ASIGNATURA	Elementos de Cálculo I	AÑO	2019	TEMA	1	FECHA	07-10 al 11-10

	ACTIVIDADES	Puntaje
1.	Dada $f(x) = (x+1)e^{-x}$ determine lo que se indica teniendo en cuenta el intervalo [0; 10].	**25 p**

a. Dominio de la función. **(1p)**
b. Puntos críticos e intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(5p)**
c. Extremos relativos y absolutos. **(5p)**
d. Intervalos de concavidad y puntos de inflexión. **(5p)**
e. Emplee la información de los incisos a) al c) para bosquejar la gráfica de $f(x)$. Indique en el gráfico cada punto de interés (máximos y mínimos, puntos de inflexión si los hay, etc.) **(4p)**
Nota: si sólo se bosqueja la gráfica sin el análisis previo se considerará 0p
f. Imagen de la función observando el gráfico del inciso e. **(1p)**
g. Emplee la información de los incisos a) al c) para bosquejar la gráfica de $f'(x)$. **(4p)**

Resolución:

a) Dom f [0;10] (1p)

b) Hallamos $f'(x) = e^{-x} + (x+1)\,e^{-x}\cdot(-1) = e^{-x}\cdot(1-x-1) = \underline{-xe^{-x}}$ (2p)

- f' esta bien definida $\forall\, x \in [0;10]$
- Veamos para que valores de $x \in [0;10]$ se cumple que $f'(x)=0$.

$f'(x) = -x\,e^{-x} = 0$ cuando $x=0$

Números críticos: $\underline{x=0}$, (1p)

Int.	(0;10)
Signo f'	
Condición	Decreciente

- Intervalo de Decrecim (0:10) (2p)

c) Extremos de la función en [0:10]

$f(0) = 1$ Máximo absoluto (2p)

$f(10) = 11/e^{\wedge}10$ Mínimo absoluto (2p)

d) Hallamos $f''(x) = (-1)\cdot e^{-x} + (-x)\cdot(e^{-x})\cdot(-1) = -e^{-x} + xe^{-x} = \underline{e^{-x}\cdot(x-1)}$ (1p)

- f'' esta bien definida $\forall\, x \in [0;10]$
- Veamos para que valores de $x \in$ [0;10] se cumple que $f''(x)=0$

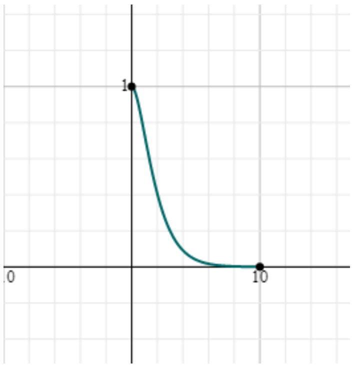
$f''(x) = e^{-x}(x-1) = 0$ cuando $x = 1$ (1p)

Intervalo	(0;1)	(1;10)
Signo f''	−	+
Condición	∩	∪

Luego podemos asegurar que (1;2/e) es un punto de inflexión (1p)

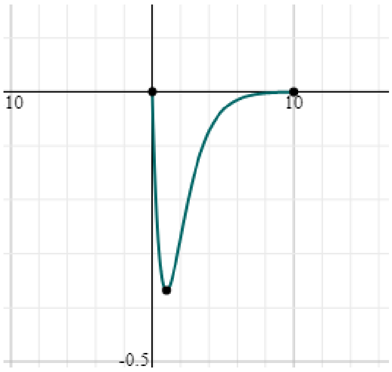
- Intervalo de concavidad hacia arriba: (1;10) (1p)
- Intervalo de concavidad hacia abajo: (0;1) (1p)

f) Imagen f: [11/e^10 ; 1]. (1p)



e) **4p**

g) **4p**



2. Calcule la derivada de: $y = \frac{1+\sqrt{\sin 3x}}{x}$, indicando las reglas y propiedades utilizadas. Desarrolle el cálculo algebraicamente. **15 p**

Resolución:

$$y' = \frac{\left[\frac{1}{2\sqrt{\sin(3x)}}\cdot \cos(3x)\cdot 3\right]\cdot x \;\; (2p) - \left(1+\sqrt{\sin(3x)}\right)\cdot 1 \;\; (2p)}{x^2 \;\; (2p)}$$

Expresión desarrollada: $y' = \frac{3x\cos(3x) - 2\sqrt{\sin(3x)}\,\left(1+\sqrt{\sin(3x)}\right)}{2x^2\sqrt{\sin(3x)}}$ **(5p)**

Regla utilizada: derivada del cociente y regla de la cadena. **(4)**

3. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y^2 - 3x^3 = -x^4$, que pasa por el punto de tangencia $P(1;-1)$. **10 p**

Resolución:
En primer lugar se verifica si el punto (1;-1) pertenece a la curva:
$1^2 - 3(-1)^3 = -1^4 \Rightarrow 4 \neq -1$ por lo tanto, el punto no pertenece a la curva. El ejercicio termina aquí.

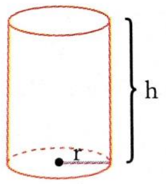
NOTA ACLARATORIA: se ha considerado puntaje para quienes hayan realizado el siguiente procedimiento, dado que se pretende evaluar la derivación implícita.

Derivada implícita para obtener la pendiente de la recta tangente:
$2yy' - 9x^2 = -4x^3 \quad \rightarrow \quad y' = \frac{9x^2 - 4x^3}{2y}$ **4p**

Reemplazo las coordenadas de $P(1;-1)$ para obtener la pendiente: $m = -\frac{5}{2}$ **2p**

La ecuación de la recta es: $\boldsymbol{y = -\frac{5}{2}(x-1) - 1} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y = -\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}}$ **4p**

4. Se dispone de $500\ cm^2$ de hojalata y necesita fabricar una lata cilíndrica cerrada. ¿Qué dimensiones debe tener la lata para que su volumen sea máximo? Verifique el resultado empleando el criterio correspondiente, aproxime su respuesta a dos decimales. **20 p**



Resolución:

- r: radio de la base de la lata
- h: altura de la lata.

Área de lata: Área de los 2 círculos + Área del rectángulo

$500 = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ ① (2p)

Volumen de la lata: $\pi r^2 h$ ② (2p)

De ① despejo "h" $\Rightarrow \dfrac{500 - 2\pi r^2}{2\pi r} = h$ (2p)

Reemplazo "h" en ② $\Rightarrow V(r) = \pi . r^2 \left(\dfrac{500 - 2\pi r^2}{2\pi r} \right)$ (2p)

$V(r) = \dfrac{500\, \cancel{\pi} . r^{\cancel{2}}}{2 \cancel{\pi} \cancel{r}} - \dfrac{\cancel{2} \pi^{\cancel{2}} r^4}{\cancel{2} \cancel{\pi} \cancel{r}}$

$V(r) = 250 . r - \pi r^3$ (2p)

Hallamos:

$V'(r) = 250 - 3\pi r^2$ (2p) $\Rightarrow 250 - 3\pi r^2 = 0 \Rightarrow r = \pm \sqrt{\dfrac{250}{3\pi}} \cong \pm 5,15$ ✱ (2p)

(1p) (Solo consideramos el resultado (+) por tratarse de medidad de longitud.)

✱ Continuación

Luego $r \cong 5,15$ cm.
$h \cong 10,30$ cm (1p)

Verificamos (4p)

$V''(r) = -6\pi r$

$V''(5,15) = -6 . \pi . 5,15 < 0$

Por lo tanto el volumen de la lata es maximo cuando el radio es de 5,15 cm y la altura de 10,30 cm.

5. Verifique o compruebe que la función $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ satisface las tres hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [1; 4]. A continuación, determine todos los números $x = c$ que satisfacen la conclusión de dicho teorema. **15 p**

Resolución:

Teorema de Rolle: Hipótesis: $f(x)$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), $f(a) = f(b)$
Tesis: Existe al menos un valor $x = c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

Como $f(x)$ es una función polinómica, entonces es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ **(3p)**, por lo tanto cumple que es continua en [1; 4] y derivable en (1; 4). **(3p)** Además, $f(1) = f(4) = 1$ **(3p).**
Así f cumple con las tres hipótesis.

$$f'(x) = -2x + 5 \quad \mathbf{(3p)} \Rightarrow \quad f'(c) = 0 \ \Rightarrow \boldsymbol{c} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}} \in (\mathbf{1}\ ;\ \mathbf{4}) \quad \mathbf{(3p)}$$

6. Resuelva el siguiente límite, indicando en cada paso qué indeterminaciones se producen y qué se aplica para resolverlas. **15 p**

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$$

$$e^{\ln\left[\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}\right]} = e^{L} \quad \mathbf{(1p)}$$

$$L = \ln\left[\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}\right]$$ **(1p)**

$$L = \lim_{x\to 2}\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}\right]$$ **(2p)**

$$L = \lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2}\cdot\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right] \to 0\,.\,\infty \quad indeterminación$$ **(3p)**

$$L = \lim_{x\to 2}\frac{\ln(x/2)}{x-2} \to \frac{0}{0} \quad indeterminación - \text{L´H}$$ **(3p)**

$$L = \lim_{x\to 2}\left(\frac{\frac{1}{\frac{x}{2}}*\frac{1}{2}}{1}\right) = \lim_{x\to 2}(1/x) = \frac{1}{2}$$ **(2p)**

Luego $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ **(3p)**

Puntaje Total: 100 p	**Puntaje Obtenido:**	**Nota Final:**

ASIGNATURA	Elementos de Cálculo I	AÑO	2019	TEMA	2	FECHA	07-10 al 11-10

	ACTIVIDADES	Puntaje

1. Dada $f(x) = (x-2)e^{-x}$ determine lo que se indica teniendo en cuenta el intervalo [0; 10]. **25 p**

a. Dominio de la función. **(1p)**
b. Puntos críticos e intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(5p)**
c. Extremos relativos y absolutos. **(5p)**
d. Intervalos de concavidad y puntos de inflexión. **(5p)**
e. Emplee la información de los incisos a) al c) para bosquejar la gráfica de $f(x)$. Indique en el gráfico cada punto de interés (máximos y mínimos, puntos de inflexión si los hay, etc.) **(4p)**
Nota: si sólo se bosqueja la gráfica sin el análisis previo se considerará 0p
f. Imagen de la función observando el gráfico del inciso e. **(1p)**
g. Emplee la información de los incisos a) al c) para bosquejar la gráfica de $f'(x)$. **(4p)**

Resolución:

a) Dom f: $[0,10]$ (1p)

b) Hallamos $f'(x) = e^{-x} + (x-2)e^{-x}\cdot(-1) = e^{-x}(1-x+2) = \underline{(3-x)\cdot e^{-x}}$ (2p)

- f' está bien definida $\forall\, x \in [0,10]$.
- Veamos para qué valores de $x \in [0,10]$ se cumple que $f'(x)=0$

$f'(x) = (3-x)\cdot e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 3$

Números Críticos : $\underline{x=3}$ (1p)

Intervalo	(0,3)	(3,10)
Signo f'	+	−
Condición	Creciente	Decrec.

- Intervalo de crecimiento: $(0,3)$ (1p)
- Intervalo de decrecimiento: $(3,10)$ (1p)

c) Extremos de la función en $[0,10]$.

$f(0) = -2$ es un mínimo absoluto (2p)

$f(3) = \frac{1}{e^3} \cong 0{,}0497\ldots$ es un máximo absoluto y relativo (2p)

$f(10) = \frac{8}{e^{10}} \cong 0{,}0003631\ldots$ no es nada. (1p)

d) Hallamos $f''(x) = (-1)\cdot e^{-x} + (3-x)\cdot e^{-x}\cdot(-1) = -e^{-x} - (3-x)e^{-x}$

$f''(x) = e^{-x}\cdot(-1-3+x) = \underline{e^{-x}(x-4)}$ (1p)

- f'' está bien definida $\forall\, x \in [0,10]$
- Veamos para qué valores de $x \in [0,10]$ se cumple que $f''(x)=0$

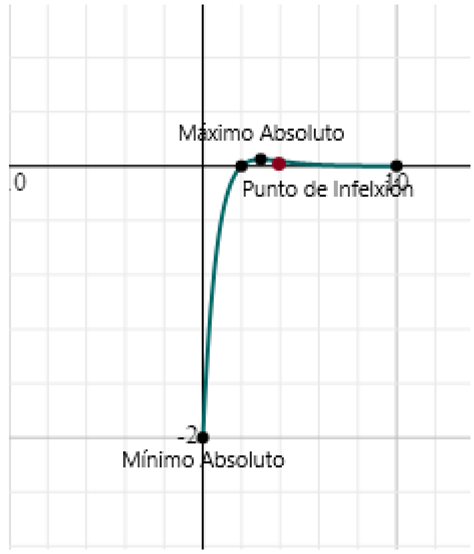
$f''(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}(x-4) = 0 \Rightarrow \underline{x=4}$ (1p)

Intervalo	(0,4)	(4,10)
Signo f''	−	+
Condición	∩	∪

luego aseguramos que $(4, \frac{2}{e^4})$ es un punto de inflexión (1p)

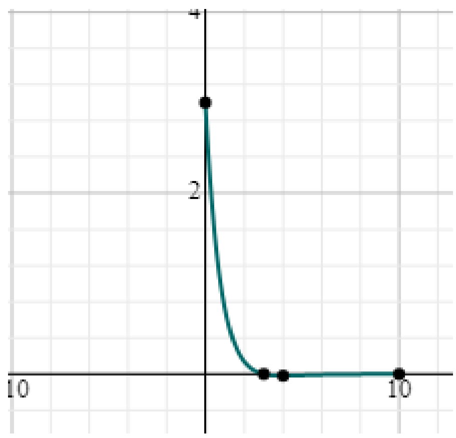
- Intervalo de concavidad hacia arriba: $(4,10)$ (1p)
- Intervalo de concavidad hacia abajo: $(0,4)$ (1p)

f) Imagen de f: $[-2, \frac{1}{e^3}]$ (1p) e)



4p

g)



4p

2. Calcule la derivada de: $y = \frac{\sqrt{1+\tan x}}{x}$, indicando las reglas y propiedades utilizadas. Desarrolle el cálculo algebraicamente. **15 p**

Resolución:

$$y' = \frac{\left(x \cdot \frac{1}{2}.(1+\tan x)^{-\frac{1}{2}}.(0+\sec^2 x)\right)\,(2p) - \sqrt{1+\tan x}\ (2p)}{(x)^2\quad(2p)}$$

Expresión desarrollada: $y' = \frac{x\sec^2 x - 2(1+\tan x)}{2x^2\sqrt{1+\tan x}}$ **(5p)**

Reglas utilizadas: derivada del cociente y regla de la cadena. **(4p)**

3. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y^2 - 2x^4 = 3x$, que pasa por el punto de tangencia $P(-1;1)$. **10 p**

Resolución:
En primer lugar, se verifica si el punto (-1;1) pertenece a la curva:
$1^2 - 2(-1)^4 = 3 \cdot (-1) \Rightarrow -1 \neq -3$ por lo tanto, el punto no pertenece a la curva. El ejercicio termina aquí.

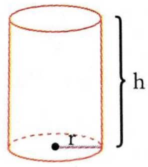
NOTA ACLARATORIA: se ha considerado puntaje para quienes hayan realizado el siguiente procedimiento, dado que se pretende evaluar la derivación implícita.
Derivada implícita para obtener la pendiente de la recta tangente:

$2yy' - 8x^3 = 3 \;\rightarrow\; y' = \frac{3+8x^3}{2y}$ **4p**

Reemplazo las coordenadas de $P(-1;1)$ para obtener la pendiente: $m = -\frac{5}{2}$ **2p**

La ecuación de la recta es: $\boldsymbol{y = -\frac{5}{2}(x+1)+1} \;\rightarrow\; \boldsymbol{y = -\frac{5}{2}x - \frac{3}{2}}$ **4p**

4. Se necesita fabricar una lata cilíndrica cerrada de 350 cm^3 de capacidad utilizando la menor cantidad de hojalata posible. ¿Qué dimensiones debe tener la lata para que su área sea mínima? Verifique el resultado empleando el criterio correspondiente, aproxime su respuesta a dos decimales **20 p**



Resolución:

- r: radio de la base de la lata
- h: altura de la lata
- Volumen de la lata: $\pi . r^2 . h = 350$ ① (2p)
- Área de la lata: $\underbrace{2\pi r^2}_{\text{Área de los 2 círculos}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{Área del Rectángulo}}$ ② (2p)

Despejo h en ① $\Rightarrow h = \frac{350}{\pi r^2}$ (2p)

Reemplazo h en ② $\Rightarrow A(r) = 2\pi r^2 + 2\cancel{\pi}.\cancel{r}\left(\frac{350}{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}}\right) = 2\pi r^2 + \frac{700}{r} = \frac{2\pi r^3 + 700}{r}$ (2p) (2p)

Derivo $A \Rightarrow A'(r) = \frac{(6\pi r^2).r - (2\pi r^3 + 700).1}{r^2} = \frac{6\pi r^3 - 2\pi r^3 - 700}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 700}{r^2}$ (2p) ⊛

Ahora hacemos $A'(r) = 0 \Rightarrow \frac{4\pi r^3 - 700}{r^2} = 0. \Rightarrow 4\pi r^3 = 700 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{175}{\pi}} \cong 3{,}82$ 2p

(1p) Solo considero el valor positivo

⊛ Luego verificamos:

$A''(r) = 4\pi + \frac{1400}{r^3}$ (2p)

$A''(3{,}82) = 12\pi > 0$ (2p)

Por lo tanto el área de la lata es mínima cuando el radio es 3,82 cm y la altura es $h = \frac{350}{\pi(3{,}82)^2} \cong 7{,}64$ cm (1p)

5. Verifique o compruebe que la función $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ satisface las tres hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [-1; 3]. A continuación, determine todos los números $x = c$ que satisfacen la conclusión de dicho teorema. **15 p**

Resolución:

Teorema de Rolle: Hipótesis: $f(x)$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), $f(a) = f(b)$
Tesis: Existe al menos un valor $x = c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$

Como $f(x)$ es una función polinómica, entonces es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ **(3p),** por lo tanto cumple que es continua el [-1 ; 3] y derivable en (-1 ; 3). **(3p)** Además, $f(-1) = f(3) = 9$ **(3p).**

Así f **cumple con las tres hipótesis.**

$$f'(x) = 4x - 4 \;\; \mathbf{(3p)} \;\Rightarrow\; f'(c) = 0 \;\Rightarrow \boldsymbol{c = 1} \in (\mathbf{-1\,;\,3}) \;\; \mathbf{(3p)}$$

6. Resuelva el siguiente límite, indicando en cada paso qué indeterminaciones se producen y qué se aplica para resolverlas. **15 p**

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

Resolución:
Haciendo sustitución directa obtenemos:

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\infty-\infty$ ind **3p**

Aplicando propiedades de límite tenemos que:

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\right]=\frac{0}{0}$ ind **3p**

Aplicamos Regla de L´Hopital

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{e^x-1+x\ e^x}\right)=\frac{0}{0}$ ind **4p**

Regla de L´Hopital por segunda vez.

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{e^x+1\ e^x+x\ e^x}\right)=\frac{1}{2}$ **5p**

Puntaje Total: 100 p	**Puntaje Obtenido:**	**Nota Final:**