| UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO | TERCER PARCIAL | | | | | FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES Naturaleza - Ciencia - Humanismo | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ASIGNATURA** | Elementos de Cálculo I | **AÑO** | 2019 | **TEMA** | 1 | **Nº HOJAS** | |
| **APELLIDO Y NOMBRE** | | | | **LEGAJO/DNI** | | **FECHA** | |

***Resultados de aprendizaje:*** que el estudiante: 1. Conozca y aplique correctamente el Teorema Fundamental del Cálculo. 2. Reconozca las diferentes reglas de integración. 3. Resuelva correctamente una integral. 4. Interprete y calcule de forma correcta el área entre curvas, longitud de arco de una curva y volumen de un sólido de revolución.

***Instrucciones:*** coloque nombre y apellido **en cada hoja** que va a entregar. Lea atentamente cada consigna. Desarrolle detalladamente y con letra clara los ejercicios para obtener el puntaje completo. Debe usar **tinta para desarrollar los ejercicios**. No se permite corrector, tache si es necesario. Cuando finalice, indique el número de hojas empleadas en el encabezado (incluyendo las fotocopias). Debe obtener un **mínimo de 60 puntos para aprobar** el examen. Dispone de **2 horas** para su resolución ¡ÉXITO!

| | ACTIVIDADES | Puntaje Total |
|---|---|---|

**1.** Determine la derivada de: $F(x) = \int_{sen(x)}^{5} \frac{t^2}{1-t^2}\, dt$. Desarrolle paso a paso y opere algebraicamente hasta obtener la mínima expresión. Enuncie el Teorema (hipótesis y tesis) que aplicó para obtenerla. **10 p**

Hipótesis: f(x) continua en $[a, b]$

Tesis: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$, $F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$

**Enunciar el teorema (3p)**

Para obtener la derivada se debe aplicar el TFCI pero dado que $F(x)$ no está en la forma que indica tal teorema $\int_a^x f(t)dt$, se debe aplicar la propiedad de la integral que permita llevarla a esa forma. Así, por propiedad se sabe que $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ , en este caso resultaría:

$$F(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^{5} \frac{t^2}{1-t^2}\, dt = -\int_{5}^{\operatorname{sen} x} \frac{t^2}{1-t^2}\, dt$$

A continuación, se deriva $F(x)$ aplicando TFCI y teniendo en cuenta la regla de la cadena, por lo que:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^{v(x)} f(t)dt\right] = f[v(x)] * v'(x)$$

$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[-\int_5^{\operatorname{sen} x} \frac{t^2}{1-t^2}\, dt\right] = -\frac{(\operatorname{sen} x)^2}{1-(\operatorname{sen} x)^2} \cdot \cos x = -\frac{\cancel{\cos(x)}\, sen^2(x)}{cos^{\cancel{2}}(x)}$ **(5p) procedimiento**

$F'(x) = -\frac{sen^2(x)}{\cos(x)} = -tan(x)\operatorname{sen}(x)$ **(2p) resultado**

**2.** Resuelve las siguientes integrales. **30 p**

a. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{1+7x}} dx$ b. $\int \ln(\sqrt[3]{x})\, dx$

$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{1+7x}}\, dx =$ $u = 1+7x$ $du = 7\,dx$ $\frac{du}{7} = dx$ $x = \frac{u-1}{7}$

**Sustitución de la variable (4p)**

$\int_1^8 \left(\frac{u-1}{7}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{u}} \cdot \frac{du}{7} =$ $x = 0 \longrightarrow u = 1$ $x = 1 \longrightarrow u = 8$

**Nuevos extremos de integración (4p)**

$\int_1^8 \frac{1}{49}(u-1) \cdot u^{-1/3}\, du =$

**Integrar (5p)**

$\frac{1}{49}\left(\int_1^8 u \cdot u^{-1/3}\, du - \int_1^8 u^{-1/3}\, du\right) =$

**Resultado (2p)**

$\frac{1}{49}\left(\frac{3}{5} u^{5/3}\Big]_1^8 - \frac{3}{2} u^{2/3}\Big]_1^8\right) =$

$\frac{3}{245}\left(8^{5/3} - 1^{5/3}\right) - \frac{3}{98}\left(8^{2/3} - 1^{2/3}\right) = \frac{93}{245} - \frac{9}{98}$

$= \boxed{\frac{141}{490}}$

a.

| ASIGNATURA | Elementos de Cálculo I | AÑO | 2019 | TEMA | 1 | Nº HOJAS | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| APELLIDO Y NOMBRE | | | | LEGAJO/DNI | | FECHA | |

b.

$\int \ln \sqrt[3]{x}\, dx =$ $\quad u = \ln \sqrt[3]{x} = \ln x^{1/3}$

$x \cdot \ln \sqrt[3]{x} - \int x \cdot \frac{1}{3x}\, dx$ $\quad du = \frac{1}{3x}$

$x \cdot \ln \sqrt[3]{x} - \frac{1}{3}\int dx$ $\quad dv = dx \quad v = x$

$\boxed{x \cdot \ln \sqrt[3]{x} - \frac{1}{3} x + C}$

**Planteo por partes: selección de u y dv (5p)**

**Integrar (8p)**

**Resultado +C (2p)**

$$= \frac{x}{3}\ln x - \frac{x}{3} + C = \frac{x}{3}(\ln x - 1) + C$$

**3.** Resuelva la integral definida. Decida si la siguiente integral impropia es convergente o divergente. **20p**

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}}\, dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x/2}\, dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[-2 \cdot e^{-x/2}\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-2 \cdot e^{-b/2} + 2\right) = \boxed{2}$$

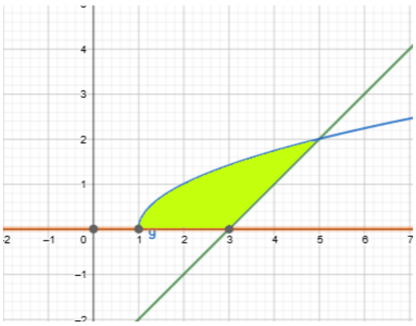
converge

**Planteo de integral impropia con límite (8p)**

**Integración (6p)**

**Evaluar límite y resultado (6p)**

**4.** **Grafique** la región delimitada por $f(x) = x - 3$, $g(x) = \sqrt{x-1}$ e $y = 0$. Luego proponga las expresiones de cálculo del área: a) respecto al eje "$x$", b) respecto al eje "$y$". Seleccione la que ud. crea conveniente y **calcule el valor del área**. **10p**



a. Tomamos las rectas verticales $x = 1,\ x = 3\ y\ x = 5$
Tenemos que $f(x) \le g(x)\ \forall\, x\ \in [1,5]$

$$A_x = \int_{x_1}^{x_2} [g(x) - f(x)]dx =$$

$$\int_1^3 \sqrt{x-1}\, dx + \int_3^5 [\sqrt{x-1} - (x-3)\, dx$$ **(2p)**

b. **b.** Tomamos las rectas verticales $y = 0\ \ y = 2$
Tenemos que $h(y) \le p(y)\ \forall\, y\ \in [0,2]$

$$A_y = \int_{y_1}^{y_2} [p(y) - h(y)]dy = \int_0^2 [y + 3 - y^2 - 1]dy$$ **(2p)**

**Resolución de la integral elegida (4p)**

$Area = \frac{10}{3}$ **Resultado (2p)**

**5.** A partir de la región delimitada por $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, la recta $y = 2$, la recta $x = 0$, $con\ x \ge 0$. **15p**
a. Plantee **(no resuelva)** una integral que permita calcular el volumen del sólido generado cuando dicha región gira en torno a la recta $y = -1$. Indique el método empleado y grafique **(10p)**
b. Obtenga una expresión para calcular la longitud de curva de $f$ en el intervalo considerado **(5p)**
a. Se puede resolver por dos métodos:

Por casquillos: **(Mencionar el método 1p)**

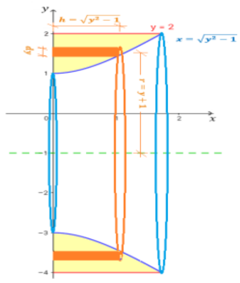
Altura del casquillo: $h = \sqrt{y^2 - 1}$ **(2p)**

| ASIGNATURA | Elementos de Cálculo I | AÑO | 2019 | TEMA | 1 | Nº HOJAS | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| APELLIDO Y NOMBRE | | | | LEGAJO/DNI | | FECHA | |

Radio del casquillo $r = y - (-1) = y + 1$ **(2p)**

$\boldsymbol{V = \int_1^2 2\pi(y+1)\sqrt{y^2-1}\,dy}$ **(3p)**

**Gráfico 2p**



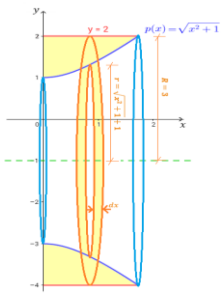

Por arandelas: **(Mencionar el método 1p)**

Radio menor: $r = \sqrt{x^2+1} - (-1) = \sqrt{x^2+1} + 1$ **(2p)**

Radio mayor $R = 2 - (-1) = 3$ **(2p)**

$\boldsymbol{V = \int_0^{\sqrt{3}} \pi[9 - (\sqrt{x^2+1}+1)^2]dx}$ **(3p)**

**Gráfico 2p**




b. Siendo $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **(1p)**

$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+1}}\,dx$ **Extremos (2p)** **Integral (2p)**

**6.** Un registro diario de temperatura $T$ (en Cº) en la Payunia durante un año típico, se puede modelar en función del día del año $x$ mediante la ecuación: **15p**

$$T(x) = 20\cos\left[\frac{2\pi}{365}x\right] + 10$$

Determine cuál es la temperatura promedio en el primer trimestre del año, de $x = 0$ a $x = 365/4$. Aproxime su respuesta a un decimal.

$T_{prom} = \frac{1}{365/4-0}\int_0^{365/4}\left[20\cos\left(\frac{2\pi}{365}x\right)+10\right]dx$ **(5p)**

$T_{prom} = \frac{4}{365}\left[20\frac{365}{2\pi}sen\left(\frac{2\pi}{365}x\right)+10x\right]_0^{\frac{365}{4}} = \frac{4}{365}\left[\frac{3650}{\pi}sen\left(\frac{\pi}{2}\right)+10\frac{365}{4}-\left(\frac{3650}{\pi}sen0+0\right)\right]$ **(5p)**

$T_{prom} = \frac{4}{365}\left[\frac{3650}{\pi}+\frac{3650}{4}\right] = \frac{40}{\pi}+10 \approx 22.7$ **(5p)**

| PUNTAJE TOTAL: 100 P | PUNTAJE OBTENIDO: | NOTA FINAL: |
|---|---|---|

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ASIGNATURA** | Elementos de Cálculo I | **AÑO** | 2019 | **TEMA** | **2** | **Nº HOJAS** | |
| **APELLIDO Y NOMBRE** | | | | **LEGAJO/DNI** | | **FECHA** | |

***Resultados de aprendizaje:*** que el estudiante: 1. Conozca y aplique correctamente el Teorema Fundamental del Cálculo. 2. Reconozca las diferentes reglas de integración. 3. Resuelva correctamente una integral. 4. Interprete y calcule de forma correcta el área entre curvas, longitud de arco de una curva y volumen de un sólido de revolución.

***Instrucciones:*** coloque nombre y apellido **en cada hoja** que va a entregar. Lea atentamente cada consigna. Desarrolle detalladamente y con letra clara los ejercicios para obtener el puntaje completo. Debe usar **tinta para desarrollar los ejercicios**. No se permite corrector, tache si es necesario. Cuando finalice, indique el número de hojas empleadas en el encabezado (incluyendo las fotocopias). Debe obtener un **mínimo de 60 puntos para aprobar** el examen. Dispone de **2 horas** para su resolución ¡ÉXITO!

| | **ACTIVIDADES** | **Puntaje Total** |
|---|---|---|
| **1.** | Determine la derivada de: $F(x) = \int_{\cos x}^{3} \frac{t^2}{t^2-1}\,dt$. Desarrolle paso a paso y opere algebraicamente hasta obtener la mínima expresión. Enuncie el Teorema (hipótesis y tesis) que aplicó para obtenerla. | **10 p** |

Hipótesis: f(x) continua en $[a, b]$

Tesis: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$, $F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$

**Enunciar el teorema (3p)**

Para obtener la derivada se debe aplicar el TFCI pero dado que $F(x)$ no está en la forma que indica tal teorema $\int_a^x f(t)dt$, se debe aplicar la propiedad de la integral que permita llevarla a esa forma. Así, por propiedad se sabe que $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ , en este caso resultaría:

$$F(x) = \int_{\cos x}^{3} \frac{t^2}{t^2-1}\,dt = -\int_3^{\cos x} \frac{t^2}{t^2-1}\,dt$$

A continuación, se deriva $F(x)$ aplicando TFCI y teniendo en cuenta la regla de la cadena, por lo que:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^{v(x)} f(t)dt\right] = f[v(x)] * v'(x)$$

$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[-\int_3^{\cos x} \frac{t^2}{t^2-1}\,dt\right] = -\frac{(\cos x)^2}{(\cos x)^2-1} \cdot (-\text{sen}\, x) = \frac{\cancel{sen(x)}\ cos^2(x)}{-sen^{\cancel{2}}(x)}$ **(5p) procedimiento**

$F'(x) = -\frac{cos^2(x)}{\text{sen}(x)} = -\frac{\cos x}{sen\, x} \cdot \cos x = -\cot x \cdot \cos x$ **(2p) resultado**

| | | |
|---|---|---|
| **2.** | Resuelve las siguientes integrales.<br>a. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[5]{1+2x}}\,dx$ (Aproxime la respuesta a dos decimales) b. $\int x^3 \ln x\, dx$ | **30 p** |

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[5]{1+2x}}\,dx =$$

$u = 1+2x \to x = \frac{u-1}{2}$

$du = 2\,dx$

$\frac{du}{2} = dx$

$$\int_1^3 \left(\frac{u-1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{u}} \cdot \frac{du}{2} =$$

$x = 0 \to u = 1$

$x = 1 \to u = 3$

$$\int_1^3 \frac{1}{4}(u-1)\, u^{-1/5}\, du =$$

$$\frac{1}{4}\left(\int_1^3 (u \cdot u^{-1/5})\, du - \int_1^3 u^{-1/5}\, du\right)$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{5}{9} u^{9/5}\Big]_1^3 - \frac{5}{4} u^{4/5}\Big]_1^3\right) = \frac{5}{36}\left(3^{9/5} - 1^{9/5}\right) - \frac{5}{16}\left(3^{4/5} - 1^{4/5}\right)$$

$$\cong 0{,}864 - 0{,}44 \cong \boxed{0{,}424}$$

**Sustitución de la variable (4p)**

**Nuevos extremos de integración (4p)**

**Integrar (5p)**

**Resultado (2p)**

b.

$\int x^3 \ln x \, dx =$ $\qquad u = \ln x \quad du = \frac{1}{x} dx \qquad dv = x^3 dx \quad v = \frac{x^4}{4}$

$\frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx =$

$\frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx =$

$\frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \frac{x^4}{4} + C$

$\frac{x^4}{4} \left( \ln x - \frac{1}{4} \right) + C$

**Planteo por partes: selección de u y dv (5p)**

**Integrar (8p)**

**Resultado +C (2p)**

**3.** Resuelva la integral definida. Decida si la siguiente integral impropia es convergente o divergente. **20p**

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} \, dx$$

$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x} dx \qquad u = \ln x \quad du = \frac{1}{x} dx$

$= \lim_{b \to \infty} \int_1^b u \, du = \lim_{b \to \infty} \frac{u^2}{2} \Big|_1^b$

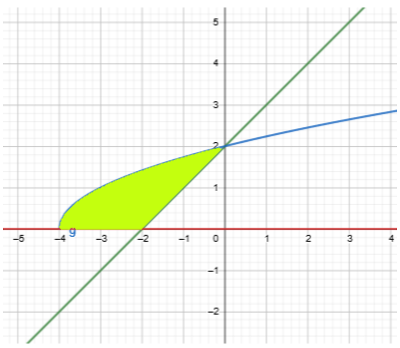
$= \lim_{b \to \infty} \frac{1}{2} (\ln x)^2 \Big|_1^b = \boxed{\infty}$ Diverge.

**Planteo de integral impropia con límite (8p)**

**Integración (6p)**

**Evaluar límite y resultado (6p)**

**4.** **Grafique** la región delimitada por $f(x) = x + 2$, $g(x) = \sqrt{x+4}$ e $y = 0$. Luego proponga las expresiones de cálculo del área: a) respecto al eje "$x$", b) respecto al eje "$y$". Seleccione la que ud. crea conveniente y **calcule el valor del área**. **10p**



a. Tomamos las rectas verticales $x = -4$ , $x = -2$ $y$ $x = 0$
Tenemos que $f(x) \leq g(x) \; \forall \, x \in [-4,0]$

$$A_x = \int_{x_1}^{x_2} [g(x) - f(x)] dx =$$

$\int_{-4}^{-2} \sqrt{x+4} \, dx + \int_{-2}^{0} [\sqrt{x+4} - (x+2) \, dx$ **(2p)**

**b.** Tomamos las rectas verticales $y = 0$ $y = 2$
Tenemos que $h(y) \leq p(y) \; \forall \, y \in [0,2]$

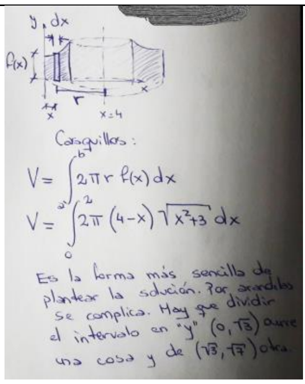
$A_y = \int_{y_1}^{y_2} [p(y) - h(y)] dy = \int_0^2 [y - 2 - y^2 + 4] dy$ **(2p)**

**Resolución de la integral elegida (4p)**

$Area = \frac{10}{3}$ **Resultado (2p)**

**5.** A partir de la región delimitada por $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ , la recta $x = 2$, la recta $x = 0$ y la recta $y = 0$. **15p**
a. Plantee **(no resuelva)** una integral que permita calcular el volumen del sólido generado cuando dicha región gira en torno a la recta $x = 4$. Indique el método empleado y grafique. **(10p)**
b. Obtenga una expresión para calcular la longitud de curva de $f$ en el intervalo considerado **(5p)**

| ASIGNATURA | Elementos de Cálculo I | AÑO | 2019 | TEMA | 2 | Nº HOJAS | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| APELLIDO Y NOMBRE | | | | LEGAJO/DNI | | FECHA | |

a. 

y, dx

f(x)

x

r

x=4

Casquillos:

$V = \int_a^b 2\pi r\, f(x)\, dx$

$V = \int_0^2 2\pi (4-x) \sqrt{x^2+3}\, dx$

Es la forma más sencilla de plantear la solución. Por arandelas se complica. Hay que dividir el intervalo en "y" $(0,\sqrt{3})$ ocurre una cosa y de $(\sqrt{3},\sqrt{7})$ otra.

b. Siendo $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+3}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$ **(1p)**

$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx = \int_0^2 \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+3}}\, dx$ **Extremos (2p)** **Integral (2p)**

**6.** El beneficio, en miles de euros, generado por la venta de un determinado producto durante los primeros 6 meses viene dado aproximadamente por el siguiente modelo: $P(t) = 5(\sqrt{t}+30)$ donde $t$ es el tiempo en meses.
Determine el beneficio promedio durante el primer semestre del año, de $t = 0$ a $t = 6$.
Aproxime su respuesta a un decimal. **15p**

$$P_{medio} = \frac{1}{b-a}\int_a^b P(t)dt$$

Considerando que periodo a analizar es de 6 meses, entonces $a = 0 \;\; y \;\; b = 6$.

Entonces:

$$P_{medio} = \frac{1}{6-0}\int_0^6 5(\sqrt{t}+30)dt \cong 158.2$$

**Fórmula 5p , reemplazo 5p y resultado 5p**

| PUNTAJE TOTAL: 100 P | PUNTAJE OBTENIDO: | NOTA FINAL: |
|---|---|---|