PARTE A: Ejercicios Comunes a Cálculo/Elementos

1. Dadas las siguientes sucesiones:

i. $a_n = \frac{n}{n+1}, n \geq 0$ ii. $b_n = \frac{1-2n}{n^2}, n \geq 1$ iii. $c_n = 3 + 5n, n \geq 1$

a. Grafique los primeros 8 términos de la sucesión

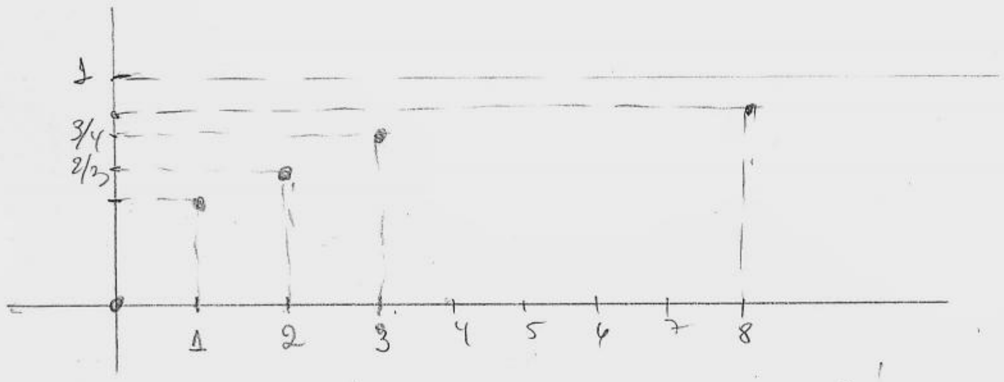
b. Indique, a través de la observación de la gráfica anterior, a qué valor converge y pruebe utilizando definición de límite, que dicho valor es correcto.

Solución

i) a) $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \geq 0$

$\left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \ldots \frac{n}{n+1} \ldots \right\}$

$a_0 = \frac{0}{0+1} = 0$ $a_7 = \frac{7}{7+1} = \frac{7}{8}$



b) Observación: $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ (*) : $\lim_{n \to \infty} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0})} = \frac{1}{1} = 1$

En la gráfica se observa que se aproxima a 1.

(*) Teorema: Si $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ y $f(n) = a_n$, donde n es un entero, entonces $\lim_{n \to \infty} a_n = L$.

$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x+1} = 1$ y $f(n) = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

(ii) $b_n = \dfrac{1-2n}{n^2}$ $n \geq 1$

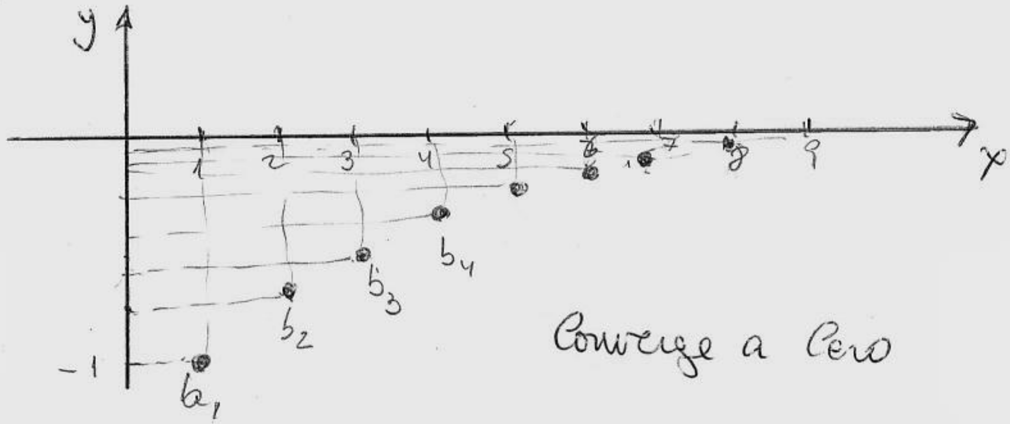
a) $b_1 = \dfrac{1-2.1}{1^2} = \dfrac{-1}{1} = -1$; $b_4 = \dfrac{1-8}{16} = -7/16$; $b_7 = \dfrac{1-14}{49} = \dfrac{-13}{49}$

$b_5 = \dfrac{1-10}{25} = -\dfrac{9}{25}$ $b_8 = \dfrac{1-16}{64} = \dfrac{-15}{64}$

$b_2 = \dfrac{1-2.2}{2^2} = \dfrac{-3}{4}$; $b_6 = \dfrac{1-12}{36} = \dfrac{-11}{36}$ ⋮

$b_3 = \dfrac{1-6}{9} = -5/9$;

$\{b_n\} = \left\{-1, -\dfrac{3}{4}, -\dfrac{5}{9}, \dfrac{-7}{16}, -\dfrac{9}{25}, -\dfrac{11}{36}, -\dfrac{13}{49}, -\dfrac{15}{64}, \ldots, \dfrac{1-2n}{n^2}, \ldots\right\}$



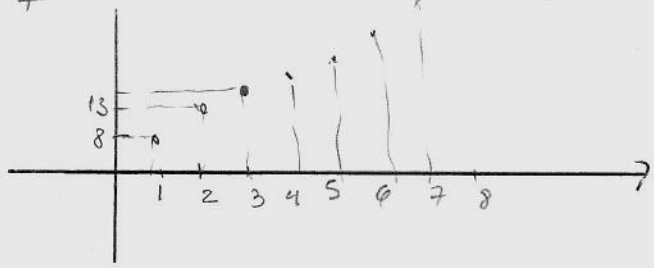
Converge a Cero

b) Por el teorema anterior podemos calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-2n}{n^2}$ calculando $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-2x}{x^2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{2x}{x}}{\frac{x^2}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{x}} - 2}{\underset{\to\infty}{x}} = 0$$

(iii) $c_n = 3+5n$ $n \geq 1$

a) $c_1 = 3+5 = 8$; $c_2 = 3+5.2 = 13$; $c_3 = 3+5.3 = 18$,
$c_4 = 3+5.4 = 23$, $c_5 = 3+5.5 = 28$; $c_6 = 3+5.6 = 33$
$c_7 = 3+5.7 = 38$, $c_8 = 3+5.8 = 43$ ....



Tiende a ∞. Diverge.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(3+5x) = \infty$ entonces

$\lim\limits_{n\to\infty}(3+5n) = \infty$

2. Calcule los siguientes límites de sucesiones utilizando propiedades. Justifique cada paso.

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2n}+\frac{3}{3n^2}+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{(-\pi)^n}{5^n}+3^{n/2}\right]$

Solución

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2n}+\frac{3}{3n^2}+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]=\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}}_{\to 0}+\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{3n^2}}_{\to}+\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{*\to 0}=0$

(*) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n=0$ si $|x|<1$; $|x|=\left|\frac{2}{3}\right|<1$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{(-\pi)^n}{5^n}+3^{n/2}\right]=\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-\pi}{5}\right)^n}_{*\to 0}+\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}3^{n/2}}_{**\to \text{Diverge}}$: Diverge

$* \left|-\frac{\pi}{5}\right|<1$

$** |3|>1$ si $n\to\infty$, $\frac{n}{2}\to\infty$ también $\left\{ \lim\limits_{x\to\infty}3^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{3})^x=\infty \right.$ función exponencial creciente.

3. Calcule el límite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ estudie la monotonía y grafique los primeros 5 términos para cada una de las siguientes sucesiones:

a. $a_n=\frac{4n^2+2}{n^2+3n-1}$

b. $b_n=\frac{\sqrt{3n^2+2}}{2n+1}$

c. $c_n=(-1)^n\frac{n}{n+2}$

d. $d_n=\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^n$

Una sucesión $\{a_n\}$ se llama creciente si $a_n\le a_{n+1}$ para toda $n\geq 1$.

Una sucesión $\{a_n\}$ se llama decreciente si $a_n\geq a_{n+1}$ para toda $n\geq 1$

Una sucesión es monótona si es creciente o decreciente.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+2}{n^2+3n-1}=4$ luego tiene una cota.
por el teorema

$a_1=\frac{4.1^2+2}{1^2+3.1-1}=\frac{6}{3}=2$; $a_3=\frac{38}{17}\simeq 2,23>2=a_2$

$a_2=\frac{18}{9}=2=a_1$ $\qquad a_4=\frac{66}{27}\simeq 2,44>\frac{38}{17}=a_3$

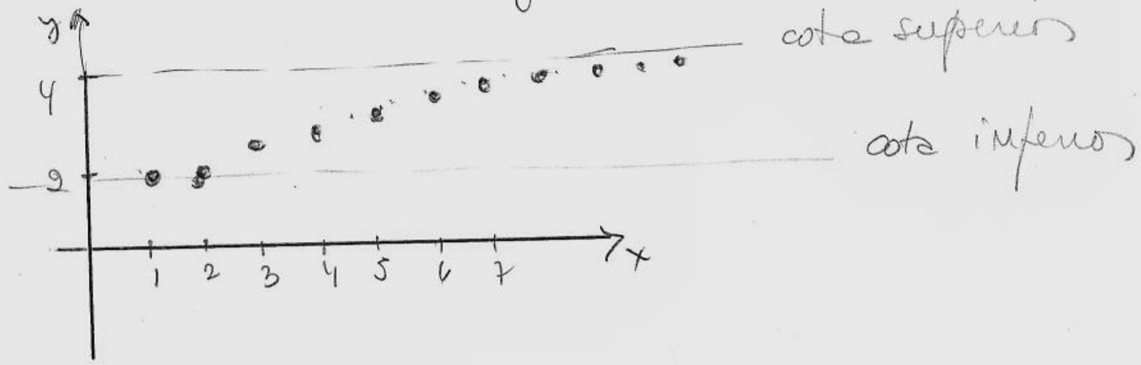
$a_5=\frac{102}{39}\simeq 2,62>\frac{66}{27}=a_4$

$$\{a_n\} = \left\{2,\ 2,\ \frac{38}{17},\ \frac{66}{27},\ \frac{102}{39},\ \ldots,\ \frac{4n^2+2}{n^2+3n-1},\ \ldots\right\}$$

$$2 = a_1 = a_2 < a_3 < a_4 < a_5 \ \cdots\cdots \ < 4$$

cota inferior — cota superior

La sucesión es acotada y monótona $\longrightarrow$ Converge.



ⓑ $$b_n = \frac{\sqrt{3n^2+2}}{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n^2+2}}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3\frac{n^2}{n^2}+\frac{2}{n^2}}}{\frac{2n}{n}+\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3+\frac{2}{n^2}}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\simeq 0{,}87)$$

$$b_1 = \frac{\sqrt{3+2}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3} \simeq 0{,}74$$

$$b_2 = \frac{\sqrt{15}}{5} \simeq 0{,}774$$

$$b_3 = \frac{\sqrt{29}}{7} \simeq 0{,}769$$

$$b_4 = \frac{\sqrt{50}}{9} \simeq 0{,}785$$

$$b_5 = \frac{\sqrt{77}}{11} \simeq 0{,}79$$

$$b_6 = \frac{\sqrt{110}}{13} \simeq 0{,}806$$

- a partir de $n=4$ la sucesión es creciente
- está acotada superiormente por $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- está acotada inferiormente por $\frac{\sqrt{5}}{3}$

Es convergente pues es acotada y monótona a partir de $n=4$

TP. Nº 9 : Sucesiones y series

Ej. 3. continuación

ⓒ $C_n = (-1)^n \cdot \dfrac{n}{n+2}$

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \overbrace{(-1)^n}^{\pm 1} \cdot \lim_{n\to\infty} \overbrace{\frac{n}{n+2}}^{1}$$ ¡No existe!

la sucesión es divergente.

$C_1 = (-1)^1 \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

$C_2 = (-1)^2 \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}$

$C_3 = (-1)^3 \cdot \dfrac{3}{5} = -\dfrac{3}{5}$

La sub sucesión de términos pares converge a 1

La sub sucesión de términos impares converge a −1

Es una sucesión de términos alternantes (−, +, −, + ...)

Luego, no es monótona

ⓓ $d_n = \left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^n \longrightarrow 1^\infty$ que es una indeterminación

$$\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^x = e^{\ln\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^x} = e^{x\ln\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)}$$

Como $\lim\limits_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \ln\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \ln\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right) \nearrow^{\infty \cdot 0} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)}{\frac{1}{x}} \nearrow^{\frac{0}{0}} =$$

$$\underset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\frac{3x+1}{\cancel{3x-1}}} \cdot \frac{[\overbrace{3(3x-1)-(3x+1)3}^{-6}]}{(3x-1)^{\cancel{2}}}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-6 \cdot (-x^2)}{(3x+1)(3x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2}{9x^2-1} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^x = e^{\lim_{x\to\infty} x \cdot \ln\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)} = \underline{e^{2/3}} \simeq \underset{\text{cota}}{\underline{1,94773}}.$$

$a_1 = \left(\frac{4}{2}\right)^1 = 2^1 = 2$

$a_2 = \left(\frac{7}{5}\right)^2 = 1,96$

$a_3 = \left(\frac{10}{8}\right)^3 = 1,953$

$a_4 = \left(\frac{13}{11}\right)^4 = 1,950$

$a_5 = \left(\frac{16}{14}\right)^5 = 1,9496$

$a_6 = \left(\frac{19}{17}\right)^6 = 1,9490$

La sucesión es monótona (no creciente) y acotada ($M = 2$, $m = e^{2/3}$), entonces es convergente.

4. **Enuncie el teorema del Encaje o Sandwich y calcule el límite de las siguientes sucesiones:**

a. $a_n = \frac{sen(n)}{n}$

b. $b_n = \frac{n \cdot \cos(n)}{n^2+1}$

Solución

Si $a_n \le b_n \le c_n$ para $n \geq n_0$ y $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} c_n = L$

entonces $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = L$

ⓐ

$$-1 \le \text{sen}(n) \le 1$$

$$\frac{-1}{n} \le \frac{\text{sen}(n)}{n} \le \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) \le \lim_{n \to \infty} \frac{\text{sen}(n)}{n} \le \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}$$

$$0 \le \lim_{n \to \infty} \frac{\text{sen}(n)}{n} \le 0$$

luego $\boxed{\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\text{sen}(n)}{n} = 0}$

ⓑ

$$-1 \le \cos(n) \le 1$$

$$-1(n) \le n \cdot \cos(n) \le 1 \cdot n$$

$$\frac{-n}{n^2+1} \le \frac{n \cos(n)}{n^2+1} \le \frac{n}{n^2+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{-n}{n^2+1} \le \lim_{n \to \infty} \frac{n \cdot \cos(n)}{n^2+1} \le \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n^2+1}$$

$$0 \le \lim_{n \to \infty} \frac{n \cdot \cos(n)}{n^2+1} \le 0$$

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \frac{n \cdot \cos(n)}{n^2+1} = 0}$$

5. **Para las series:**

i. $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

a. **Identifique y enuncie qué nombre recibe la serie.**

b. **Calcule la expresión general de la sucesión de sumas parciales.**

c. **Calcule, si existe, la suma de cada serie.**

Solución

i a) $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ es una serie geométrica.

b) $S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n = \sum_{i=0}^{n} ar^i$

$$\{S_n\} = \left\{\frac{a(1-r^n)}{1-r}\right\} \quad r \neq 1$$

c) Si $|r| < 1$, la serie converge, luego existe

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-\overset{\to 0}{r^n})}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

ii $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

a) Esta serie es la serie telescópica.

b) $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) +$

$\dots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$

$$\{S_n\} = \left\{1 - \frac{1}{n+1}\right\}$$

c) $\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1$

luego $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1$

La serie telescópica siempre es convergente.

6. Utilizando el ejercicio anterior, indique si las siguientes series convergen o divergen. Si convergen, calcule su suma:

a. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ b. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ c. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ d. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n}$

Solución

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ es geométrica $a=1$; $r=\frac{1}{2}$. Como $|r|=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}<1$

converge y $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$; $a=1$, $|r|=\left|\frac{3}{2}\right|>1 \Rightarrow$ diverge.

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ con $a=\frac{1}{2}$, $r=\frac{1}{2}$ y $|r|=\frac{1}{2}<1$

$=\frac{1/2}{1-1/2}=\frac{1/2}{1/2}=1 \Rightarrow$ converge.

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=\frac{2/5}{1-2/5}+\frac{3/5}{1-3/5}=(*)$

$a=2/5$; $|r|=|2/5|<1$ $a=3/5$; $|r|=|3/5|<1$

$(*)=\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=$

7. Enuncie la condición necesaria de convergencia y luego analice si las siguientes series convergen o divergen:

a. $\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{4n^2+2}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n^2+2)n!}{(n+2)!}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n+12}{2^n}$

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{4n^2+2}$

$$\boxed{\text{Teorema: Si } \sum_{i=1}^{\infty} a_n \text{ converge, entonces } a_n \to 0 \text{ cdo } n\to\infty}$$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{4n^2+2}=+\infty$ Diverge.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n^2+2)n!}{(n+2)!}$; $\frac{(4n^2+2)\cancel{n!}}{(n+2)(n+1)\cancel{n!}}=\frac{4n^2+2}{n^2+n+2n+2}=$

$=\frac{4n^2+2}{n^2+3n+2}\longrightarrow 4\neq 0$ Diverge

cdo $n\to\infty$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+12}{2^n} = \sum_1^{\infty} a_n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+12}{2^n} = ?$$

Analizando el $a_n = \dfrac{n^2+2n+12}{2^n}$ vemos que a partir de $n=6$, el numerador crece más lentamente que el denominador. Cdo $n \to \infty$, este hecho hace que el cociente tienda a cero

$n=1 \longrightarrow \frac{14}{2} = 7$

$n=2 \longrightarrow \frac{20}{2^2} = \frac{20}{4} = 5$

$n=3 \longrightarrow \frac{39}{8} \cong 4{,}8$

$n=4 \longrightarrow \frac{36}{16} \simeq 2{,}25$

$n=5 \longrightarrow \frac{45}{32} \simeq 1{,}4$

$n=6 \longrightarrow \frac{60}{64} \simeq 0{,}93$

$n=7 \longrightarrow \frac{75}{128} \simeq 0{,}59.$

$\downarrow$

0

Este hecho sólo me dice que la serie "puede" ser convergente, pero se necesita recurrir a otros criterios.

Como el recíproco del teorema no es verdadero, no podemos afirmar nada sobre la convergencia, ya que $a_n \to 0$ es condición necesaria pero no suficiente. Ejemplo

$\displaystyle\sum^{\infty} \frac{1}{n}$; $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ pero esta serie (armónica) diverge.

8. Enuncie el criterio de comparación directa y en el límite. Luego analice la convergencia de las siguientes series:

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{sen(n)}{n^2}\right|$ b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(n+1)}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

Teorema: Criterio de comparación
Sea $\sum a_n$, $\sum c_n$ y $\sum d_n$ series con términos no negativos. Suponga que para algún entero N, $d_n \le a_n \le c_n$ para toda $n > N$
a. Si $\sum c_n$ converge, entonces $\sum a_n$ también converge.
b. Si $\sum d_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ también diverge.

Teorema: Criterio de comparación del límite
Suponga que $a_n > 0$ y $b_n > 0$ para toda $n \ge N$ (N, un entero).
1. Si $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = c > 0$, entonces $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen o divergen ambas.
2. Si $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0$, y $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge.
3. Si $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \infty$, y $\sum b_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ diverge.

a.) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{sen(n)}{n^2}\right|$, serie de términos no negativos
se compara con $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, serie p con p>1, convergente
Por Criterio de comparación directa: $a_n = \left|\frac{sen(n)}{n^2}\right|$ y $c_n = \frac{1}{n^2}$
Como $\left|\frac{sen(n)}{n^2}\right| < \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{sen(n)}{n^2}\right|$ converge

b.) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(n+1)}$
Se trabaja con a_n: $\frac{1}{(2n-1)(n+1)} = \frac{1}{2n^2+n-1} \le \frac{1}{2n^2} < \frac{1}{n^2}$, serie p con p<1, convergente
Por tanto, por criterio de comparación directa: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(n+1)}$ converge

c.) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
se trabaja con a_n: $\overbrace{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}^{a_n} > \overbrace{\frac{1}{\sqrt{n(n+n)}}}^{d_n} = \frac{1}{\sqrt{2}\,n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{n}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ serie armónica diverge
Por criterio de comparación directa: $a_n > d_n$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ diverge

9. Enuncie el criterio del cociente y analice la convergencia de las siguientes series:

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{3^n \cdot n!}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-1)!}{(4n-3)!}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$ d. $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Teorema: Criterio de la razón o del cociente
Sea $\sum a_n$ una serie con términos positivos y suponga que: $\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ entonces:
a. La serie converge si $\rho < 1$.
b. La serie diverge si $\rho > 1$ o si ρ es infinito.
c. El criterio no es concluyente si $\rho = 1$.

a.) Determino a_{n+1}/a_n :
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^{n+1}}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}\cdot\frac{3^n\cdot n!}{(n+1)^n} = \frac{(n+2)^n(n+2)\cdot\cancel{3^n}\,\cancel{n!}}{\cancel{3^n}\cdot 3^1\,(n+1)\cancel{n!}\,(n+1)^n} = \frac{(n+2)^{n+1}}{3\,(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$$

$(n+1)! = n!\,(n+1)$

Calculo ahora $\rho = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n} \overset{1^\infty}{\cdot} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$\rho = \frac{1}{3} \cdot e^{1} \cdot 1 = \frac{e}{3} \Rightarrow \text{Como } \rho = \frac{e}{3} < 1$$

Serie converge según criterio del cociente

CA:

Para $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n}$ se resuelve la indeterminación:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n} = e^{\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n}} = e^{1} = e$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} n \cdot \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \overset{\infty \cdot 0}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}{1/n} \overset{0/0}{}$$

Reacomodo factores

Aplico L'H

Derivo

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)} \cdot \frac{1(n+1)-(n+2)\cdot 1}{(n+1)^2}}{-1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\cancel{n+1}}{n+2} \cdot \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}-2}{(n+1)^{\cancel{2}}}}{-1/n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{(n+2)(n+1)} \cdot (-n^2) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+3n+2} = \boxed{1}$$

Ejercicio 9b

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)!}{(4n-3)!}$$

Para aplicar el criterio del conciente se determina a_{n+1} y a_n:

$$a_{n+1} = \frac{[3(n+1)-1]!}{[4(n+1)-3]!} = \frac{(3n+3-1)!}{(4n+4-3)!} = \frac{(3n+2)!}{(4n+1)!}$$

$$a_n = \frac{(3n-1)!}{(4n-3)!}$$

Determino el cociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3n+2)!}{(4n+1)!}\frac{(4n-1)!}{(3n-1)!} = \frac{(3n+2)(3n-1)!}{(4n+1)(4n-1)!}\frac{(4n-1)!}{(3n-1)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3n+2)}{(4n+1)}$$

Ahora se determina el límite de la expresión anterior para n tendiendo a infinito:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+2)}{(4n+1)} = \frac{3}{4}$$

Como $\rho < 1$ entonces la **serie converge.**

Ejercicio 9 (c)

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$

Obtengo la relación a_{n+1}/a_n:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n} = \frac{\cancel{5^n}}{\cancel{5^n}.5} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{5}\,\frac{n+1}{n}$$

Luego determino $\rho = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n)$:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5}\,\frac{n+1}{n} = \frac{1}{5} < 1 \Rightarrow$$ la serie converge.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} n.\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Obtengo la relación a_{n+1}/a_n:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^n}\left(\frac{2}{3}\right)}{\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^n}} = \frac{2}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Luego determino ρ:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{2}{3} \cdot 1 < 1$$

la serie converge.

10. Enuncie el criterio de la raíz y analice la convergencia de las siguientes series:

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n$ b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n+1)^n}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$

Teorema:

Sea $\sum a_n$ una serie con términos positivos y suponga que:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \rho$$

Entonces:

a) La serie converge si $\rho<1$

b) La serie diverge si $\rho>1$ o ρ es infinito

c) El criterio no es concluyente si $\rho=1$

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^{\cancel{n}}}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n-1} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$$ la serie converge. dado que $\rho<1$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n+1)^n}$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^{\cancel{n}}}{(2n+1)^{\cancel{n}}}} = \frac{n}{2n+1}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$$ la serie converge dado que $\rho<1$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^{n}$

$$\sqrt[\cancel{n}]{\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^{\cancel{n}}} = \frac{3n}{3n+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3n}{3n+1} = 1 \Rightarrow$$ el criterio no es concluyente

↳ Para analizar la convergencia en este caso, puede elegirse algún otro criterio, por ejemplo comparación directa o por límite.

PARTE B: Ejercicios Adicionales Cálculo

11. Probar el teorema de valor absoluto: Dada la serie a_n, si: $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Demostración: para cada n,

$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ de manera que: $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$

(sumo $|a|$ a los 3 términos)

Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge (por hipótesis), entonces $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ converge, y por criterio de comparación directa, la serie no negativa $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ converge.

La igualdad $a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$ nos permite expresar a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ como diferencia de series convergentes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n| - |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Por lo tanto: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge o equivalentemente $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

12) Enuncie el teorema de convergencia absoluta y condicional, y analice la convergencia de las siguientes series y diga si converge de forma absoluta o condicional:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}}$

Solución

Teorema: Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces converge la $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

una serie $\sum a_n$ converge absolutamente si la serie $\sum |a_n|$ converge.

Si $\sum a_n$ converge pero $\sum |a_n|$ no converge, se dice que converge condicionalmente.

ⓐ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}$

Prueba de la serie alternante.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots$ $b_n > 0 \ \forall n$

es una serie alternante

Si $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ satisface i) $b_{n+1} \le b_n \ \forall n$ es decreciente

ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

entonces la serie converge.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}$ b_n

es alternante

i) $\frac{n+1}{(n+1)^2+1} \overset{?}{\le} \frac{n}{n^2+1}$

$\frac{n+1}{n^2+2n+2} \overset{?}{\le} \frac{n}{n^2+1}$

$(n+1)(n^2+1) \overset{?}{\le} n(n^2+2n+2)$

$\cancel{n^3} + \cancel{n^2} + n + 1 \le \cancel{n^3} + 2\cancel{n^2} + 2n$ Si

ii) ¿ $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0 \quad \text{Sí}$$

Luego $\sum (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}$ converge

2) Analizamos $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

Por el criterio de comparación al límite.

$a_n = \frac{n}{n^2+1}$ $\quad b_n = \frac{1}{n}$ ($\sum \frac{1}{n}$ diverge)

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{n^2+1} : \frac{1}{n} = \frac{n}{n^2+1} \cdot n = \frac{n^2}{n^2+1}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 > 0$, entonces ambas divergen.

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1} \text{ converge.} \\ \text{y } \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1} \right| \text{ diverge} \end{array}\right\} \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1} \text{ converge condicionalmente}}$$

(b) 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \underbrace{\frac{1}{n\sqrt{n}}}_{b_n}$ es una serie alternante

i) ¿ $b_{n+1} \leq b_n$? $\quad \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} < \frac{1}{n}$ Sí pues

$n < (n+1)\sqrt{n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N}$

Ejercicio N° 12 (b) continuación

ii) ¿$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = 0 \quad \text{sí}.$$

Luego $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ es convergente.

2) Analizamos $\sum |a_n|$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$ es una serie p con $p = \frac{3}{2} > 1$ converge.

Luego $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge y $\sum \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n\sqrt{n}} \right|$ también converge. Luego $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge absolutamente.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ es una serie alternante y

i) $b_{n+1} \leq b_n$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{ya que } \sqrt{n} \leq \sqrt{n+1}$$

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

luego la serie es convergente.

2) Analizamos $\sum |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$

es una serie p con $p = 1/2 < 1$ entonces diverge

Luego

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ converge y} \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| \text{ diverge} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ converge condicionalmente}}$$

13. Enuncie el criterio de la integral y analice la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{p}, p \in \mathbb{R}$$

Teorema: Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos. Suponga que $a_n = f(n)$ donde f es una fción decreciente, positivamente y continua de x para toda $x \geq N$ (N es entero positivo). Entonces, la serie $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ y la integral $\int_N^{\infty} f(x)dx$ convergen o divergen ambas

$$\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{p} dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} x^{-p}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left.\frac{x^{-p+1}}{(1-p)}\right|_1^{b} = $$

$$\lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right) = \lim_{b\to\infty}\frac{b^{-p+1}}{1-p} - \lim_{b\to\infty}\frac{1}{1-p} \quad \to \frac{1}{1-p}$$

$$\lim_{b\to\infty}\frac{b^{-p+1}}{1-p} = $$

- si $-p+1<0$ ($p>1$) $\Rightarrow \lim_{b\to\infty}\frac{b^{-p+1}}{1-p} = 0$ Converge
- si $-p+1=0$ ($p=1$) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{1}$ Diverge.
- Si $-p+1>0$ ($p<1$) $\Rightarrow \lim_{b\to\infty}\frac{b^{-p+1}}{1-p} = \infty$ Diverge

14. Indique si las siguientes series convergen o divergen:

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{10n^2+5n+3}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+5}$

Solución

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{10n^2+5n+3} = \frac{1}{10} \neq 0 \Rightarrow$ la serie diverge por el criterio de la divergencia

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5}$

$$\frac{1}{n^2+5} < \frac{1}{n^2}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es una serie p con $p=2>1$ entonces Converge

Tenemos una mayorante Convergente luego

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5}$ converge

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+5}$

Usaremos el criterio de comparación al límite.

$a_n = \dfrac{1}{3n+5}$ $\qquad b_n = \dfrac{1}{n}$ $\quad \left(\sum \frac{1}{n} \text{ diverge}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{3n+5}}{\frac{1}{n}} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3n+5} \right) = \frac{1}{3} > 0$$

Entonces ambas convergen o divergen. Como $\sum \frac{1}{n}$ diverge

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+5}$ diverge

PARTE C: Ejercicios Extra-áulicos

15. Indique si las siguientes series convergen o divergen:

a. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

Solución

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Usamos el criterio del cociente (dado que es uno de los criterios recomendados cuando aparecen factoriales):

Determino relación (a_{n+1}/a_n):

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{\cancel{n!}}{(n+1).\cancel{n!}} = \frac{1}{n+1}$$

Calculo $\rho = \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}/a_n)$:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \rho < 1 \text{ entonces \underline{Converge}.}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

Criterio del cociente.

Determino a_{n+1}/a_n

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}}{\cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!} \cdot n^n}$$

$$= \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

Calculo ρ:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \longrightarrow 1^{\infty} \text{ que es una indeterminación.}$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e^{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = e^{n\cdot\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = e^{\lim_{n\to\infty} n\cdot\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} \overset{(*)}{=} e^1 = e > 1 \Rightarrow \underline{\text{Diverge}}$$

Expreso de modo que pueda aplicar L'H:

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \overset{\infty\cdot 0}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \overset{0/0}{\underset{L'H}{=}}$$

derivando.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)}\cdot\frac{[1\cdot n-(n+1)\cdot 1]}{n^2}}{-\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-\cancel{n}}{(n+1)\cdot n^{\cancel{2}}}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)\cdot n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = 1 \; (*)$$