-x)}+\frac{2}{5}$ (1) Por lo tanto la función trasformada es $\boldsymbol{g(x)}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{(-x)}+\frac{2}{5}$ (1p)	**4 p**
2.	Determine la paridad (par, impar o ni par ni impar) de $f(x)=\frac{x^2-4\cos x}{\sec^2 x}$, y si su gráfica presentaría alguna simetría y de qué tipo. $f(-x)=\frac{(-x)^2-4\cos(-x)}{\sec^2(-x)}$ (0.5p) $=\frac{x^2-4\cos x}{\frac{1}{\cos^2(-x)}}$ (0.5p) $=\frac{x^2-4\cos x}{\frac{1}{\cos^2 x}}$ (1p) $=\frac{x^2-4\cos x}{\sec^2 x}=f(x)$ dónde en el segundo paso se utilizó que el coseno es una función par y que $\sec x=\frac{1}{\cos x}$. Por lo tanto $f(x)$es **PAR.** (1p) Como toda función par su gráfica es **SIMÉTRICA RESPECTO AL EJE Y.** (1p)	**4 p**
3.	Sean $f(x)=\ln(x^2+1)$ y $g(x)=e^{x+1}$, halle $(fog)(x)$ e indique su dominio. $(fog)(x)=f(g(x))=f(e^{x+1})=\ln(e^{(x+1)\,2}+1)=\ln(e^{(2x+2)}+1)$ (2p) El dominio de g(x) es $\mathbb{R}$ y su imagen (0,∞). El dominio de f(x) es $\mathbb{R}$. De esta forma, f se puede aplicar a todos los valores de g(x). Por lo tanto el dominio de fog es $\mathbb{R}$. (2p)	**4 p**
4.	Dadas las siguientes funciones determine si poseen inversa o no, justifique. **(2p)** Si la función tiene inversa hállela y verifique mediante la composición de la función con su inversa. **(6p)** a) $f(x)=-\sqrt[3]{x+7}+10$ b) $g(x)=\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^4}$ Resolución a) f(x) es uno a uno en todo su dominio por lo tanto posee inversa. (1p) Función original — $y=-\sqrt[3]{x+7}+10$ Despejo x (2p) — $y-10=-\sqrt[3]{x+7}$ $-y+10=\sqrt[3]{x+7}$ $(-y+10)^3=x+7$	**8 p**

$$(-y+10)^3-7=x$$
$$(10-y)^3-7=x$$

Intercambio x con y (1p) $\quad y=(10-x)^3-7$

Entonces $f^{-1}(x)=(10-x)^3-7$ (1p)

Verificación:
$(f^{-1}o\, f)(x)=((10-(-\sqrt[3]{x+7}+10))^3-7=((10+\sqrt[3]{x+7}-10))^3-7=x$ (2p)

b) g(x) no es uno a uno, por ejemplo en $x=-1$ y $x=1$ toma el mismo valor, por lo cual no posee inversa en todo su dominio. (1p)

5. Determine en los siguientes casos si existe o no el límite sin aplicar L'Hôpital. Si existe el límite calcúlelo, si no existe justifique adecuadamente. (Indique en cada caso las propiedades y/o teoremas empleados) **30 p**

a. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(2x)}{\tan(5x)}$ **(10p)**

Si evaluamos por sustitución directa este límite encontramos una indeterminación 0/0, por lo cual trabajaremos algebraicamente para salvar la indeterminación y evaluar el límite. (1p)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x)}{\tan(5x)}\overset{(1p)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(2x)}{\cos(2x)}\frac{\cos(5x)}{\text{sen}(5x)}\overset{(1p)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(2x)}{\text{sen}(5x)}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\cos(5x)}{\lim\limits_{x\to 0}\cos(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(2x)}{\text{sen}(5x)}\overset{(1p)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(2x)}{\text{sen}(5x)}\frac{x}{x}\overset{(1p)}{=}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\text{sen}(2x)}{x}}{\frac{\text{sen}(5x)}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}(2x)}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}(5x)}{x}}\overset{(1p)}{=}\frac{2\lim\limits_{t\to 0}\frac{\text{sen}\,t}{t}}{5\lim\limits_{u\to 0}\frac{\text{sen}\,u}{u}}\overset{(1p)}{=}\frac{2}{5}\qquad (1p)$$

El límite existe y es 2/5. (2p)

b. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$ **(10p)**

Si evaluamos por sustitución directa este límite encontramos una indeterminación 0/0, por lo cual trabajaremos algebraicamente para salvar la indeterminación y evaluar el límite. (1p)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}=$$

$$(2p)\ \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)}\frac{\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)}\overset{(2p)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{|x+3|-4}\overset{(2p)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x+3-4}$$

$$(1p)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x-1}\overset{(1p)}{=}\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x+3}+2\right)\overset{(2p)}{=}4$$

c. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+5x+4}{|x+1|}$ Nota: recuerde que el valor absoluto es una función definida por partes. **(10p)**

Si evaluamos por sustitución directa este límite encontramos una indeterminación 0/0 (1p), por lo cual trabajaremos algebraicamente para salvar la indeterminación y evaluar el límite si es posible. Dado que la función valor absoluto está definida de diferente forma para valores mayores y menores que -1, evaluaremos los límites laterales. (2p)

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & si\ x \geq -1 \\ -(x+1) & si\ x\ \leq -1 \end{cases} \quad (2p)$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+5x+4}{|x+1|} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+5x+4}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(x+4)(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} (x+4) = 3 \quad (2p)$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+5x+4}{|x+1|} = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+5x+4}{-(x+1)} = -\lim_{x\to -1^-} \frac{(x+4)(x+1)}{x+1} = -\lim_{x\to -1^-} (x+4) = -3 \quad (2p)$$

Dado que los límites laterales son diferentes, el límite NO EXISTE. (1p)

6. Sabiendo que: **(5p c/u, Total 10p)** **10 p**

$$\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - 1 \ \leq f(x) \leq \ \cos(\pi x) + 1 \qquad \text{para } 0 \leq x \leq 4$$

Indique si es posible o no calcular el límite en a) y en b). Justifique cada caso indicando cuál es el Teorema aplicado y verificando si se cumplen o no las hipótesis del mismo. Utilice el teorema para llegar al valor numérico del límite en caso de que exista.

a. $\lim_{x\to 1} f(x)$ **(5p)** b. $\lim_{x\to 5} f(x)$ **(5p)**

El teorema que uno desea aplicar es el Teorema del Sandwich, y para ello deben cumplirse dos condiciones:

1) $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ en un entorno abierto de $x = c$
2) $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$

Si ambas condiciones se cumplen entonces $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

a) $\lim_{x\to 1} f(x)$

Analicemos la aplicación del Teorema del Sandwich a este caso. (1p)
Notemos que en este caso la primera condición sí se cumple, ya que el intervalo (0,4) conforma un entorno abierto de x=2, donde se cumple la relación $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. (1p)

Además la segunda condición también se cumple:

$$\lim_{x\to 1} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - 1 = \lim_{x\to 1} \cos(\pi x) + 1 = 0. \quad (1p)$$

Por lo tanto podemos utilizar el teorema para afirmar que $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$. (2p)

b) $\lim_{x\to 5} f(x)$

Analicemos la aplicación del Teorema del Sandwich a este caso. (1p)

Notemos que en este caso, si bien se cumple la segunda condición:

$$\lim_{x\to 5} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - 1 = \lim_{x\to 5} \cos(\pi x) + 1 = 0,$$

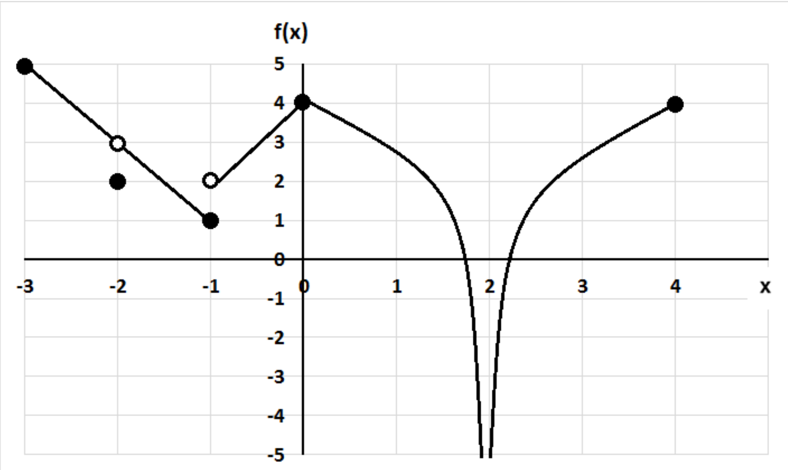
la primera condición NO se cumple ya que la relación entre las funciones es válida en el intervalo [0,4] con lo cual no podemos afirmar que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ se cumpla para un intervalo abierto alrededor de x=5. (2p)

Por lo tanto no podemos utilizar el teorema para calcular el límite. (2p)

7. a) Escribe a continuación las tres condiciones que deben satisfacerse para que una función $f(x)$ sea continua en un punto $x = c$. **15 p**

- Existe $f(c)$. (1p)
- Existe $\lim_{x \to c} f(x) = L$.
  Es decir que existen los límites laterales y son iguales: $\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = L$. (1p)
- $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ (1p)

b) Dada la gráfica de la función $f(x)$ en el dominio [-3,4], complete la tabla siguiente evaluando la continuidad de la función en determinados valores de x:



	¿Se cumple la condición 1? Justifique. **(0,5p c/u)**	¿Se cumple la condición 2? Justifique. **(0,5p c/u)**	¿Se cumple la condición 3? **(0,5p c/u)**	¿La función es continua o discontinua en el punto? **(0,5p c/u)**	Si hay discontinuidad ¿es evitable o no? **(0,5p c/u)**
$x = -2$	**SI** f(-2)=2	**SI** límite es 3	**NO** $\lim_{x \to -2} f(x) \neq f(-2)$	discontinua	Evitable
$x = -1$	**SI** f(-1)=1	**NO** $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 1$ $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 2$	**NO**	discontinua	No evitable
$x = 0$	**SI** f(0)=4	**SI** límite es 4	**SI**	continua	-
$x = 2$	**NO** f(2) no existe	**NO** límite no existe $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \infty$ $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty$	**NO**	discontinua	No evitable

8. **25 p**

Dada $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-4}$ determine:

a. Dominio implícito. (2p)
El dominio de f(x) es $(-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,\infty)$.

b. Intersecciones con los ejes. (4p)
Intersección con eje x: NO TIENE
Intersección con eje y: $y = -1$

c. Si tiene asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas). Justifique calculando todos los límites que sean necesarios y determinando la ecuación de las asíntotas. **(12p)**

Análisis de Asíntotas Verticales:

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \frac{(x-2)(x-2)}{(x+2)(x-2)}$$

$x = -2$

$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-} \frac{(x-2)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to-2^-} \frac{(x-2)}{(x+2)} = +\infty$ (0.5)

$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+} \frac{(x-2)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to-2^+} \frac{(x-2)}{(x+2)} = -\infty$ (0.5)

Por lo tanto la función posee una **ASÍNTOTA VERTICAL** de ecuación $\boldsymbol{x = -2}$. (1p)

$x = 2$

$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{(x-2)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to2} \frac{(x-2)}{(x+2)} = 0$ (1p)

Por lo tanto $\lim_{x\to2} f(x) = 0$ y **NO** hay una asíntota vertical en $x = 2$. (1p)

Análisis de Asíntotas Horizontales:

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$$

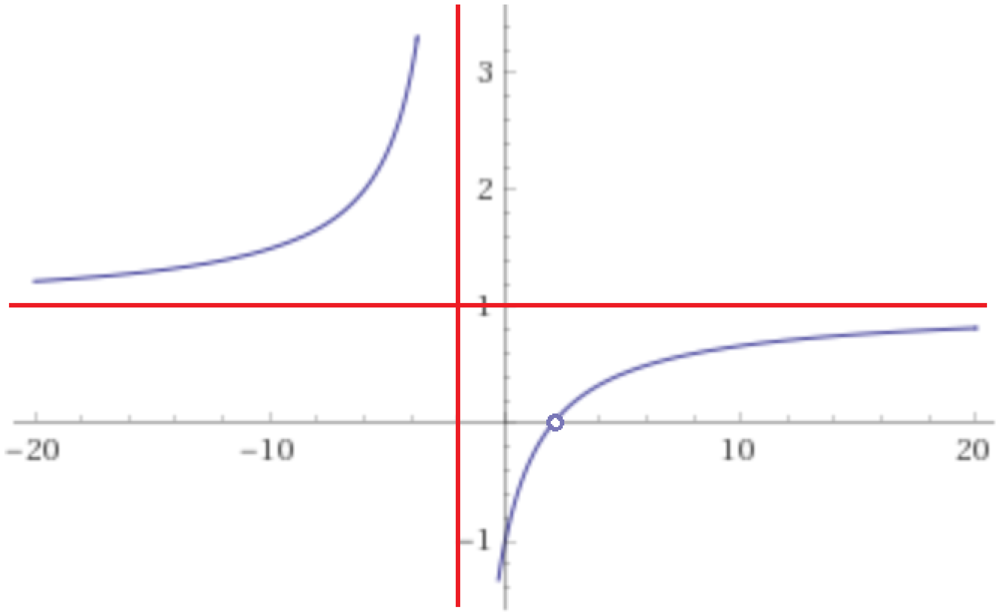
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4x+4}{x^2-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x^2-4x+4)/x^2}{(x^2-4)/x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-4/x+4/x^2}{1-4/x^2} = \frac{1-0+0}{1-0} = 1$ (2p)

Por lo tanto la función tiene una **ASÍNTOTA HORIZONTAL** de ecuación $\boldsymbol{y = 1}$. (2p)

Análisis de Asíntotas Oblicuas: (4p)

Observando los límites anteriores notamos que no se cumple que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ por lo que no hay asíntotas oblicuas. Otra forma de justificarlo es notar que la función es racional y que el polinomio numerador no posee un orden superior en uno que el orden del polinomio denominador como se requiere para tener una asíntota oblicua en el caso de funciones racionales. En este caso ambos polinomios son de orden 2.

d. Grafique la función, empleando la información encontrada previamente. **(5p)**



(1p por asíntota vertical, 1p por asíntota horizontal, 1p por hueco, 1p por intersecciones y 1p por trazado correcto de la forma de la función)

e. Empleando la gráfica halle el Rango de la función. (2p si está correcto, 1p por no tener en cuenta el hueco y 0p en cualquier otro caso))

El rango de f(x) es $(-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1, \infty)$.

f. OPTATIVO (este ejercicio da **PUNTOS EXTRA!!!**) Empleando la gráfica determine para qué valores de x la función presenta discontinuidades. Clasifique las mismas en evitables y no evitables. Si encuentra alguna discontinuidad evitable redefina la función de forma tal que se resuelva la discontinuidad. **(5p EXTRA)**

$x = -2$ discontinuidad no evitable (1p)

1) f(-2) no existe (0,5p)
2) $\lim_{x \to -2} f(x)$ no existe (0,5p)

$x = 2$ discontinuidad evitable (1p)

1) f(2) no existe (0,5p)
2) $\lim_{x \to 2} f(x) = 0$ (0,5p)

Redefino la función:

$$g(x) = \frac{x-2}{x+2}$$

Otra forma es:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq 2 \\ 0 & si\ x = 2 \end{cases} \quad (1p)$$

Puntaje Total: 100 p	**Puntaje Obtenido:**	**Nota Final:**

ASIGNATURA	Elementos de Cálculo I	AÑO	2019	TEMA	2	FECHA	09-09 al 13-09

	ACTIVIDADES	Puntaje Total

1. Suponga que se realizan las siguientes transformaciones sobre la gráfica de la función $f(x) = |x|$. Primero se la desplaza hacia la derecha $\frac{1}{2}$ unidad, luego se la alarga verticalmente por un factor de 3 y finalmente se la desplaza hacia abajo 2 unidades. Establezca la ecuación de la función transformada. **4 p**

Función original	$\lvert x\rvert$	
Desplaza hacia la derecha $\frac{1}{2}$ unidad	$\left\lvert x-\frac{1}{2}\right\rvert$	(1p)
Alarga verticalmente por un factor de 3	$3\left\lvert x-\frac{1}{2}\right\rvert$	(1p)
Desplaza hacia abajo 2 unidades	$3\left\lvert x-\frac{1}{2}\right\rvert - 2$	(1p)

Por lo tanto la función trasformada es $\boldsymbol{g(x)} = 3\left|x-\frac{1}{2}\right| - 2$ (1p)

2. Determine la paridad (par, impar o ni par ni impar) de $f(x) = \frac{\sqrt{x^4-16}}{\text{cosec}^3(x)}$, y si su gráfica presentaría alguna simetría y de qué tipo. **4 p**

$$-f(-x) = -\frac{\sqrt{(-x)^4-16}}{\text{cosec}^3(-x)} \underset{(0.5p)}{=} -\frac{\sqrt{x^4-16}}{\frac{1}{sen^3(-x)}} \underset{(0.5p)}{=} -\frac{\sqrt{x^4-16}}{-\frac{1}{sen^3(x)}} \overset{(0.5p)}{=} -\frac{\sqrt{x^4-16}}{-\text{cosec}^3(x)} \overset{(0.5p)}{=} \frac{\sqrt{x^4-16}}{\text{cosec}^3(x)} = f(x)$$

dónde en el segundo paso se utilizó que $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ y en el tercero que la función seno es impar.

Por lo tanto $f(x)$ es **IMPAR** (1p)

Toda función impar su gráfica es **SIMÉTRICA RESPECTO AL ORIGEN.** (1p)

3. Sean $f(x) = e^{x^2}$ y $g(x) = \sqrt{x^2-9}$, halle $(fog)(x)$ e indique su dominio. **4 p**

$(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = f\left(\sqrt{x^2-9}\right) = e^{(\sqrt{x^2-9})^2} = e^{x^2-9}$ (2p)
El dominio de g(x) es $(-\infty,-3] \cup [3,\infty)$ y su imagen $[0,\infty)$.
El dominio de f(x) es $\mathbb{R}$.

De esta forma, f se puede aplicar a todos los valores de g(x).
Por lo tanto el dominio de fog es $\mathbb{R}$. (2p)

4. Dadas las siguientes funciones determine si poseen inversa o no, justifique. **(2p)** **8 p**
Si la función tiene inversa hállela y verifique mediante la composición de la función con su inversa. **(6p)**

a) $f(x) = \frac{1+3x}{5-2x}$ b) $g(x) = |x| - |x-6|$.

a) f(x) es uno a uno en todo su dominio por lo tanto posee inversa. (1p)

Función original $y = \frac{1+3x}{5-2x}$
Despejo x (2p) $y(5-2x) = 1+3x$
$5y - 2xy = 1 + 3x$
$5y - 1 = 3x + 2xy$

$$5y-1=x(3+2y)$$
$$\frac{5y-1}{3+2y}=x$$

Intercambio x con y (1p) $\quad \boldsymbol{y}=\frac{5x-1}{3+2x}$

Entonces $\boldsymbol{f^{-1}(x)}=\frac{5x-1}{3+2x}$ (1p)

Verificación:

$$(\boldsymbol{f^{-1} o\, f})(\boldsymbol{x})=\frac{5\left(\frac{1+3x}{5-2x}\right)-1}{3+2\left(\frac{1+3x}{5-2x}\right)}=\frac{\frac{5+15x}{5-2x}-1}{3+\frac{2+6x}{5-2x}}=\frac{\frac{5+15x-5+2x}{5-2x}}{\frac{15-6x+2+6x}{5-2x}}=\frac{17x}{5-2x}\cdot\frac{5-2x}{17}=x \quad \text{(2p)}$$

b) g(x) no es uno a uno, por ejemplo en $x=6$ y $x=7$ toma el mismo valor, por lo cual no posee inversa en todo su dominio. (1p)

5. Determine en los siguientes casos si existe o no el límite sin aplicar L'Hôpital. Si existe el límite calcúlelo, si no existe justifique adecuadamente. (Indique en cada caso las propiedades y/o teoremas empleados) **30 p**

a. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(4x)}{\tan(3x)}$ **(10p)**

Si evaluamos por sustitución directa este límite encontramos una indeterminación 0/0, por lo cual trabajaremos algebraicamente para salvar la indeterminación y evaluar el límite. (1p)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(4x)}{\tan(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(4x)\cos(3x)}{\cos(4x)\operatorname{sen}(3x)}\ \text{(1p)}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(4x)}{\operatorname{sen}(3x)}\frac{\lim_{x\to 0}\cos(3x)}{\lim_{x\to 0}\cos(4x)}\ \text{(1p)}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(4x)}{\operatorname{sen}(3x)}\ \text{(1p)}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(4x)}{\operatorname{sen}(3x)}\frac{x}{x}=\ \text{(1p)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}(4x)}{x}}{\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}}=\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(4x)}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}}\ \text{(1p)}=\frac{4\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t}}{3\lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen} u}{u}}\ \text{(1p)}=\frac{4}{3}\quad \text{(1p)}$$

El límite existe y es 4/3. (2p)

b. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$ **(10p)**

Si evaluamos por sustitución directa este límite encontramos una indeterminación 0/0, por lo cual trabajaremos algebraicamente para salvar la indeterminación y evaluar el límite. (1p)

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+7}-3)}{(x-2)}\frac{(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+7}+3)}\ \text{(2p)}=\quad \text{(2p)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{|x+7|-9}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}\ \text{(2p)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+7-9}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}\ \text{(1p)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}\ \text{(1p)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}\ \text{(1p)}=\frac{1}{6}$$

c. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{|x-3|}$ Nota: recuerde que el valor absoluto es una función definida por partes. **(10p)**

Si evaluamos por sustitución directa este límite encontramos una indeterminación 0/0 (1p), por lo cual trabajaremos algebraicamente para salvar la indeterminación y evaluar el límite si es posible. Dado que la función valor absoluto está definida de diferente forma para valores mayores y menores que -1, evaluaremos los límites laterales. (2p)

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & si\ x \geq 3 \\ -(x-3) & si\ x \leq 3 \end{cases}$$ (2p)

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-2x-3}{|x-3|} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-2x-3}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{(x-3)(x+1)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+}(x+1) = 4$$ (2p)

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-2x-3}{|x-3|} = \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-2x-3}{-(x-3)} = -\lim_{x\to 3^-} \frac{(x-3)(x+1)}{x-3} = -\lim_{x\to 3^-}(x+1) = -4$$ (2p)

Dado que los límites laterales son diferentes, el límite NO EXISTE. (1p)

6. Sabiendo que: **(5p c/u, Total 10p)** **10 p**

$$\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \leq f(x) \leq \cos(\pi x) + 2 \qquad \text{para } -2 \leq x \leq 2$$

Indique si es posible o no calcular el límite en a) y en b). Justifique cada caso indicando cuál es el Teorema aplicado y verificando si se cumplen o no las hipótesis del mismo. Utilice el teorema para llegar al valor numérico del límite en caso de que exista.

a. $\lim_{x\to -3} f(x)$ **(5p)** b. $\lim_{x\to 1} f(x)$ **(5p)**

El teorema que uno desea aplicar es el Teorema del Sandwich, y para ello deben cumplirse dos condiciones:

1) $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ en un entorno abierto de $x = c$
2) $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$

Si ambas condiciones se cumplen entonces $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

a) $\lim_{x\to -3} f(x)$

Analicemos la aplicación del Teorema del Sandwich a este caso. (1p)

Notemos que en este caso, si bien se cumple la segunda condición:

$$\lim_{x\to -3} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \lim_{x\to -3} \cos(\pi x) + 2 = 1,$$

la primera condición NO se cumple ya que la relación entre las funciones es válida en el intervalo [-2,2] con lo cual no podemos afirmar que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ se cumpla para un intervalo abierto alrededor de x=3. (2p)

Por lo tanto no podemos utilizar el teorema para calcular el límite. (2p)

b) $\lim_{x\to 1} f(x)$

Analicemos la aplicación del Teorema del Sandwich a este caso. (1p)

Notemos que en este caso la primera condición sí se cumple, ya que el intervalo (-2,2) conforma un entorno abierto de x=1, donde se cumple la relación $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. (1p)

Además la segunda condición también se cumple:

$$\lim_{x\to 1} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \lim_{x\to 1} \cos(\pi x) + 2 = 1.$$ (1p)

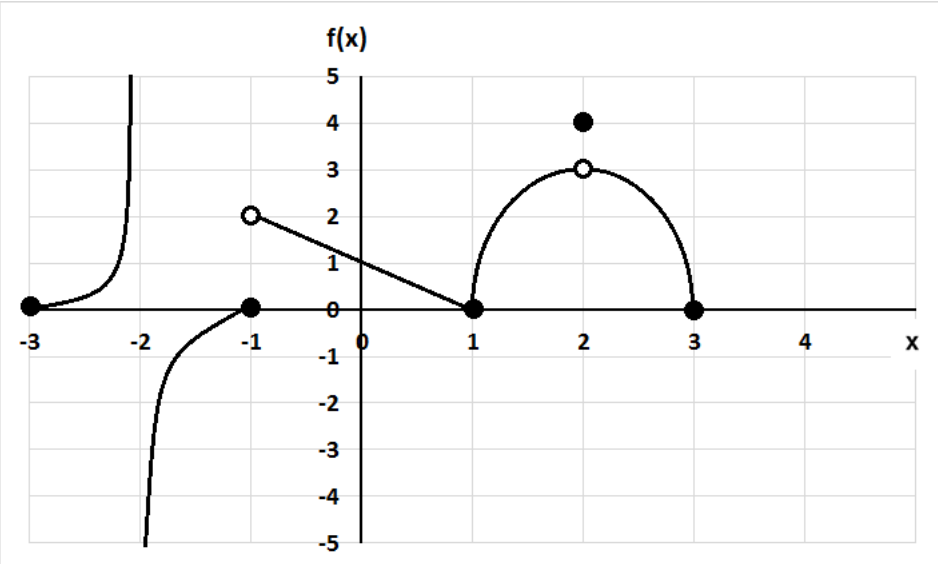
Por lo tanto podemos utilizar el teorema para afirmar que $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$. (2p)

7. a) Escribe a continuación las tres condiciones que deben satisfacerse para que una función $f(x)$ sea continua en un punto $x = c$. **15 p**

ASIGNATURA	Elementos de Cálculo I	AÑO	2019	TEMA	2	FECHA	09-09 al 13-09

- Existe $f(c)$. (1p)
- Existe $\lim_{x \to c} f(x) = L$.
  Es decir que existen los límites laterales y son iguales: $\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = L$. **(1p)**
- $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ (1p)

b) Dada la gráfica de la función $f(x)$ en el dominio [-3,3], complete la tabla siguiente evaluando la continuidad de la función en determinados valores de x:



	¿Se cumple la condición 1? **Justifique. (0,5p c/u)**	¿Se cumple la condición 2? **Justifique. (0,5p c/u)**	¿Se cumple la condición 3? **(0,5p c/u)**	¿La función es continua o discontinua en el punto? **(0,5p c/u)**	Si hay discontinuidad ¿es evitable o no? **(0,5p c/u)**
$x = -2$	**NO** f(-2) no existe	**NO** $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \infty$ $\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$	**NO**	discontinua	No evitable
$x = -1$	**SI** f(-1)=0	**NO** $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 0$ $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 2$	**NO**	discontinua	No evitable
$x = 1$	**SI** f(1)=0	**SI** límite es 0	**SI**	continua	-
$x = 2$	**SI** f(2)=4	**SI** límite es 3	**NO** $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$	discontinua	Evitable

8. **25 p**

Dada $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2-1}$ determine:

a. Dominio implícito. (2p)
   El dominio de f(x) es $(-\infty, -1) \cup (-1,1) \cup (1, \infty)$.
b. Intersecciones con los ejes.
   Intersección con eje x: NO TIENE (2p)

Intersección con eje y: $y = -1$ (2p)

c. Si tiene asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas). Justifique calculando todos los límites que sean necesarios y determinando la ecuación de las asíntotas.

Análisis de Asíntotas Verticales:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$x = -1$

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{(x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1^-} \frac{(x-1)}{(x+1)} = +\infty$ (0.5p)

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{(x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(x-1)}{(x+1)} = -\infty$ (0.5p)

Por lo tanto la función posee una **ASÍNTOTA VERTICAL** de ecuación $\boldsymbol{x = -1}$. (1p)

$x = 1$

$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{(x+1)} = 0$ (1p)

Por lo tanto $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$ y **NO** hay una asíntota vertical en $x = 1$. (1p)

Análisis de Asíntotas Horizontales:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2-1} = \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$$

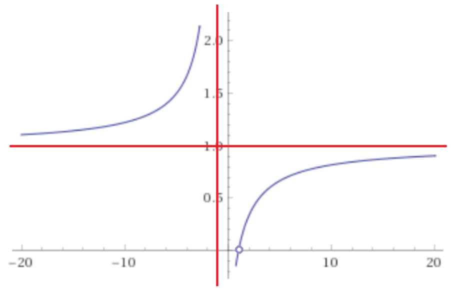
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x^2-2x+1)/x^2}{(x^2-1)/x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-2/x+1/x^2}{1-1/x^2} = \frac{1-0+0}{1-0} = 1$ (2p)

Por lo tanto la función tiene una **ASÍNTOTA HORIZONTAL** de ecuación $\boldsymbol{y = 1}$. (2p)

Análisis de Asíntotas Oblicuas: (4p)

Observando los límites anteriores notamos que no se cumple que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ por lo que no hay asíntotas oblicuas. Otra forma de justificarlo es notar que la función es racional y que el polinomio numerador no posee un orden superior en uno que el orden del polinomio denominador como se requiere para tener una asíntota oblicua en el caso de funciones racionales. En este caso ambos polinomios son de orden 2.

d. Grafique la función, empleando la información encontrada previamente. **(5p)**



(1p por asíntota vertical, 1p por asíntota horizontal, 1p por hueco, 1p por intersecciones y 1p por trazado correcto de la forma de la función)

a. Empleando la gráfica halle el Rango de la función. (2p si está correcto, 1p por no tener en cuenta el hueco y 0p en cualquier otro caso))

   El rango de f(x) es $(-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1, \infty)$.

b. OPTATIVO (este ejercicio da **PUNTOS EXTRA!!!**) Empleando la gráfica indique para qué valores de x la función presenta discontinuidades. Clasifique las mismas en evitables y no evitables. Si encuentra alguna discontinuidad evitable redefina la función de forma tal que se resuelva la discontinuidad. **(5p EXTRA)**

   $x = -1$ discontinuidad no evitable (1p)
   1) f(-1) no existe (0.5p)
   2) $\lim_{x \to -1} f(x)$ no existe (0.5p)

   $x = 1$ discontinuidad evitable (1p)
   1) f(1) no existe (0.5p)
   2) $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$ (0.5p)

   Redefino la función:

$$g(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

   Otra forma es:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq 1 \\ 0 & si\ x = 1 \end{cases} \quad (1p)$$