UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

TERCER PARCIAL

FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Naturaleza - Ciencia - Humanismo

ASIGNATURA	Cálculo I	AÑO	2019	TEMA	1	Nº HOJAS	
APELLIDO Y NOMBRE						LEGAJO	

Instrucciones: coloque nombre y apellido **en cada hoja** que va a entregar. Lea atentamente cada consigna. Desarrolle detalladamente y con letra clara los ejercicios para obtener el puntaje completo. Puede usar lápiz o tinta para desarrollar los ejercicios, pero el **resultado final debe estar en tinta**. No se permite corrector, tache si es necesario. Cuando finalice, indique el número de hojas extra empleadas en el encabezado. Debe obtener un **mínimo de 60 puntos para aprobar** el examen. Dispone de **2 horas** para su resolución. ÉXITO!

10

1. Determine la derivada de: $f(x)=\int_{sec(x)}^{cosec(x)}\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}dt$ y simplifique a la mínima expresión.

Para obtener la derivada se debe aplicar el TFCI:

$F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right]=f(x)$ en nuestro caso $F(x)=\int_{\sec(x)}^{cosec(x)}\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}dt$. Puesto que los límites de integración son dos funciones de x, se aplican propiedades de integrales para llegar a la forma conveniente y se tiene en cuenta la regla de la cadena, por lo que:

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt\right]=\frac{d}{dx}\left[-\int_a^{u(x)} f(t)dt+\int_a^{v(x)} f(t)dt\right]=-f[u(x)]*u'(x)+f[v(x)]*v'(x)$$

$F'(x)=-\frac{\sqrt{sec^2(x)-1}}{\sec(x)}\cdot\sec(x)\cdot\tan(x)+\frac{\sqrt{cosec^2(x)-1}}{\mathrm{cosec}(x)}\cdot[-\mathrm{cosec}(x)\cdot\mathrm{cotan}(x)]$ **(5p) procedimiento**

$\boldsymbol{F'(x)=-\tan^2(x)-\mathrm{cotan}^2(x)}$ **(5p) resultado**

30

2. Encontrar las siguientes integrales **(15p c/u)**:

a. $\int \ln(\sqrt{x})\,dx$ b. $\int \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}dx$

a.

Hacemos una sustitución: $t=\sqrt{x}\Rightarrow dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\Longrightarrow dx=2tdt$ **(5p)**

$$\Rightarrow\int \ln(t)\,2tdt=$$

Hacemos integral por partes: $u=\ln(t)\Longrightarrow du=\frac{1}{t}dt$; $dv=2tdt\Longrightarrow v=t^2$

$$=t^2\ln(t)-\int t^2\frac{1}{t}dt=t^2\ln(t)-\frac{t^2}{2}+C$$

(5p) **(2p)**

Volvemos a la variable original $\int \boldsymbol{\ln(\sqrt{x})\,dx=x\ln(\sqrt{x})-\frac{x}{2}+C}$ $\mathbf{(3p)}$

b.

Hacemos la sustitución trigonométrica: $x=3tan\theta\Longrightarrow dx=3\sec^2\theta\,d\theta$; $\sqrt{9+x^2}=3sec\theta$ **(5p)**

$=\int\frac{3tan\theta}{3sec\theta}3\sec^2\theta\,d\theta=3\int tan\,\theta sec\theta d\theta=3sec\theta+C$ $\mathbf{(5p)}$

Volvemos a la variable original:

$$\int\frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{9+x^2}}}\boldsymbol{dx}=\sqrt{\boldsymbol{9+x^2}}+\boldsymbol{C}\ \mathbf{(5p)}$$

20

3. Resuelva la siguiente integral definida:

$$\int_3^4\frac{1}{x^2-9}dx$$

Al analizar la validez de la integral dada para los extremos de integración, se encuentra que existe una discontinuidad para $x=3$, por lo que se trata de una integral impropia. Adicionalmente, se puede resolver por fracciones simples:

$$\int_3^4\frac{1}{x^2-9}dx=\lim_{a\to3^+}\int_a^4\frac{1}{(x+3)(x-3)}dx=\lim_{a\to3^+}\int_a^4\left[-\frac{1}{6(x+3)}+\frac{1}{6(x-3)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{6}\left[\lim_{a\to3^+}-\ln|x+3|\Big|_a^4+\ln|x-3|\Big|_a^4\right]=\frac{1}{6}\lim_{a\to3^+}[-ln|7|+ln|a+3|+ln|1|-ln|a-3|]=\infty$$

Por lo tanto, la **integral diverge**

Cálculo auxiliar:

$$\frac{1}{x^2-9}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x+3)}{x^2-9}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\-3A+3B=1\end{cases}\Rightarrow A=-\frac{1}{6};B=\frac{1}{6}$$

Planteo de integral impropia con el límite (5p) ; Integral por fracciones parciales (10p) ; resultado y conclusión (5p)

20

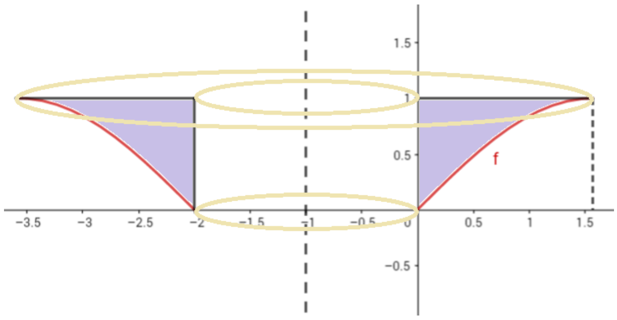
4. Dada la región delimitada por $f(x)=senx$, la recta $y=1$ y por el eje y
   a. Obtenga una expresión para calcular el área de dicha región, integrando respecto de x **(5p)**
   b. Obtenga una expresión para calcular el área de dicha región, integrando respecto de y **(5p)**
   c. Plantee una integral que permita calcular el volumen del sólido generado cuando dicha región gira en torno a la recta $x=-1$. Indique el método empleado y grafique **(10p)**

a. $A=\int_0^{\pi/2}(1-senx)dx$ **(Extremos 2p, fn a integrar 3p)**

b. $A=\int_0^1 arcseny\,dy$ **(Extremos 2p, fn a integrar 3p)**

c. Por casquillos: **(Mencionar el método 1p)**

Gráfico 1p



Altura del casquillo: $h=(1-senx)$ **(2p)**

Radio del casquillo $r=x-(-1)=x+1$ **(2p)**

$$\boldsymbol{V=\int_0^{\pi/2}2\pi(1-senx)(x+1)dx}$$

(Extremos 2p, fn a integrar 2p)

O bien por arandelas: **(Mencionar el método 1p)**

Radio menor: $r=1$ **(2p)**

Radio mayor $R=1+arcseny$ **(2p)**

$\boldsymbol{V=\int_0^1\pi[(1+arcseny)^2-1]dy}$ **(Extremos 2p, fn a integrar 2p)**

10

5. Encuentre la longitud de arco de curva de $y=3x^{2/3}$ entre los puntos (0,0) y (1,3)

Dado que y' no está definida en el punto (0,0), expresamos todo en función de y

Sea $x=u(y)=\left(\frac{y}{3}\right)^{3/2}$, entonces $u'(y)=\left(\frac{1}{3}\right)^{3/2}\frac{3}{2}\,y^{1/2}$, $[u'^{(y)}]^2=\left(\frac{1}{3}\right)^3\frac{9}{4}\,y=\frac{y}{12}$

La longitud de arco de curva está dada por:

$$L=\int_0^3\sqrt{1+[u'(y)]^2}dy=\int_0^3\sqrt{1+\frac{y}{12}}dy=\left[8\left(1+\frac{y}{12}\right)^{3/2}\right]_0^3\cong\mathbf{3.18}$$

Fórmula de Long arco de curva 2p ; expresar en función de *y* 4p ; extremos de integración 2p ; resultado 2p

---

10

6. Dada la ecuación diferencial $\sqrt{x}+\sqrt{y}y'=0$, encontrar la solución particular que satisface la condición $y(1)=9$. Verifique su respuesta.

$$\sqrt{y}y'=-\sqrt{x}$$

$$\sqrt{y}dy=-\sqrt{x}dx$$

ASIGNATURA	Cálculo I	AÑO	2019	TEMA	1	Nº HOJAS	
APELLIDO Y NOMBRE						LEGAJO	

$$\int \sqrt{y}dy = -\int \sqrt{x}dx \quad (\mathbf{2p})$$

$$\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \Longrightarrow y = \left(-x^{\frac{3}{2}} + C\right)^{\frac{2}{3}} \quad (\mathbf{2p})$$

$$y(1) = \left(-1^{\frac{3}{2}} + C\right)^{\frac{2}{3}} = 9 \Longrightarrow C = 28 \;\; (\mathbf{1p})$$

$$\boldsymbol{y = \left(-x^{\frac{3}{2}} + 28\right)^{2/3}} \quad (\mathbf{2p})$$

Verificación **(3p)**: $y' = \frac{2}{3}\left(-x^{\frac{3}{2}} + 28\right)^{-\frac{1}{3}}.\left(-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{-x^{\frac{3}{2}}+28}}$

$$\sqrt{y}y' = \sqrt{\left(-x^{\frac{3}{2}} + 28\right)^{2/3}}\left(-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{-x^{\frac{3}{2}} + 28}}\right) = \frac{\sqrt[3]{-x^{\frac{3}{2}} + 28}}{\sqrt[3]{-x^{\frac{3}{2}} + 28}}(-\sqrt{x}) = -\sqrt{x}$$

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO		TERCER PARCIAL				FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES Naturaleza - Ciencia - Humanismo	
ASIGNATURA	Cálculo I	**AÑO**	2019	**TEMA**	**2**	**Nº HOJAS**	
APELLIDO Y NOMBRE						**LEGAJO**	

Instrucciones: coloque nombre y apellido **en cada hoja** que va a entregar. Lea atentamente cada consigna. Desarrolle detalladamente y con letra clara los ejercicios para obtener el puntaje completo. Puede usar lápiz o tinta para desarrollar los ejercicios, pero el **resultado final debe estar en tinta**. No se permite corrector, tache si es necesario. Cuando finalice, indique el número de hojas extra empleadas en el encabezado. Debe obtener un **mínimo de 60 puntos para aprobar** el examen. Dispone de **2 horas** para su resolución. ÉXITO!

10

1. Determine la derivada de: $f(x)=\int_{sen(x)}^{\cos(x)}\frac{\sqrt{-t^2+1}}{t}dt$ y simplifique a la mínima expresión.

Para obtener la derivada se debe aplicar el TFCI:

$F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right]=f(x)$ en nuestro caso $F(x)=\int_{\text{sen}(x)}^{\cos(x)}\frac{\sqrt{-t^2+1}}{t}dt$. Puesto que los límites de integración son dos funciones de x, se aplican propiedades de integrales para llegar a la forma conveniente y se tiene en cuenta la regla de la cadena, por lo que:

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)dt\right]=\frac{d}{dx}\left[-\int_a^{u(x)}f(t)dt+\int_a^{v(x)}f(t)dt\right]=-f[u(x)]*u'(x)+f[v(x)]*v'(x)$$

$$F'(x)=-\frac{\sqrt{-sen^2(x)+1}}{\text{sen}(x)}.cos(x)+\frac{\sqrt{-cos^2(x)+1}}{\cos(x)}.(-sen(x))$$ **(5p) procedimiento**

$$=-\frac{\boldsymbol{\cos^2(x)}}{\boldsymbol{sen(x)}}-\frac{\boldsymbol{sen^2(x)}}{\boldsymbol{\cos(x)}}=-\boldsymbol{\cos(x)\,cotan(x)-sen(x)\tan(x)}$$ **(5p) resultado**

30

2. Encontrar las siguientes integrales:

a. $\int e^{\sqrt{x}}dx$ b. $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}dx$

a.

Hacemos una sustitución: $t=\sqrt{x}\Rightarrow dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\Longrightarrow dx=2tdt$ **(5p)**

$\Rightarrow\int e^t 2tdt=2\int e^t tdt$

Hacemos integral por partes: $u=t\Longrightarrow du=dt\;\;;\;\;dv=e^t\;\Longrightarrow v=e^t$

$=2\left[te^t-\int e^t dt\right]=2te^t-2e^t+C$

(5p) **(2p)**

Volvemos a la variable original $\int \boldsymbol{e^{\sqrt{x}}dx=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C}$ $(\mathbf{3p})$

b.

Hacemos la sustitución trigonométrica: $x=3sec\theta\;\Longrightarrow dx=3\sec\theta\tan\theta d\theta\;;\;\sqrt{9+x^2}=3tan\theta$ **(5p)**

$=\int\frac{1}{3tan\theta}3\sec\theta\,tan\theta d\theta=\int sec\theta\,d\theta=ln|sec\theta+tan\theta|+C(\mathbf{5p})$

Volvemos a la variable original:

$$\int\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x^2-9}}}\boldsymbol{dx}=\boldsymbol{ln}\left|\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{3}}+\frac{\sqrt{\boldsymbol{x^2-9}}}{\mathbf{3}}\right|+\boldsymbol{C}\;(\mathbf{5p})$$

20

3. Resuelva la siguiente integral definida:

$$\int_1^2\frac{1}{4-x^2}dx$$

Al analizar la validez de la integral dada para los extremos de integración, se encuentra que existe una discontinuidad para $x=2$, por lo que se trata de una integral impropia. Adicionalmente, se puede resolver por fracciones simples:

$$\int_1^2\frac{1}{4-x^2}dx=\lim_{b\to 2^-}\int_1^b\frac{1}{(2-x)(x+2)}dx=\lim_{b\to 2^-}\int_1^b\left[\frac{1}{4(2-x)}+\frac{1}{4(x+2)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{4}\left[\lim_{b\to 2^-} -\ln|2-x||_1^b+\ln|x+2||_1^b\right]=\frac{1}{4}\lim_{b\to 2^-}[-ln|2-b|+ln|1|+ln|2+b|-ln|3|]=\infty$$

Por lo tanto, la **integral diverge**

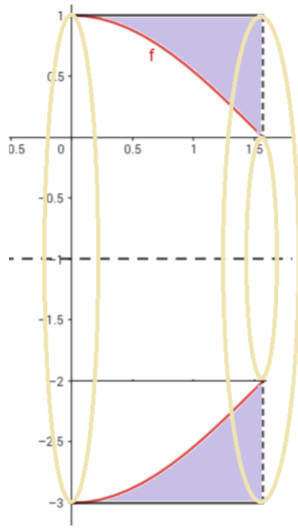
Cálculo auxiliar:

$$\frac{1}{4-x^2}=\frac{A}{2-x}+\frac{B}{2+x}=\frac{A(2+x)+B(2-x)}{4-x^2}\Rightarrow\begin{cases}A-B=0\\2A+2B=1\end{cases}\Rightarrow A=\frac{1}{4};B=\frac{1}{4}$$

Planteo de integral impropia con el límite (5p) ; Integral por fracciones parciales (10p) ; resultado y conclusión (5p)

20

4. Dada la región delimitada por $f(x)=cosx$, la recta $y=1$ y la recta $x=\pi/2$
   a. Obtenga una expresión para calcular el área de dicha región, integrando respecto de x **(5p)**
   b. Obtenga una expresión para calcular el área de dicha región, integrando respecto de y **(5p)**
   c. Plantee una integral que permita calcular el volumen del sólido generado cuando dicha región gira en torno a la recta $y=-1$. Indique el método empleado y grafique **(10p)**



a. $A=\int_0^{\pi/2}(1-cosx)dx$

(Extremos 2p, fn a integrar 3p)

b. $A=\int_0^1\left(\frac{\pi}{2}-arccosy\right)dy$

(Extremos 2p, fn a integrar 3p)

c. Por casquillos: **(Mencionar el método 1p)**

Altura del casquillo: $h=\left(\frac{\pi}{2}-arccosy\right)$ **(2p)**

Radio del casquillo $r=y-(-1)=y+1$ **(2p)**

$$\boldsymbol{V=\int_0^1 2\pi\left(\frac{\pi}{2}-arccosy\right)(y+1)dy}$$ **Gráfico 1p**

(Extremos 2p, fn a integrar 2p)

O bien por arandelas: **(Mencionar el método 1p)**

Radio menor: $r=cosx-(-1)=cosx+1$ **(2p)**

Radio mayor $R=1-(-1)=2$ **(2p)**

$\boldsymbol{V=\int_0^{\pi/2}\pi[2^2-(cosx+1)^2]dx}$ **(Extremos 2p, fn a integrar 2p)**

10

5. Encuentre la longitud de arco de curva de $y=\frac{3}{5}x^{2/3}$ entre los puntos (0,0) y (1, 3/5)

Dado que y' no está definida en el punto (0,0), expresamos todo en función de y

Sea $x=u(y)=\left(\frac{5y}{3}\right)^{3/2}$, entonces $u'(y)=\left(\frac{5}{3}\right)^{3/2}\frac{3}{2}y^{1/2}$, $[u'(y)]^2=\left(\frac{5}{3}\right)^3\left(\frac{3}{2}\right)^2y=\frac{375}{4}y$

La longitud de arco de curva está dada por:

$$L=\int_0^{3/5}\sqrt{1+[u'(y)]^2}dy=\int_0^{3/5}\sqrt{1+\frac{375y}{4}}dy=\left[\frac{8}{1125}\left(1+\frac{375y}{4}\right)^{3/2}\right]_0^{3/5}\cong\mathbf{3.07}$$

Fórmula de Long arco de curva 2p ; expresar en función de y 4p ; extremos de integración 2p ; resultado 2p

10

6. Dada la ecuación diferencial $y(x+1)+y'=0$, encontrar la solución particular que satisface la condición $y(-2)=3$. Verifique su respuesta.

$$\frac{1}{y}y'=-(x+1)$$

$$\frac{1}{y}dy = -(x+1)dx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = -\int (x+1)dx \quad (\mathbf{2}\boldsymbol{p})$$

$$ln|y| = -\frac{x^2}{2} - x + C \Longrightarrow |y| = e^{-\frac{x^2}{2}-x+C} = e^C e^{-\frac{x^2}{2}-x} = C_1 e^{-\frac{x^2}{2}-x} \quad (\mathbf{2}\boldsymbol{p})$$

$$y(-2) = C_1 e^{-\frac{4}{2}+2} = 3 \Longrightarrow \boldsymbol{C_1} = \mathbf{3} \ (\mathbf{1}\boldsymbol{p})$$

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{3}\boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{x}^2}{2}-\boldsymbol{x}} \ (\mathbf{2}\boldsymbol{p})$$

Verificación **(3p)**: $y' = 3e^{-\frac{x^2}{2}-x}.(-x-1) = -3xe^{-\frac{x^2}{2}-x} - 3e^{-\frac{x^2}{2}-x}$

$$y(x+1) = 3xe^{-\frac{x^2}{2}-x} + 3e^{-\frac{x^2}{2}-x} = -y' \Longrightarrow \ y(x+1) + y' = 0$$