EJERCICIO N° 1

$\rightarrow P(1) = 3$

$\rightarrow P(-2) = 51$

$\rightarrow P(0) = 7$

EJERCICIO N° 2

a) $-3x^3 + 5x^2 + x - 4$

b) $7x + 5$

c) $-t^4 + t^3 - t^2 - 10t + 5$

d) $x\sqrt{x} - |x|$

e) $4x^4 + 12x^2y^2 + 9y^4$

f) $x^4 - a^4$

g) $1 + 3a^3 + 3a^6 + a^9$

h) $1 - x^{2/3} + x^{4/3} - x^2$

i) $2x$

EJERCICIO N° 3

$P(x) = 3x^3 + 5x^2 + 5x + 5$

EJERCICIO N° 4

a) $C(x) = x^2 + 5 \qquad R(x) = -15x + 1$

b) $C(x) = 8x^3 + 15x^2 + 31x + 62 \qquad R(x) = 122$

c) $C(x) = 2x^3 - 7x^2 + 14x - 28 \qquad R(x) = 56$

EJERCICIO N° 5

Haremos la resolución de este ejercicio paso por paso.

Recordemos que $P(x)$ es divisible por $Q(x)$, si al hacer $P(x):Q(x)$ resulta resto cero.

Hacemos, entonces, paso a paso la división de polinomios. Como $P(x)$ es de grado 3 y $Q(x)$ de grado 2, inicialmente buscamos un monomio de grado 1 (diferencia entre grados de dividendo y divisor) que multiplicado por x^2, de por resultado $5x^3$. Ese monomio es $5x$. Luego:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 5x^3 - 2x^2 + ax - b & x^2 + 1 \\ \cline{3-3}
- & 5x^3 + \qquad 5x & 5x \\ \cline{1-2}
 & 0x^3 + 2x^2 + (a-5)x - b &
\end{array}
$$

Resulta necesario ahora, hallar un número que multiplicado por x^2, nos de $2x^2$. Así deducimos el 2. Al multiplicar por 2 al divisor, resulta (con azul el nuevo paso efectuado en el ejercicio):

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 5x^3 - 2x^2 + ax - b & x^2 + 1 \\ \cline{3-3}
- & 5x^3 + \qquad 5x & 5x + \mathbf{2} \\ \cline{1-2}
 & 0x^3 + 2x^2 + (a-5)x - b & \\
- & \qquad \mathbf{2x^2 + \qquad\quad 2} & \\ \cline{1-2}
 & \qquad \mathbf{0x^2 + (a-5)x - b - 2} &
\end{array}
$$

Hasta allí podemos avanzar con la división, puesto que lo que ha resultado es de menor grado que el divisor. Luego, la expresión $(\boldsymbol{a}-\mathbf{5})\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}-\mathbf{2}$ constituye el resto de la división. Como mencionamos al principio, ese resto debe ser igual cero, es decir, tanto el coeficiente lineal $(\boldsymbol{a}-\mathbf{5})$, como el término independiente $(-\boldsymbol{b}-\mathbf{2})$ deben valer cero. Resulta sencillo ahora obtener los valores de $\boldsymbol{a}$ y de $\boldsymbol{b}$. Es decir:

$$\boldsymbol{a}-\mathbf{5}=\mathbf{0} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{a}=\mathbf{5}}$$

$$-\boldsymbol{b}-\mathbf{2}=\mathbf{0} \rightarrow -\boldsymbol{b}=\mathbf{2} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{b}=-\mathbf{2}}$$

Una forma alternativa de realizar este último paso, hubiera sido aplicando el algoritmo de Euclides. Sería:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})(\mathbf{5}\boldsymbol{x}+\mathbf{2})+\mathbf{0}$$

Al multiplicar el dividendo por el cociente, resulta:

$$(x^2+1)(5x+2)=5x^3+2x^2+5x+2$$

Luego, por igualdad de polinomios, resulta:

$$5x^3+2x^2+ax-b=5x^3+2x^2+5x+2$$

De donde:

$$\boxed{\boldsymbol{a}=\mathbf{5}} \quad \text{y} \quad \boxed{\boldsymbol{b}=-\mathbf{2}}$$

EJERCICIO N° 6

a) $a=-4$

b) $a=-3$

EJERCICIO N° 7

a) $(y-6)(y+9)$

b) $2x^2(x^2+2x-7)$

c) $7xy^2(-x^3+2y+3y^2)$

EJERCICIO N° 8

a) $(x+1)(x-3)$

b) $8\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)$

c) $(x-1)(x-5)$

d) $6(x+3)\left(x-\frac{7}{6}\right)$

EJERCICIO N° 9

a) $(x^2+1)(x+4)$

b) $(x^2-3)(2x+1)$

c) $(-3x^2+1)(3x+1)$

d) $(x^4+1)(x+1)$

EJERCICIO N° 10

a) Haremos la resolución de este ejercicio paso por paso.

Dado el binomio $x^{5/2} - x^{1/2}$, observamos que en ambos términos aparece x. Luego, podemos extraerla como factor común.

Como siempre que aplicamos este caso de factoreo, seleccionamos el menor exponente con el que aparece la indeterminada. En este caso el factor común es:

$$x^{1/2}$$

Para expresar el polinomio factorizado, es preciso dividir cada término por el factor común. Es decir:

para el primer término: $x^{5/2} : x^{1/2} = x^{5/2 - 1/2} = x^{4/2} = x^2$

y para el segundo término: $x^{1/2} : x^{1/2} = x^{1/2 - 1/2} = x^0 = 1$

Como podemos observar, en ambos casos hemos resuelto la división, aplicando la propiedad de potenciación "división de potencias de igual base".

Resulta, entonces:

$$x^{1/2}(x^2 - 1)$$

En la última expresión, observamos que dentro del paréntesis podemos factorizar porque hay una diferencia de cuadrados (recuerda que al 1 podemos considerarlo elevado al exponente que necesitemos, porque siempre da 1)

Finalmente, el binomio queda completamente factorizado como:

$$x^{1/2}(x+1)(x-1)$$

b) $x^{-3/2}(x+1)^2$

c) $-x^{1/3}(x-2)^{-1/3}(4+3x)$

EJERCICIO N° 11

a) $2(x+1)\left(x+\frac{3}{2}\right)$

b) $ab(5-8c)$

c) $9(x-5)(x+1)$

d) $(x-6)(x+6)$

e) $(7-2y)(7+2y)$

f) $4ab$

g) $(2x+5)(4x^2-10x+25)$

h) $3x(x+3)(x-3)$

i) $(y-2)(y+2)(y-3)$

j) $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(3x+5)$

k) $(x-2-3y)(x+2+3y)$

l) $(x+y)(x+1)(x-1)$

m) $4(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

EJERCICIO N° 12

a) $D: (-\infty, \infty)$

b) $D: (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$

c) $D: (1, \infty)$

EJERCICIO N° 12

a) $D: (-\infty, \infty)$

b) $D: (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$

c) $D: (1, \infty)$

EJERCICIO N° 13

a) $\frac{(x+2)}{2(x-1)}; x \neq 1$

b) $\frac{(x-2)}{(x-1)}; x \neq 1, x \neq -1$

c) $\frac{(x+2)}{(x+1)}; x \neq -1, x \neq -4$

d) $\frac{y}{y-1}; y \neq 1, y \neq -1$

e) $-\frac{x+1}{x^2+x+1}; x \neq 1$

f) $\frac{z}{z+1}; z \neq 3, z \neq -1, z \neq 0$

EJERCICIO N° 14

a) $\frac{1}{4(x-2)}; x \neq 2, x \neq -2$

b) $\frac{1}{2}; x \neq 2, x \neq -2$

c) $-\frac{x-1}{x+1}; x \neq -1, x \neq 3, x \neq -3$

d) $\frac{1}{t^2+9}; t \neq -3, t \neq 3$

e) $x^2(x+1); x \neq -1, x \neq 0$

f) $\frac{(a-3)^2}{a^2(a+3)}; a \neq -3, a \neq 3, a \neq 0$

g) $-1; x \neq -1, x \neq 3, x \neq -4$

EJERCICIO N° 15

a) $\frac{x-5}{x+4}; x \neq -4$

b) $\frac{3x+7}{(x+5)(x-3)}; x \neq 3, x \neq -5$

c) $\frac{x^2+3x+12}{(x+6)(x-4)}; x \neq -6, x \neq 4$

d) $\frac{3x+2}{(x+1)^2}; x \neq -1$

e) $\frac{x^2+x+1}{x^3}; x \neq 0$

f) $\frac{-2x+1}{(x-3)(x+2)}; x \neq -2, x \neq 3$

g) $\frac{1}{x}; x \neq 0, x \neq 2$

h) $x+3; x \neq 3, x \neq -3, x \neq -5$

i) $\frac{x-5}{x}; x \neq -5, x \neq 0$

EJERCICIO N° 16

a) Haremos la resolución de este ejercicio paso por paso.

Como lo dice en el enunciado, es un ejercicio que encontraremos con mucha frecuencia en un tema central de Cálculo I. El objetivo será hallar una expresión algebraica en la que h no aparezca como un factor en el denominador.

Aplicamos inicialmente la propiedad de exponente negativo. Resulta:

$$\frac{(x+h)^{-3}-x^{-3}}{h}=\frac{\frac{1}{(x+h)^3}-\frac{1}{x^3}}{h}$$

Como en el numerador de la expresión, hay una diferencia de fracciones de distinto denominador, buscaremos el mínimo común múltiplo para poder realizar la operación. El m.c.m., sería:

$$(x+h)^3x^3$$

Aplicando el algoritmo de la diferencia de fracciones de diferente denominador ("se divide m.c.m. por cada denominador y se multiplica por el respectivo numerador) resulta:

$$\frac{(x+h)^{-3}-x^{-3}}{h}=\frac{\frac{x^3-(x+h)^3}{(x+h)^3x^3}}{h}$$

Desarrollando el cubo del binomio y escribiendo la división entre $\frac{x^3-(x+h)^3}{(x+h)^3x^3}$ y h, por medio de una multiplicación, resulta:

$$\frac{(x+h)^{-3}-x^{-3}}{h}=\frac{x^3-x^3-3hx^2-3xh^2-h^3}{(x+h)^3x^3}\cdot\frac{1}{h}$$

Luego:

$$\frac{(x+h)^{-3}-x^{-3}}{h}=\frac{-3hx^2-3xh^2-h^3}{(x+h)^3x^3}\cdot\frac{1}{h}$$

De donde, aplicando factor común en el numerador de la primera fracción:

$$\frac{(x+h)^{-3}-x^{-3}}{h}=\frac{h(-3x^2-3xh-h^2)}{(x+h)^3x^3}\cdot\frac{1}{h}$$

Simplificando:

$$\frac{(x+h)^{-3}-x^{-3}}{h}=\frac{-3x^2-3xh-h^2}{(x+h)^3x^3}$$

Esta expresión es válida para $x\neq 0$ y $x\neq -h$

Como se ve, hemos logrado hallar una expresión algebraica fraccionaria en la que h no es un factor del dividendo.

b) $\frac{-3}{2(x+h)(2+x)}; x\neq -2, x\neq -h$

c) $\frac{(x-13)(x+2)^2}{(x-3)^3};\ x\neq 3$

d) $\frac{(x+2)}{(x+1)^{3/2}};\ x\neq -1$

e) $\frac{(1-2x^2)}{(1-x^2)^{3/2}};\ x\neq -1, x\neq 1$

EJERCICIO N° 17

a) $Verdadero. Q(x) = (x^3 - 2^3)(x^3 + 2^3).$

b) $Verdadero. Q(-2) = ((-2)^6 - 64) = 0.$

c) $Falso. Grado\ de\ Q(x) > Grado\ de\ R(x).$

d) $Verdadero. Q(x) = (x^3 - 2^3)(x^3 + 2^3) = (x^3 - 2^3)(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

e) $Falso. Q(-1) = ((-1)^6 - 64) = (1 - 64) = -63$

EJERCICIOS ADICIONALES

EJERCICIO N° 7

a) $7(a^2 - xy)(a^2 + xy)$

b) $\frac{1}{5}ab^2\left(b - \frac{1}{3}\right)^2$

c) $(3t - 4q)^3$

d) $\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y^2\right)^3$

e) $(x + 5)(2x - 1)(2x + 1)$

f) $(x + 4)(3x - 2)(3x + 2)$