UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO		TERCER PARCIAL				FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES Naturaleza - Ciencia - Humanismo	
ASIGNATURA	Elementos de Cálculo I	**AÑO**	2019	**TEMA**	**1**	**Nº HOJAS**	
APELLIDO Y NOMBRE						**LEGAJO**	

Instrucciones: coloque nombre y apellido **en cada hoja** que va a entregar. Lea atentamente cada consigna. Desarrolle detalladamente y con letra clara los ejercicios para obtener el puntaje completo. Puede usar lápiz o tinta para desarrollar los ejercicios, pero el **resultado final debe estar en tinta**. No se permite corrector, tache si es necesario. Cuando finalice, indique el número de hojas extra empleadas en el encabezado. Debe obtener un **mínimo de 60 puntos para aprobar** el examen. Dispone de **2 horas** para su resolución. ÉXITO!

10

1. Determine la derivada de: $F(x) = \int_{x^3}^{2} \frac{1}{t^4} dt$

Para obtener la derivada se debe aplicar el TFCI:

$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$ en nuestro caso $F(x) = \int_{x^3}^{2} \frac{1}{t^4} dt$. Se aplican propiedades de integrales para llegar a la forma conveniente y se tiene en cuenta la regla de la cadena, por lo que:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt\right] = \frac{d}{dx}\left[-\int_a^{u(x)} f(t)dt + \int_a^{v(x)} f(t)dt\right]$$
$$= -f[u(x)] * u'(x) + f[v(x)] * v'(x)$$

$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_{x^3}^{2} \frac{1}{t^4} dt\right] = \frac{d}{dx}\left[-\int_2^{x^3} \frac{1}{t^4} dt\right]$ **(5p) procedimiento**

$= -\frac{1}{x^{12}} \cdot 3x^2 = \mathbf{-3/x^{10}}$ **(5p) resultado**

30

2. Encontrar las siguientes integrales:

a. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4\,x}{\sqrt{1-2x^2}} dx$ b. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

a.

Sustitución

a) $\int_0^{1/2} \frac{4x}{\sqrt{1-2x^2}} dx =$

$u = 1 - 2x^2$
$du = 0 - 4x\,dx$
$-du = 4x\,dx$

$-\int_1^{1/2} \frac{du}{\sqrt{u}} = \int_{1/2}^{1} (u)^{-1/2} du =$

$x = 0 \Rightarrow u = 1$
$x = 1/2 \Rightarrow u = 1/2$

$= \frac{u^{1/2}}{1/2}\Big]_{1/2}^{1} = 2\left(u^{1/2}\right]_{1/2}^{1} = 2\left(1^{1/2} - 1/2^{1/2}\right)$

$= 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{2 - \sqrt{2}}$

Sustitución de la variable (4p). Nuevos extremos de integración (4p) Integrar (5p). Resultado (2p)

b.

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO		TERCER PARCIAL				FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES Naturaleza - Ciencia - Humanismo	
ASIGNATURA	Elementos de Cálculo I	**AÑO**	2019	**TEMA**	**1**	**Nº HOJAS**	
APELLIDO Y NOMBRE						**LEGAJO**	

b) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx =$ $\quad u = \ln x \quad du = \frac{1}{x}dx \quad dv = x^{-1/2}dx \quad v = 2x^{1/2}$

$2\sqrt{x}\ln x - \int 2\sqrt{x}\,\frac{1}{x}\,dx =$

$2\sqrt{x}\ln(x) - 2\int \frac{\sqrt{x}}{x}\,dx =$

$2\sqrt{x}\ln(x) - 2\int x^{1/2}x^{-1}\,dx =$

$2\sqrt{x}\ln(x) - 2\int x^{-1/2}\,dx =$

$2\sqrt{x}\ln(x) - 2\,\frac{x^{1/2}}{1/2} + C$

$2\sqrt{x}\ln(x) - 4\sqrt{x} + C = \boxed{2\sqrt{x}\,(\ln(x) - 2) + C}$

Planteo por partes: selección de u y dv (5p) , Integrar (8p), Resultado +C (2p)

20

3. Resolver la integral definida (*Ayuda: esta integral ¿converge o diverge?*)

$$\int_0^{16} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\ dx$$

c) $\int_0^{16} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx =$

$\lim_{a\to 0^+}\left(\int_a^{16} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx\right) = \lim_{a\to 0^+}\left(\int_a^{16} x^{-1/4}\,dx\right) =$

$\lim_{a\to 0^+}\left(\frac{4}{3}x^{3/4}\Big]_a^{16}\right) = \frac{4}{3}\left(\lim_{a\to 0^+} 16^{3/4} - \lim_{a\to 0^+} a^{3/4}\right) =$

$\frac{4}{3}(8 - 0) = \boxed{\frac{32}{3}}$

Planteo de integral impropia con límite (8p), Integración (6p), evaluar límite y resultado (6p)

20

4. Dada la región delimitada por las curvas $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x$.
   a. Obtenga una expresión para calcular el área de dicha región **(5p)**
   b. Plantee una integral que permita calcular el volumen del sólido generado cuando dicha región gira en torno a la recta $x = 2.5$. Indique el método empleado y grafique **(10p)**
   c. Obtenga una expresión para calcular la longitud de la curva inferior que delimita la región **(5p)**

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

TERCER PARCIAL

FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

ASIGNATURA	Elementos de Cálculo I	**AÑO**	2019	**TEMA**	**1**	**Nº HOJAS**	
APELLIDO Y NOMBRE						**LEGAJO**	

a. Puntos de intersección entre ambas curvas: $f(x) = g(x)$

$$x^2 = 2x \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0\,, y_1 = 0 \\ x_2 = 2\,, y_2 = 4 \end{cases}$$ **Extremos (2p) , Integral (3p)**

$$A = \int_{x_1}^{x_2} [g(x) - f(x)]dx = \int_0^2 [2x - x^2]dx$$

b. Método de arandelas. **Mencionar método (1p) Gráfico (1p)**

Radio mayor $R(y) = 2.5 - \frac{y}{2}$ **(2p)**

Radio menor $r(y) = 2.5 - \sqrt{y}$ **(2p)**

$V = \int_{y_1}^{y_2} \pi[R^2(y) - r^2(y)]dy$

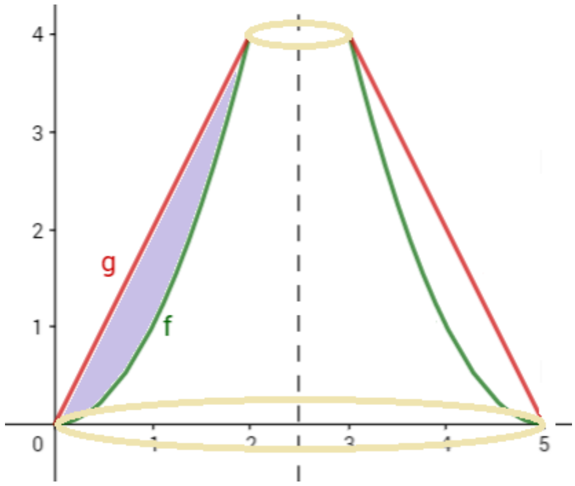
$V = \int_0^4 \boldsymbol{\pi}[\left(2.5 - \frac{y}{2}\right)^2 - \left(2.5 - \sqrt{y}\right)^2]\boldsymbol{dy}$ **(4p)**

O bien por casquillos:

Altura del casquillo: $h(x) = g(x) - f(x) = 2x - x^2$ **(2p)**

Radio: $r(x) = 2.5 - x$ **(2p)**

$\boldsymbol{V} = \int_0^2 \boldsymbol{2\pi(2.5 - x)(2x - x^2)dx}$ **(4p)**



c. Siendo $f'(x) = 2x$ **(1p)**

$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx = \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2}dx$ **Extremos (2p) Integral (2p)**

10

5. En la reserva natural de la Laguna del Diamante se está estudiando la población de guanacos en función del tiempo. La variable $y(t)$ representa la cantidad de guanacos y t el tiempo en años. Se observó que la tasa de crecimiento de la población de guanacos $dy(t)/dt$ varía en función de la cantidad de guanacos, bajo la siguiente relación, con k constante:

$\frac{dy(t)}{dt} = k(700 - y)$ (1)

Compruebe que la población de guanacos puede modelarse mediante la función $y(t) = 700 - Ce^{-kt}$, con C y k constantes, es decir, que dicha función es solución de la ecuación diferencial (1)

Sea $y(t) = 700 - Ce^{-kt}$, derivando respecto al tiempo tenemos que $\frac{dy(t)}{dt} = kCe^{-kt}$ **(3p)**

Reemplazando $y(t)$ en (1) tenemos:

$\frac{dy(t)}{dt} = k[700 - (700 - Ce^{-kt})] = kCe^{-kt}$ por lo tanto se verifica la solución **(8p)**

10

6. Sabiendo que la población de guanacos en la Laguna del Diamante se modela mediante la función $y(t) = 700 - 200e^{-0.5t}$, donde $y(t)$ representa la cantidad de guanacos y t el tiempo en años, encuentre el valor promedio de la población de guanacos en los primeros 5 años.

$$y_{Prom} = \frac{1}{b-a}\int_a^b y(t)dt = \frac{1}{5-0}\int_0^5 (700 - 200e^{-0.5t})dt = \frac{1}{5}[700t + 400e^{-0.5t}]_0^5 \cong 707$$

Fórmula 3p , Reemplazo 5p , resultado 2p

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

TERCER PARCIAL

FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Naturaleza - Ciencia - Humanismo

ASIGNATURA	Elementos de Cálculo I	AÑO	2019	TEMA	2	Nº HOJAS	
APELLIDO Y NOMBRE						LEGAJO	

Instrucciones: coloque nombre y apellido **en cada hoja** que va a entregar. Lea atentamente cada consigna. Desarrolle detalladamente y con letra clara los ejercicios para obtener el puntaje completo. Puede usar lápiz o tinta para desarrollar los ejercicios, pero el **resultado final debe estar en tinta**. No se permite corrector, tache si es necesario. Cuando finalice, indique el número de hojas extra empleadas en el encabezado. Debe obtener un **mínimo de 60 puntos para aprobar** el examen. Dispone de **2 horas** para su resolución. ÉXITO!

10

1. Determine la derivada de: $F(x) = \int_{x^2}^{1} \frac{1}{t^3} dt$

Para obtener la derivada se debe aplicar el TFCI:

$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$ en nuestro caso $F(x) = \int_{x^2}^{1} \frac{1}{t^3} dt$. Se aplican propiedades de integrales para llegar a la forma conveniente y se tiene en cuenta la regla de la cadena, por lo que:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt\right] = \frac{d}{dx}\left[-\int_a^{u(x)} f(t)dt + \int_a^{v(x)} f(t)dt\right]$$
$$= -f[u(x)] * u'(x) + f[v(x)] * v'(x)$$

$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_{x^2}^{1} \frac{1}{t^3} dt\right] = \frac{d}{dx}\left[-\int_1^{x^2} \frac{1}{t^3} dt\right]$ **(5p) procedimiento**

$= -\frac{1}{x^6} \cdot 2x = \mathbf{-2/x^5}$ **(5p) resultado**

30

2. Encontrar las siguientes integrales:

a. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{8x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$ b. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3} dx$

a) $\int_0^{1/4} \frac{8x}{\sqrt{1-4x^2}} dx =$

$\int_1^{3/4} \frac{du}{\sqrt{u}} = \int_{3/4}^{1} (u)^{-1/2} du =$

$\frac{u^{-1/2+1}}{-1/2+1}\Big]_{3/4}^{1} = \frac{u^{1/2}}{1/2}\Big]_{3/4}^{1} =$

$2u^{1/2}\Big]_{3/4}^{1} = 2\left((1)^{1/2} - \left(\frac{3}{4}\right)^{1/2}\right) = 2\left(\sqrt{1} - \sqrt{\frac{3}{4}}\right) =$

$2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{2-\sqrt{3}}$

Sustitución

$u = 1-4x^2$
$du = 0 - 8x\,dx$
$-du = 8x\,dx$

$x = 0 \Rightarrow u = 1$
$x = 1/4 \Rightarrow u = 3/4$

Sustitución de la variable (4p)
Nuevos extremos de int (4p)
Integrar (5p)
Resultado (2p)

b) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx =$

$-\frac{\ln(x)}{2x^2} - \int -\frac{1}{2x^2} \cdot \frac{1}{x} dx =$

$-\frac{\ln(x)}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^3} dx =$

$\boxed{-\frac{\ln(x)}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C}$

Por Partes

$u = \ln x$ $\quad dv = x^{-3} dx$
$du = \frac{1}{x} dx$ $\quad v = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}$

Planteo por partes: selección de u y dv (5p)

Integrar (8p)

Resultado +C (2p)

ASIGNATURA	Elementos de Cálculo I	AÑO	2019	TEMA	2	Nº HOJAS	
APELLIDO Y NOMBRE						LEGAJO	

20

3. Resolver la integral definida (*Ayuda: esta integral ¿converge o diverge?)*

$$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$$

c) $\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx =$

$\lim_{a\to 0^+}\left(\int_a^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx\right) = \lim_{a\to 0^+}\left(\int_a^8 (x)^{-1/3}dx\right)$

$= \lim_{a\to 0^+}\left(\frac{x^{2/3}}{2/3}\Big]_a^8\right) = \lim_{a\to 0^+}\left(\frac{3}{2}x^{2/3}\Big]_a^8\right)$

$= \frac{3}{2}\lim_{a\to 0^+}\left(8^{2/3} - a^{2/3}\right) = \frac{3}{2}\left(\lim_{a\to 0^+} 8^{2/3} - \lim_{a\to 0^+} a^{2/3}\right)$

$= 3/2\,(4 - 0) = \boxed{6}$

Planteo de integral impropia con límite (8p)

Integración (6p)

evaluar límite y resultado (6p)

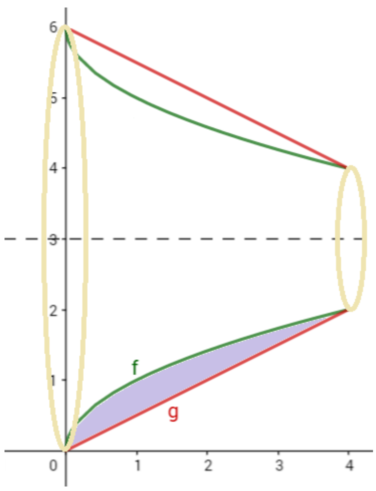
20

4. Dada la región delimitada por las curvas $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x/2$.
   a. Obtenga una expresión para calcular el área de dicha región **(5p)**
   b. Plantee una integral que permita calcular el volumen del sólido generado cuando dicha región gira en torno a la recta $y = 3$. Indique el método empleado y grafique **(10p)**
   c. Obtenga una expresión para calcular la longitud de la curva superior entre los puntos $P_1(1,1)$ y $P_2(4,2)$ **(5p)**

a. Puntos de intersección entre ambas curvas: $f(x) = g(x)$

$\sqrt{x} = x/2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0\,, y_1 = 0 \\ x_2 = 4\,, y_2 = 2 \end{cases}$ **Extremos (2p) , Integral (3p)**

$A = \int_{x_1}^{x_2}[f(x) - g(x)]dx = \int_0^4 [\sqrt{x} - x/2]dx$



b. Método de arandelas. **Mencionar método (1p) Gráfico (1p)**

Radio mayor $R(x) = 3 - g(x) = 3 - \frac{x}{2}$ **(2p)**

Radio menor $r(x) = 3 - f(x) = 3 - \sqrt{x}$ **(2p)**

$V = \int_{x_1}^{x_2}\pi[R^2(x) - r^2(x)]dx = \int_0^4 \boldsymbol{\pi}\left[\left(3 - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(3 - \sqrt{x}\right)^2\right]dx$ **(4p)**

O bien por casquillos:

Altura del casquillo: $h(y) = 2y - y^2$ **(2p)**

Radio: $r(x) = 3 - y$ **(2p)**

$\boldsymbol{V = \int_0^2 2\pi(3 - y)(2y - y^2)dy}$ **(4p)**

c. Siendo $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$ **(1p)**

$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}dx$ **Extremos (2p) Integral (2p)**

10

5. En la reserva natural de los Esteros del Iberá se está estudiando la población del aguará guazú en función del tiempo. La variable $y(t)$ representa la cantidad de individuos y t el tiempo en años. Se observó que la tasa de crecimiento de su población $dy(t)/dt$ varía en función de la cantidad de individuos, bajo la siguiente relación, con k constante:

$\frac{dy(t)}{dt} = k(250 - y)$ (1)

Compruebe que la población de aguará guazú puede modelarse mediante la función $y(t) = 250 - Ce^{-kt}$, con C y k constantes, es decir, que dicha función es solución de la ecuación diferencial (1)

Sea $y(t) = 250 - Ce^{-kt}$, derivando respecto al tiempo tenemos que $\frac{dy(t)}{dt} = kCe^{-kt}$ **(3p)**

Reemplazando $y(t)$ en (1) tenemos:
$\frac{dy(t)}{dt} = k\left[250 - \left(250 - Ce^{-kt}\right)\right] = kCe^{-kt}$ por lo tanto se verifica la solución **(8p)**

10

6. Sabiendo que la población de aguará guazú en los Esteros del Iberá se modela mediante la función $y(t) = 250 - 100e^{-0.3t}$, donde $y(t)$ representa la cantidad de individuos y t el tiempo en años, encuentre el valor promedio de la población de aguará guazú en los primeros 3 años.

$$y_{Prom} = \frac{1}{b-a}\int_a^b y(t)dt = \frac{1}{3-0}\int_0^3 (250 - 100e^{-0.3t})dt = \frac{1}{3}[250t + 100e^{-0.3t}]_0^3 \cong 264$$

Fórmula 3p , Reemplazo 5p , resultado 2p