Trabajo Práctico Nº1: Funciones y Modelos

Objetivo: que el estudiante adquiera las nociones fundamentales sobre distintos tipos de funciones, qué son, su dominio e imagen, cómo se dibujan sus gráficas, cómo se combinan y se transforman, así como sus formas de clasificación. Que incorpore, además, el concepto de función inversa y pueda obtenerla en aquellos casos en que sea posible.

NOTA AL ESTUDIANTE: en las Partes A y B encontrará ejercicios a resolver en clase práctica. Se sugiere que los ejercicios propuestos en la Parte C, se resuelvan en forma completa por el estudiante como trabajo extra-áulico. Las dudas pueden ser resueltas con cualquiera de los profesores de la materia Cálculo/Elementos de Cálculo I en las horas de consulta.
Se recomienda, además, disponer de alguna herramienta de graficación contra la cual comparar los resultados obtenidos en el desarrollo "manual" de cada ejercicio.

PARTE A: Ejercicios Comunes a Cálculo/Elementos

1. Si $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$, encuentre $f(0), f(\sqrt{2}), f(-x), f(x+1)$, $2f(x)$ y $f(2x)$.

Solución

Complete los espacios vacíos siguiendo los ejemplos

$f(0) = 2\cdot(0)^2 + 3\cdot(0) - 4 = \mathbf{-4}$
$f(\sqrt{2}) = 2\cdot(\quad)^2 + 3\cdot(\quad) - 4 =$
$f(-x) = 2\cdot(\quad)^2 + 3\cdot(\quad) - 4 =$
$f(x+1) = 2\cdot(x+1)^2 + 3\cdot(x+1) - 4 = 2\cdot(x^2+2x+1) + 3x + 3 =$ $= 2x^2 + 4x + 2 + 3x + 3 = \mathbf{2x^2 + 7x + 5}$
$2f(x) = 2\cdot(\quad)^2 + 3\cdot(\quad) - 4 =$
$f(2x) = 2\cdot(\quad)^2 + 3\cdot(\quad) - 4 =$

2. Si $f(x) = x - x^2$, encuentre $f(2+h), f(x+h)$ y $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, donde $h \neq 0$.

Complete los espacios vacíos siguiendo los ejemplos

$f(2+h) =$
$f(x+h) = (x+h) - (x+h)^2 = x + h - (x^2 + 2x\cdot h + h^2) =$ $= x + h - x^2 - 2x\cdot h - h^2 = \mathbf{-x^2 + x - 2x\cdot h + h - h^2}$
$f(x+h) - f(x) = (-x^2 + x - 2x\cdot h + h - h^2) - (x - x^2) =$ $= -x^2 + x - 2x\cdot h + h - h^2 - x + x^2 = -2xh + h - h^2 = \mathbf{h(-2x+1-h)}$
$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\mathbf{h(-2x+1-h)}}{h} = \mathbf{-2x+1}$ con $h \neq 0$

3. Para cada una de las expresiones dadas, determine si es o no, una función de x.

   a. $y = (x-3)^2$ b. $y = |x| - 1$ c. $|y| - x = 3$ d. $y = x^3 - 4x$

   e. $y = (x-1)\sqrt{x^2+1}$ f. $y = \frac{10}{x^2+1}$ g. $x^2 + 4y^2 = 4$

Solución

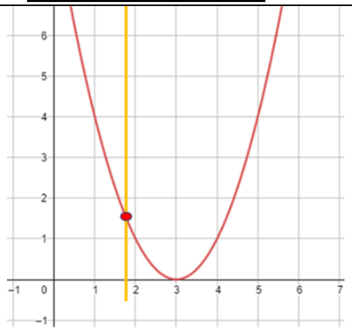
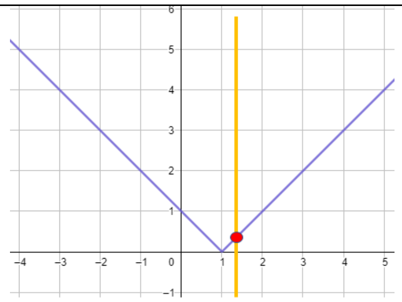
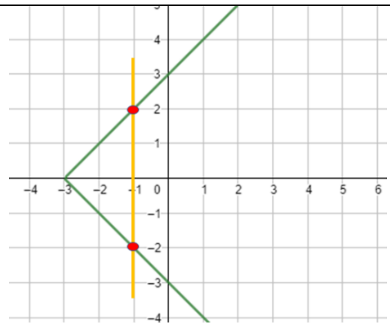
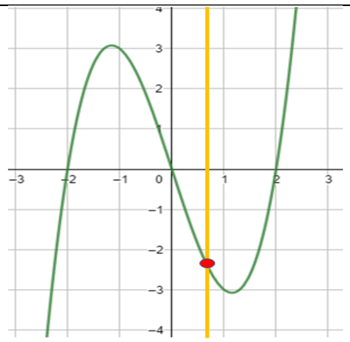
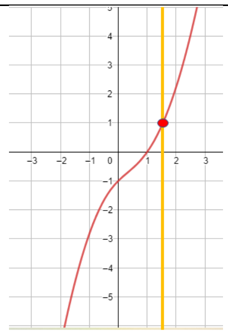
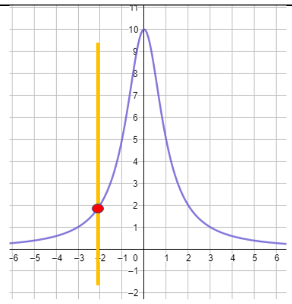
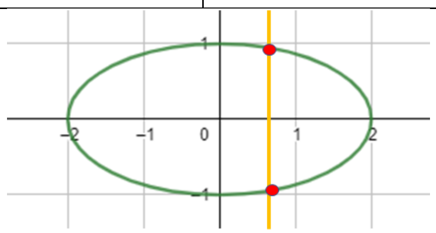
En todos los casos, vamos a suponer que x está en el dominio natural de la expresión.

Para determinar si la expresión es una función de x, podemos proceder:

a. Geométricamente: haciendo su representación gráfica y aplicando la prueba de la recta vertical. Esta recta debe cortar a la gráfica en un solo punto, independientemente de dónde sea colocada, para que la expresión sea una función de x.

b. Analíticamente: Despejan y en función de x y viendo cuántos valores toma y para cada x. Si toma más de un valor, no es función pues no cumple con la condición de unicidad.

Geométricamente:

 $y = (x-3)^2$	 $y = \|x\| - 1$	 $\|y\| - x = 3$
Corta en 1 punto. Es función	Corta en 1 punto. Es función	Corta en 2 puntos. No es función
 $y = x^3 - 4x$	 $y = (x-1)\sqrt{x^2+1}$	 $y = \frac{10}{x^2+1}$
Complete:		
 $x^2 + 4y^2 = 4$		
Complete:		

Analíticamente

En (a), (b), (d), (e) y (f), observamos que en la expresión algebraica queda explícito que, para cada x, obtenemos un único valor de y. Por lo tanto, cumplen con la condición de unicidad. Como las x están en el dominio natural, también cumplen con la condición de existencia, ya que siempre podemos hallar el valor de y. Como cumplen con las dos condiciones, unicidad y existencia, todas ellas son funciones.

Para (c), despejemos y en función de x

- $|y| - x = 3$
- $|y| = 3 + x$, entonces, por definición de valor absoluto tenemos
- $|y| = \quad \pm(3 + x)$
- Por lo tanto, la expresión no es función por no cumplir la condición de unicidad para todo x de su dominio.

Para (g), despejemos y en función de x

- $x^2 + 4y^2 = 4$
- $y^2 = \frac{4-x^2}{4}$ $\sqrt{y^2} = \sqrt{\frac{4-x^2}{4}}$
- $|y| = \sqrt{\frac{4-x^2}{4}}$, luego $y = \pm\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}$
- Por lo tanto, la expresión no es función por no cumplir la condición de unicidad para todo x de su dominio.

4. Encuentre el dominio de las siguientes funciones y trace las gráficas de d y e:

a. $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$ b. $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 6x}$ c. $f(x) = \sqrt{3x - 12}$

d. $g(x) = \frac{x}{|x|}$ e. $p(x) = \begin{cases} -1 & si \ \ x \leq -1 \\ 3x + 2 & si \ |x| < 1 \\ 7 - 2x & si \ \ x \geq 1 \end{cases}$

Solución

Complete los espacios vacíos siguiendo los ejemplos

Función	Criterio	Dominio
$a.\ f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 1}$	Los denominadores deben ser distintos de cero. $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$	$\boldsymbol{Don(f) = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \pm 1\}}$ $= \mathbb{R} - \{\pm\mathbf{1}\}$
$b.\ f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 6x}$	En las raíces de orden par, los radicando deben ser mayores o iguales que 0. $x^2 - 6x \geq 0$ Sugerencia: Resolver mediante la tabla de intervalos	
c. $f(x) = \sqrt{3x - 12}$		

$d.\ \ g(x) = \frac{x}{\lvert x \rvert}$		
$e.\ p(x) = \begin{cases} -1 & si\ \ x \le -1 \\ 3x+2 & si\ \lvert x \rvert < 1 \\ 7-2x & si\ \ x \ge 1 \end{cases}$	Las funciones lineales tienen como dominio todos los reales, o los intervalos donde están definidas. Sugerencia: En las funciones definidas por partes, deben ser analizados los intervalos donde está definida. El Dominio es la unión de los intervalos.	

5. Encuentre el rango y el dominio de cada función dada.

   a. $f(t) = \frac{1}{\lvert t^2-4 \rvert}$ b. $f(x) = -\sqrt{x+3}$ c. $f(t) = cot\ (t)$

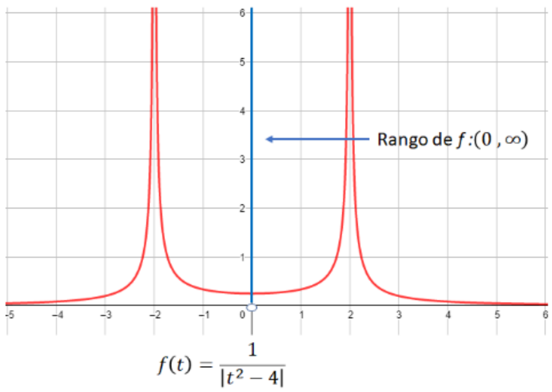
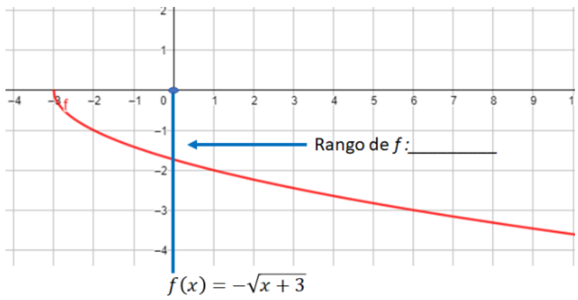
Solución

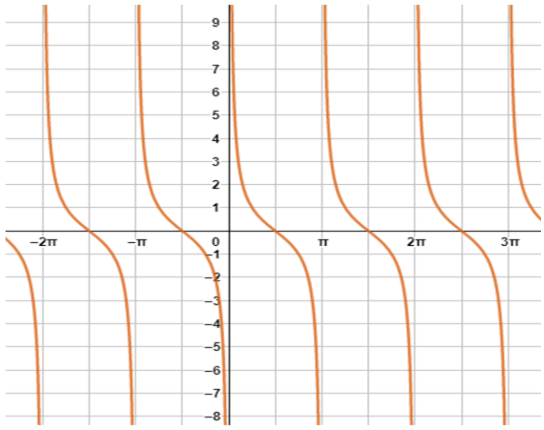
Complete los espacios vacíos siguiendo los ejemplos

El Dominio se calcula como en el ejercicio anterior.

Para calcular el rango, podemos proceder de dos maneras:

1- Calcular la inversa de la función. El dominio de la inversa es el rango de la función original
2- Hacer la gráfica. El rango se determina analizando el eje y.

$a.\ \ f(t) = \frac{1}{\lvert t^2-4 \rvert}$		Como $f(t) \neq 0$ para todo t, $0 \notin Rango(f)$ Dado que $\lvert t^2-4 \rvert \ge 0$ y $1 > 0$, $f(t) > 0$ pues, al estar $\lvert t^2-4 \rvert$en el denominador, $\lvert t^2-4 \rvert \neq 0$. Podemos concluir que $\boldsymbol{Rango(f) = \ (0, \infty)}$ $= \mathbb{R}^+$
$b.\ \ f(x) = -\sqrt{x+3}$		

c. $f(t) = cot\ (t)$	 $f(t) = cot\ (t)$	

6. Para cada par de expresiones encuentre analíticamente los puntos de intersección de sus gráficas. Verificar lo hallado gráficamente (puede utilizar una herramienta de graficación).

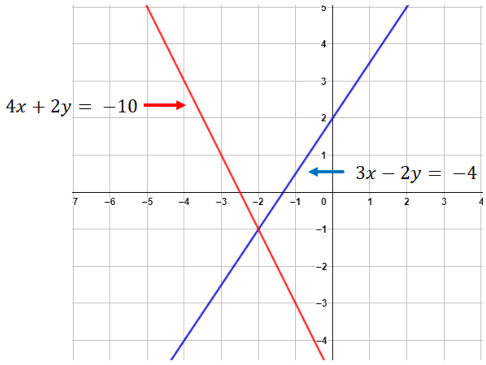
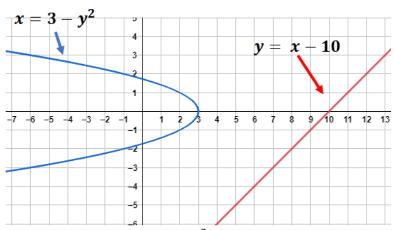
a. $3x - 2y = -4$
$4x + 2y = -10$

b. $x = 3 - y^2$
$y = x - 10$

c. $x^2 + y^2 = 25$
$-3x + y = 15$

Solución

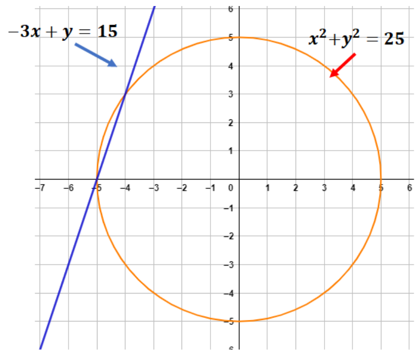
Complete los espacios vacíos siguiendo los ejemplos

Sistema de ecuaciones	Solución Analítica	Solución Gráfica
a. $3x - 2y = -4$ $4x + 2y = -10$		 a. $3x - 2y = -4$ $4x + 2y = -10$
b. $x = 3 - y^2$ $y = x - 10$	b. $x = 3 - y^2$ (1) $y = x - 10$ (2) Reemplazamos (2) en (1) $x = 3 - (x - 10)^2$ x= $3 - (x^2 - 20x + 100)$ $x = -x^2 + 20x - 100 + 3$ $x^2 - 19x + 97 = 0$ $x \notin \mathbb{R}$ **Por lo tanto, las curvas no se intersecan.** $S = \emptyset$	 a. $x = 3 - y^2$ $y = x - 10$

<table>
<tr>
<td>c. $x^2 + y^2 = 25$

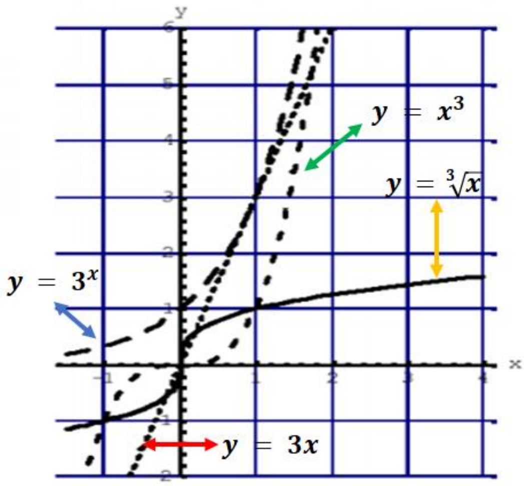
$-3x + y = 15$</td>
<td>c. $x^2 + y^2 = 25$ (1)
$-3x + y = 15$ (2)

En (2) $y = 15 + 3x$ (3)
(3) en (1)
$x^2 + (15 + 3x)^2 = 25$
$x^2 + 15^2 + 90x + 9x^2 = 25$
$10x^2 + 90x + 200 = 0$

Las raíces son $x_1 = -4$; $x_2 = -5$
En (3)
$y_1 = 3 \cdot (-4) + 15 = 3$
$y_2 = 3 \cdot (-5) + 15 = 0$
Luego, hay dos puntos de intersección
$\boldsymbol{P_1: (-4, 3)}$; $\boldsymbol{P_2: (-5, 0)}$;
$\boldsymbol{S = \{(-4, 3), (-5, 0)\}}$</td>
<td>
c. $x^2+y^2 = 25$
$-3x + y = 15$</td>
</tr>
</table>

7. Coteje gráficas y funciones. Explique su decisión en cada caso.

(i) $y = 3x$ (ii) $y = 3^x$ (iii) $y = x^3$ (iv) $y = \sqrt[3]{x}$



$y = 3x$ (en rojo) es lineal
$y = 3^x$ (es azul) es exponencial
$y = x^3$ (en verde) es cúbica
$y = \sqrt[3]{x}$ (en amarillo) es una raíz cúbica

8. Explique cómo se obtienen las gráficas siguientes a partir de la gráfica de $y = f(x)$

a. $y = 5\,f(x)$ b. $y = f(x-5)$ c. $y = -f(x)$

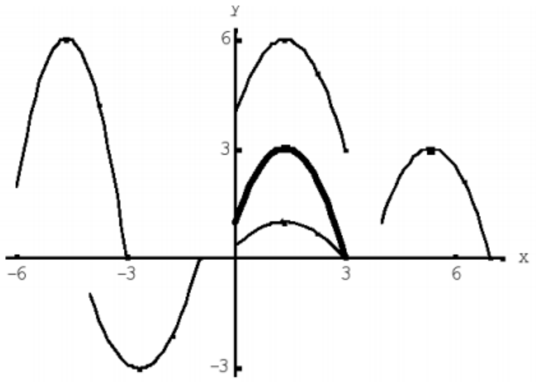
d. $y = -5f(x)$ e. $y = f(5x)$ f. $y = 5f(x) - 3$

Solución

$a.\ y = 5\,f(x)$	Alarga la función 5 unidades. (aleja del $eje\ x$)

$b.\ y = f(x-5)$	Desplaza la función 5 unidades a la derecha.
$c.\ y = -f(x)$	Se refleja respecto del $eje\ x$
$d.\ y = -5f(x)$	Alarga la función reflejada en (c) 5 unidades. (aleja del $eje\ x$)
$e.\ y = f(5x)$	Comprime la gráfica horizontalmente, aproximándola al $eje\ y$. El factor de compresión depende de la ecuación que define la función.
$f.\ y = 5f(x) - 3$	Alarga la función 5 unidades. (aleja del $eje\ x$) y se desplaza 3 unidades hacia abajo.

9. La gráfica de $y = f(x)$ está dada en la siguiente figura. Cotejar cada ecuación con una su gráfica y dar razones apropiadas para hacerlo.



a. $y = f(x-4)$ b. $y = f(x)+3$ c. $y = \frac{1}{3}f(x)$

d. $y = 2f(x+6)$ e. $y = -f(x+4)$

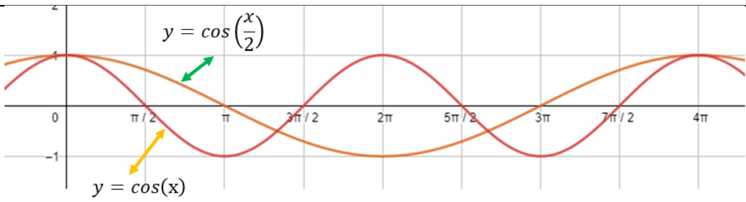
Solución

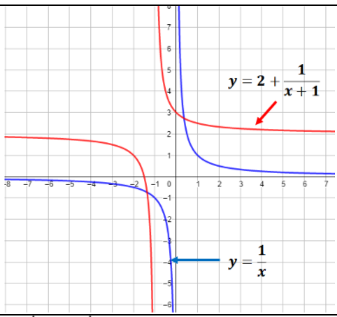
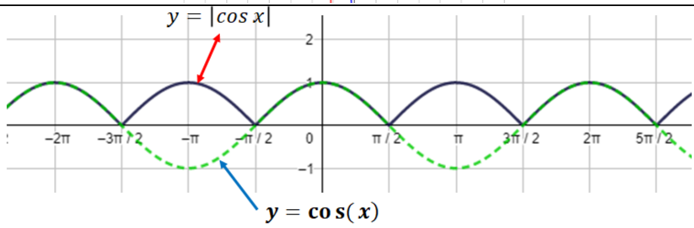
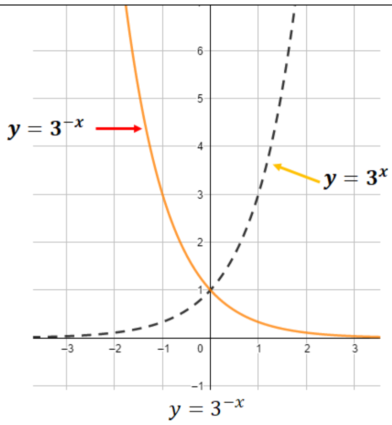
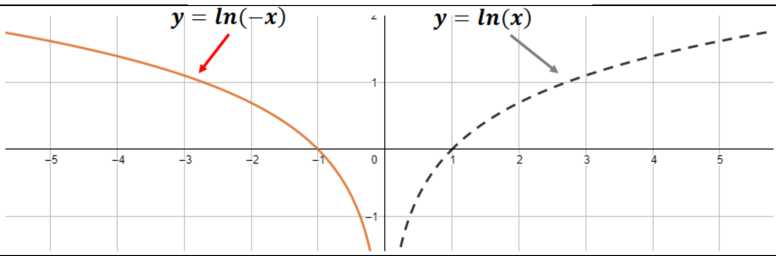
- Use la información del ejercicio anterior

10. Grafique cada función, no por la colocación de puntos, sino <u>a partir de la gráfica de una de las funciones estándar dadas</u> y, a continuación, aplicando trasformaciones apropiadas.

a. $y = cos\left(\frac{x}{2}\right)$ b. $y = 2 + \frac{1}{x+1}$ c. $y = |cos\ x|$ d. $y = 3^{-x}$ e. $y = ln(-x)$

Solución

a.		<u>Función dada</u>: $y = cos\left(\frac{x}{2}\right)$ <u>Función estándar</u>: $y = \cos(x)$ <u>Transformación</u>: - Estiramiento horizontal

b.		<u>Función dada</u>: $y = 2 + \frac{1}{x+1}$ <u>Función estándar</u>: $y = \frac{1}{x}$ <u>Transformación:</u> - Desplazamiento a izquierda de una unidad. - Sube horizontalmente 2 unidades
:c.		<u>Función dada</u>: $y = \lvert cos\ x \rvert$ <u>Función estándar</u>: $y = \cos(\mathrm{x})$ <u>Transformación:</u> - La parte negativa de la gráfica estándar es reflejada respecto del eje x
d.		<u>Función dada</u>: $y = 3^{-x}$ <u>Función estándar</u>: $y = 3^{x}$ <u>Transformación:</u> - Reflexión sobre el eje y de la gráfica de la función estándar.
e.		<u>Función dada</u>: $y = ln(-x)$ <u>Función estándar</u>: $y = ln(x)$ <u>Transformación</u> - Reflexión sobre el eje y de la gráfica de la función estándar.

11. Dada $f(x) = x^3 - x$, determine si f es par, impar o ninguna de las dos cosas. Si f es par o impar, aplique la simetría para trazar su gráfica.

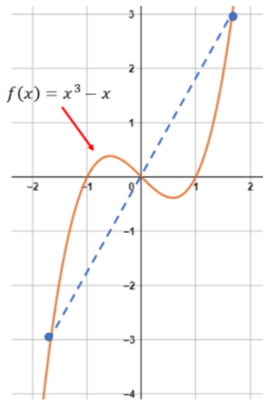
Solución

Recordemos

$$f\ es\ par \iff f(-x) = f(x)\text{, y que}$$
$$f\ es\ impar \iff f(-x) = -f(x)$$

$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x) \Rightarrow$ ***f es impar***

Su gráfica es simétrica respecto del origen, como muestra el segmento azul de la gráfica.



Analíticamente, una función $y = f(x)$, es <u>simétrica respecto del origen</u>, si cuando reemplazamos x por $(-x)$ e y por $(-y)$ obtenemos la ecuación original.
Verificamos la simetría de $y = x^3 - x$

$$-y = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) \Rightarrow y = x^3 - x$$

Obtuvimos la ecuación original, como era de esperarse.

12. Sea $f : A \rightarrow IR$, la indicada en cada ítem. Represente gráficamente cada una de ellas e indique:
    a. Intervalos para los cuales la función es creciente o decreciente.
    b. Si f es par, impar o ninguna de las dos cosas.

a. $h(x) = \log_{1/3}(x)$ b. $m(x) = sen(x + \pi)$ c. $l(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

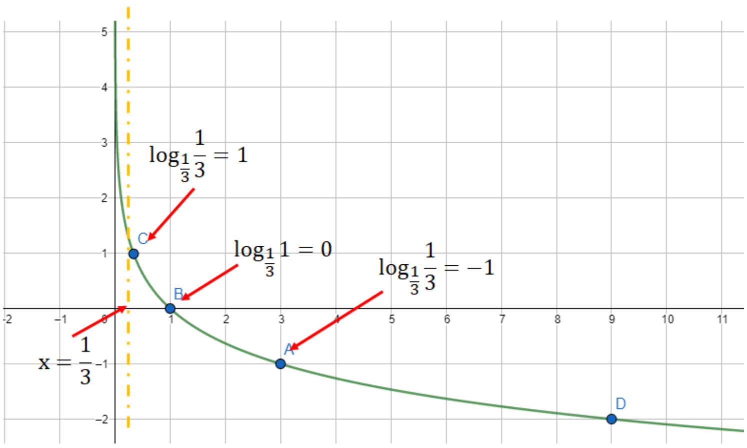
Solución

a) Revisión teórica: Para graficar la función logarítmica recordemos tres cosas básicas:

$$\log_a \frac{1}{a} = -1 \quad \Rightarrow \quad Punto\ A\colon\ \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = -1$$

$$\log_a 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad Punto\ B\colon\ \log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$$

$$\log_a a = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Punto C: } \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = 1$$



1. Analizando su gráfico observamos que la función es **decreciente** en todo su dominio de definición: $(0\ ,\infty)$
2. Sea f una función. Decimos que

$$f\ es\ par \iff f(-x) = f(x)\text{ , y que}$$

$$f\ es\ impar \iff f(-x) = -f(x)$$

Las funciones pares son simétricas respecto del $eje\ y$
Las funciones impares son simétricas respecto del origen.

Analizando su gráfico observamos que **no** es **par** y **tampoco impar**

b) Revisión teórica: Para graficar las funciones trigonométricas seno o coseno recordemos la expresión general de las mismas:

$$y = \boldsymbol{a}\ sen\ \boldsymbol{k}(x - \boldsymbol{b}) \quad \text{y} \quad y = \boldsymbol{a}\cos \boldsymbol{k}(x - \boldsymbol{b}) \quad (\boldsymbol{k} > 0)$$

Donde la amplitud es $|\boldsymbol{a}|$, el periodo es $\frac{2\pi}{\boldsymbol{k}}$ y desplazamiento de fase $\boldsymbol{b}$

Un intervalo adecuado para graficar un periodo completo es $[\boldsymbol{b}\ ,\ \boldsymbol{b} + (\ 2\pi/\boldsymbol{k})]$

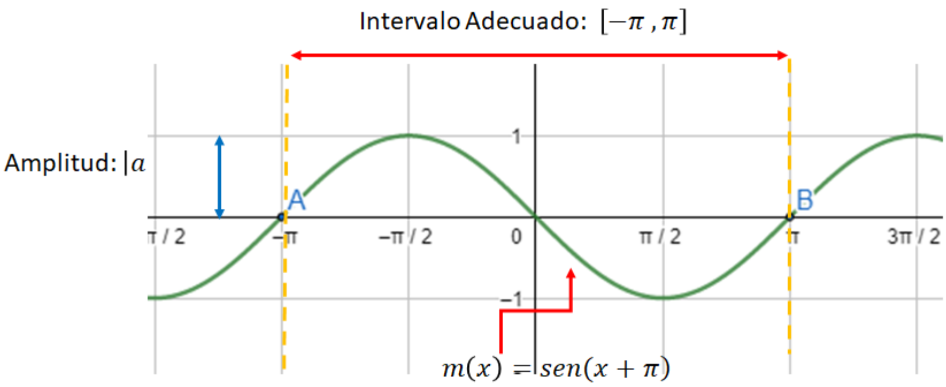
$$m(x) = \mathbf{1}sen\mathbf{1}(x - (-\pi))$$

Amplitud: $|a| = 1$

<u>Periodo</u> $= \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

<u>Desplazamiento de la fase</u>: $b = -\pi < 0$ desplazamiento a la izquierda

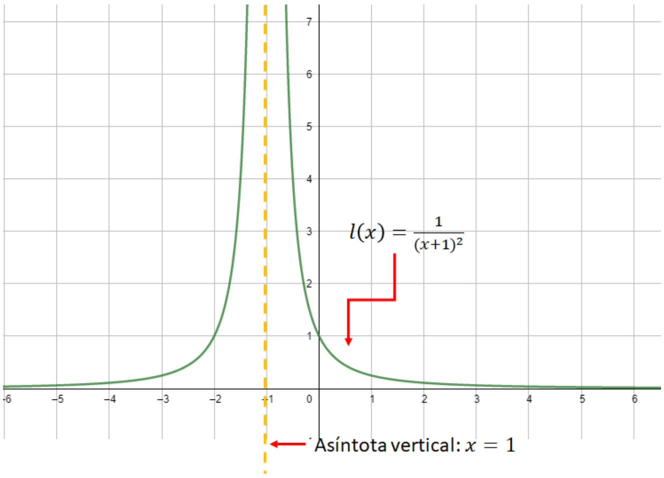
<u>Intervalo Adecuado</u>: $[b\ ,\ b + (\ 2\pi/k)] = [-\pi, (-\pi + 2\pi)] = [-\pi\ , \pi]$



1. Analizando el gráfico en el intervalo adecuado, observamos que la función es **decreciente** en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. También lo es, por ser periódica y con periodo 2π , en los siguientes intervalos: $\left(\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right)$, $\left(\frac{7}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi\right)$.... etc. (encuentre la secuencia de intervalos)
   Observamos que la función es **creciente** en el intervalo $\left(-\frac{3}{2}\pi\ , -\ \frac{\pi}{2}\right)$ y en $\left(\frac{\pi}{2}\ , \frac{3}{2}\pi\right)$.
   (encuentre la secuencia de intervalos donde la función es creciente)

2. Analizando su gráfico observamos que es **impar**, por ser simétrica respecto del origen.
   Si analizamos en la circunferencia trigonométrica, es fácil verificar que $sen(-x) = -sen(x)$. Si aplicamos a ambos lados de la igualdad, un desplazamiento horizontal de π, ésta no se altera. Luego:
   $$sen(-x) = -sen(x) \Longrightarrow sen(-x + \pi) = -sen(x + \pi)\ ,$$
   que es justamente la condición para que una función sea impar.

c) Revisión teórica: Para graficar $l(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$, un análisis preliminar nos muestra que si el denominador es 0, la curva presentará en el valor de x que anula el denominador, una <u>asíntota</u> vertical, $x = 1$. Por el hecho de estar elevado al cuadrado, el denominador será siempre mayor que 0. Como el numerador es $1 > 0$, el gráfico de la función l, estará siempre sobre el eje x. Podemos obtener su gráfico aplicando transformaciones a la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$; a saber, desplazamos a la izquierda el grafico de f en 1 unidad, ya que estamos sumando 1, dentro del argumento.



13. Para cada una de las expresiones del ejercicio 3 que sean funciones:
    i. Indique su Dominio.
    ii. Encuentre analíticamente las intersecciones con los ejes (ceros y ordenada al origen).
    iii. Determine paridad y simetría respecto de cada uno de los ejes y del origen.
    iv. Indique conjuntos de negatividad y positividad, crecimiento y decrecimiento.

Solución

$a.\ \ f(x) = \ y = (x-3)^2$

Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R}$

Ceros: ¿Cuánto vale x, cuando $y = 0$?

$$0 = (x-3)^2 \Rightarrow \boldsymbol{x = 3}$$

Ord. Al Origen: ¿Cuánto vale y, cuando $x = 0$?

$$y = (0-3)^2 = (-3)^2 = 9 \Rightarrow \boldsymbol{y = 9}$$

Paridad:

$$f(-x) = (-x-3)^2 = [(-1)(x+3)]^2 = (-1)^2(x+3)^2 = (x+3)^2 \neq f(x) \Rightarrow no\ es\ par$$
$$f(-x) = (x+3)^2 \neq -f(x) \Rightarrow no\ es\ impar$$

Simetría:

<u>Simetría respecto al *eje x*</u>: La ecuación de la curva no cambia al sustituir y por $(-y)$

$-\,y = (x-3)^2$
$y = -(x-3)^2$ esta ecuación es distinta de $y = (x-3)^2 \Rightarrow$ ***no es simétrica respecto de eje x***

<u>Simetría respecto al *eje y*</u>: La ecuación de la curva no cambia al sustituir x por $(-x)$

$y = (-x-3)^2 = [(-1)(x+3)]^2 = (-1)^2(x+3)^2 = (x+3)^2$
La ecuación $y = (x+3)^2$ es distinta de $y = (x-3)^2 \Rightarrow$ ***no es simétrica respecto de eje y***

<u>Simetría respecto al origen</u>: La ecuación de la curva no cambia al sustituir x por $(-x)$ e y por $(-y)$

$-y = (-x-3)^2 = [(-1)(x+3)]^2 = (-1)^2(x+3)^2 = (x+3)^2$
$$y = -(x+3)^2$$
Esta ecuación es distinta de $y = (x-3)^2 \Rightarrow$ ***no es simétrica respecto del origen***

$C^+; \ C^-$:

El Conjunto de Positividad **(C^+)** de una función es el subconjunto del dominio cuyas imágenes son números positivos.

$$C^+ = \{x/x \in Dom(f) \ y \ f(x) > 0\}$$

El Conjunto de Negatividad **(C^-)** de una función es el subconjunto del dominio cuyas imágenes son números negativos.

$$C^- = \{x/x \in Dom(f) \ y \ f(x) < 0\}$$

Como $(x-3)^2 > 0$, $\boldsymbol{C^+} = \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{C^-} = \emptyset$

$b.$ Resuelva: $y = |x| - 1$

Dominio: ___________________

Ceros: ¿Cuánto vale x, cuando $y = 0$? $\boldsymbol{x} =$ _____

Ord. Al Origen: ¿Cuánto vale y, cuando $x = 0$? $\boldsymbol{y} =$ ________

Paridad:

Simetría:

Simetría respecto al $eje\ x$: La ecuación de la curva no cambia al sustituir y por $(-y)$

Simetría respecto al $eje\ y$: La ecuación de la curva no cambia al sustituir x por $(-x)$

Simetría respecto al origen: La ecuación de la curva no cambia al sustituir x por $(-x)$ e y por $(-y)$

$C^+; \ C^-$:

$d.$ Resuelva: $y = x^3 - 4x$

Dominio: ___________________

Ceros: ¿Cuánto vale x, cuando $y = 0$? $\boldsymbol{x} =$ _____

Ord. Al Origen: ¿Cuánto vale y, cuando $x = 0$? $\boldsymbol{y} =$ ________

Paridad:

Simetría:

Simetría respecto al $eje\ x$: La ecuación de la curva no cambia al sustituir y por $(-y)$

Simetría respecto al $eje\ y$: La ecuación de la curva no cambia al sustituir x por $(-x)$

Simetría respecto al origen: La ecuación de la curva no cambia al sustituir x por $(-x)$ e y por $(-y)$

$C^+; \ C^-$:

$e.$ $y = (x-1)\sqrt{x^2+1}$

Dominio: **Todos los reales, pues $\boldsymbol{x^2 + 1 > 0}$**

Ceros: ¿Cuánto vale x, cuando $y = 0$? $\boldsymbol{x = 1}$

$$(x-1)\sqrt{x^2+1} = 0 \iff (x-1) = 0 \ \text{ o } \ \sqrt{x^2+1} = 0$$
$$(x-1) = 0 \iff x = 1$$

$$\sqrt{x^2+1}=0 \text{ nunca ocurre pues } x^2+1\neq 0$$

Ord. Al Origen: ¿Cuánto vale y, cuando $x=0$? $\boldsymbol{y=-1}$

$$y=(0-1)\sqrt{0^2+1}=(-1)\cdot\sqrt{1}=-1$$

Paridad: Sea $f(x)=(x-1)\sqrt{x^2+1}$

$$f(-x)=(-x-1)\sqrt{(-x)^2+1}=(-1)\cdot(x+1)\cdot\sqrt{x^2+1}=-(x+1)\cdot\sqrt{x^2+1}\neq f(x)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{no\ es\ par}$$

$$f(-x)=(-x-1)\sqrt{(-x)^2+1}=(-1)\cdot(x+1)\cdot\sqrt{x^2+1}=-(x+1)\cdot\sqrt{x^2+1}\neq -f(x)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{no\ es\ impar}$$

Simetría:

Simetría respecto al $eje\ x$: La ecuación de la curva no cambia al sustituir y por $(-y)$

$$-y=(x-1)\sqrt{x^2+1}\ \Rightarrow\ y=-(x-1)\sqrt{x^2+1}\neq(x-1)\sqrt{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{no\ es\ simétrica\ respecto\ del\ eje\ x}$$

Simetría respecto al $eje\ y$: La ecuación de la curva no cambia al sustituir x por $(-x)$

$$y=(-x-1)\sqrt{(-x)^2+1}\ \Rightarrow\ y=-(x+1)\sqrt{x^2+1}\neq(x-1)\sqrt{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{no\ es\ simétrica\ respecto\ del\ eje\ y}$$

Simetría respecto al origen: La ecuación de la curva no cambia al sustituir x por $(-x)$ e y por $(-y)$

$$-y=(-x-1)\sqrt{(-x)^2+1}\ \Rightarrow\ -y=-(x+1)\sqrt{x^2+1}$$

$$\Rightarrow\ y=(x+1)\sqrt{x^2+1}\neq(x-1)\sqrt{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{no\ es\ simétrica\ respecto\ del\ eje\ y}$$

$C^+;\ C^-$:

El cero de la función ($\boldsymbol{x=1}$) divide a la recta real en dos intervalos: $(-\infty,1)$ y $(1,\infty)$

Analizamos el signo de los valores de la función en estos intervalos mediante la tabla de intervalos.

Como la función ya está factorizada, tenemos:

	$(-\infty,1)$	$(1,\infty)$
$(x-1)$	$-$	$+$
$\sqrt{x^2+1}$	$+$	$+$
$(x-1)\sqrt{x^2+1}$	$-$	$+$

Luego

$\boldsymbol{C^+=(1,\infty)}$

$\boldsymbol{C^-=(-\infty,1)}$

$f.\ \ y=\frac{10}{x^2+1}$

Dominio: ___________________
Ceros: ¿Cuánto vale x, cuando $y = 0$? $\boldsymbol{x =}$ _____
Ord. Al Origen: ¿Cuánto vale y, cuando $x = 0$? $\boldsymbol{y =}$ ________
Paridad:
Simetría:
Simetría respecto al $eje\ x$: La ecuación de la curva no cambia al sustituir y por $(-y)$

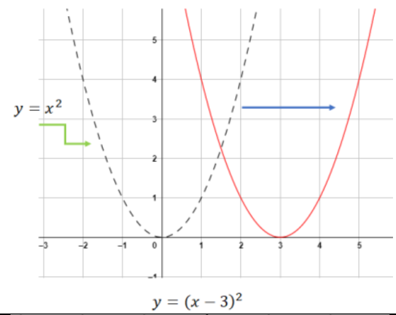
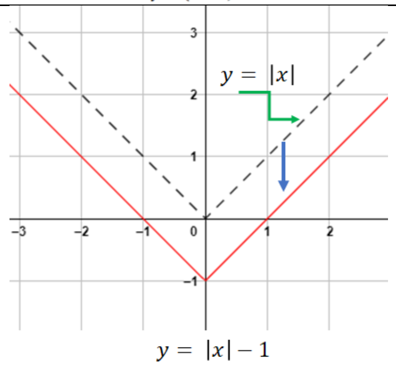
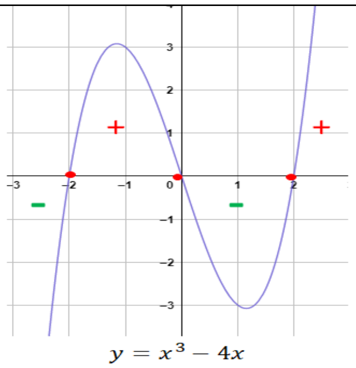
Simetría respecto al $eje\ y$: La ecuación de la curva no cambia al sustituir x por $(-x)$

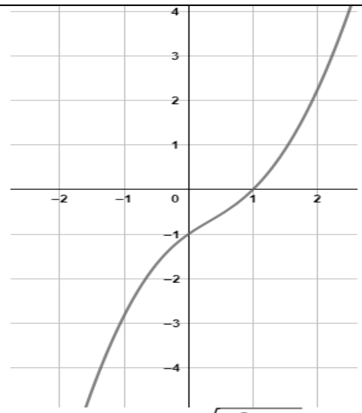
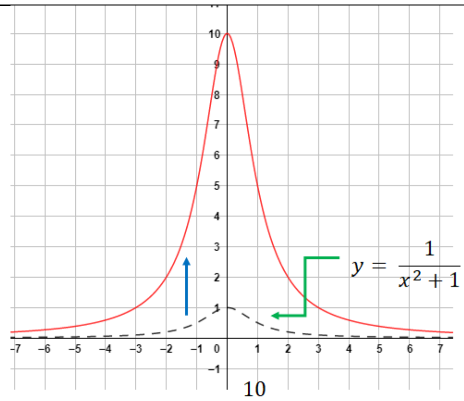
Simetría respecto al origen: La ecuación de la curva no cambia al sustituir x por $(-x)$ e y por $(-y)$

C^+; C^-:

14. Bosqueje la gráfica de cada una de las funciones anteriores, no mediante la representación de puntos, sino a partir de las transformaciones generadas por cambio en los valores de los parámetros; esto es, usando la gráfica principal y sus desplazamientos horizontales o verticales, reflexiones respecto de los ejes, etc. Verifique lo obtenido empleando alguna herramienta de graficación (www.wolframalpha.com o Geogebra).

Solución

a.		Curva dada: $y = (x-3)^2$ Curva estándar: $y = x^2$ Transformaciones aplicadas: - Se desplaza 3 unidades a derecha la curva estándar
b.		Curva dada: Curva estándar: Transformaciones aplicadas:
d.		Curva dada: $y = x^3 - 4x$ Curva estándar: No tiene Transformaciones aplicadas: Sugerencia: aplique toda la caracterización, calculada en el ejercicio anterior, para bosquejar la gráfica

e.		<u>Curva dada</u>: $y = (x-1)\sqrt{x^2+1}$ <u>Curva estándar</u>: No tiene <u>Transformaciones aplicadas</u>: Sabemos que: tiene un cero en $x = 1$, que su ordenada al origen es $y = -1$. También sabemos que se encuentra por debajo del *eje x* en el intervalo $(-\infty, 1)$ y por encima del *eje x* en el intervalo $(1, \infty)$ No tiene indeterminaciones, y es suave (se verá más adelante en el cursado). Con esta información, bosquejamos la gráfica
f.		<u>Curva dada</u>: $y = \frac{10}{x^2+1}$ <u>Curva estándar</u>: $y = \frac{1}{x^2-a}$ <u>Transformaciones aplicadas</u>: Piense a la función dada así: $y = 10 \cdot \frac{1}{x^2+1}$ En el gráfico a izquierda $a = -1$

15. Bosqueje la gráfica de $f + g$ por adición gráfica

Solución

- Se deja al alumno

16. Dadas las funciones $f(x) = x^3 + 2x^2$ y $g(x) = 3x^2 - 1$, encuentre $f + g$, $f - g$, fg y f/g y dé sus dominios.

Solución

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (x^3 + 2x^2) + (3x^2 - 1) = x^3 + 5x^2 - 1$
  $Dom(f+g) = \mathbb{R}$

- $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (x^3 + 2x^2) - (3x^2 - 1) = x^3 - x^2 + 1$
  $Dom(f-g) = \mathbb{R}$

- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^3 + 2x^2) \cdot (3x^2 - 1) = 3x^5 + 6x^4 - x^3 - 2x^2$
  $Dom(f \cdot g) = \mathbb{R}$

- $(f/g\,)(x) = \frac{x^3+2x^2}{3x^2-1}$ para todo los x tales que $3x^2 - 1 \neq 0$, o sea, $x \neq \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right| = \left|\frac{\sqrt{3}}{3}\right|$
  $Dom(f/g) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

17. Encuentre las funciones $f\ o\ g$, $g\ o\ f$, $f\ o\ f$ y $g\ o\ g$, así como sus dominios.
   a. $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = x^3 + 2x$
   b. $f(x) = sen\ x\, , g(x) = 1 - \sqrt{x}$

Solución

a. $f(x) = \frac{1}{x}, \boldsymbol{g(x) = x^3 + 2x}$
$Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
$Dom(g) = \mathbb{R}$

$$(f\ o\ g)(x) = f(\boldsymbol{g(x)}) = f(\boldsymbol{x^3 + 2x}) = \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x^3 + 2x})}$$

$Dom(f\ o\ g) = \mathbb{R} - \{0\}$

$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}, g(x) = x^3 + 2x$

$$(g\ o\ f)(x) = g(\boldsymbol{f(x)}) = g\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right) = \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right)^{\mathbf{3}} + \mathbf{2}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right)$$

$Dom(g\ o\ f) = \mathbb{R} - \{0\}$

$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$

$$(f\ o\ f)(x) = f(\boldsymbol{f(x)}) = \frac{1}{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{x}$$

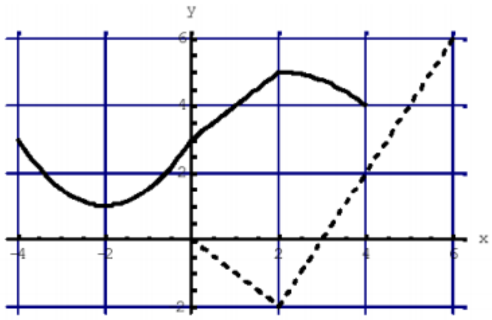
$Dom(f\ o\ f) = \mathbb{R} - \{0\}$ Sacamos el 0 porque no pertenece al dominio de f

$\boldsymbol{g(x) = x^3 + 2x}$

$$(g\ o\ g\,)(x) = g(\boldsymbol{g(x)}) = g(\boldsymbol{x^3 + 2x}\,) = (\boldsymbol{x^3 + 2x}\,)^3 + 2(\boldsymbol{x^3 + 2x}\,)$$
$$= \boldsymbol{x^9 + 6x^7 + 12x^5 + 10x^3 + 4x}$$

$Dom(g\ o\ g) = \mathbb{R}$

18. Use las gráficas dadas de f y g para evaluar cada expresión, o bien, explique por qué no está definida.
   a. $f(g(2))$
   b. $g(f(0))$
   c. $(f\ o\ g)(0)$
   d. $(g\ o\ f)(6)$
   e. $(g\ o\ g)(-2)$
   f. $(f\ o\ f)(4)$



Solución

- Se deja al alumno

19. Si f es una función uno a uno tal que $f(2) = 9$, ¿cuál es $f^{-1}(9)$?

Solución

Si f es uno a uno, entonces existe f^{-1}, también uno a uno, tal que $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

Como f es uno a uno, $f(2) = 9 \Leftrightarrow \boldsymbol{f^{-1}(9) = 2}$

20. Halle una fórmula para la inversa de la función.

a. $f(x) = 5 - 4x^3$ b. $f(x) = \sqrt{2 + 5x}$ c. $f(x) = ln(x + 3)$

Solución

a. $f(x) = 5 - 4x^3$

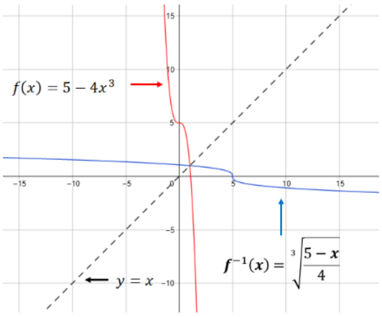
$y = 5 - 4x^3$

$y - 5 = -4x^3$ Despeje x em función de y

$\frac{5-y}{4} = x^3$

$\sqrt[3]{\frac{5-y}{4}} = x$ cambie x por y $y = \sqrt[3]{\frac{5-x}{4}}$. Entonces $\boldsymbol{f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{5-x}{4}}}$

Verificación gráfica:



Observe la simetría respecto de la bisectriz del primero y tercer cuadrante

b. $f(x) = \sqrt{2 + 5x}$

- Queda para el alumno

c. $f(x) = ln(x + 3)$

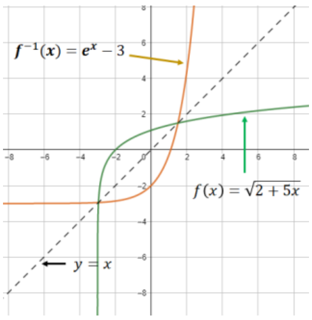
$y = ln(x + 3)$

$e^y = e^{ln(x+3)}$

$e^y = x + 3.$

$e^y - 3 = x$ Cambie x por y $y = e^x - 3$. Entonces $\boldsymbol{f^{-1}(x) = e^x - 3}$

Verificación gráfica:



Observe la simetría respecto de la bisectriz del primero y tercer cuadrante

21. Para cada una de las funciones del punto 13, indague analítica y gráficamente sobre su inyectividad (uno a uno). Para aquellas que cumplan con las condiciones de inversibilidad, encuentre su inversa. Para aquellas que no la cumplan, indague qué debería hacer para que tales funciones tengan inversa y encuéntrela.

Los ejercicios que a continuación se plantean, buscan desarrollar criterios de resolución y modelado de funciones. Es decir, aplicar los conceptos aprendidos sobre distintos tipos de funciones, armar una estrategia de resolución e intentar dar con el resultado solicitado.

<u>Normas para modelar con funciones:</u>

a) *Exprese el modelo en palabras*. Identifique la cantidad que quiere modelar y exprésela, en palabras, como una función de otras cantidades en el problema.

b) *Elija la variable*. Identifique las variables empleadas para expresar la función en el paso 1. Asigne un símbolo, como x, a una variable y exprese las otras variables en términos de este símbolo.

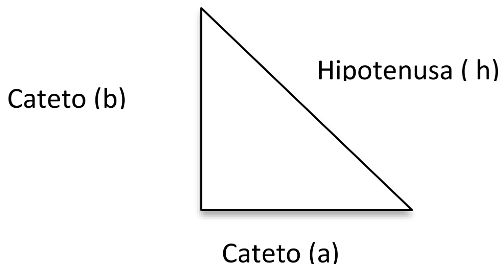
c) *Establezca el modelo*. Exprese la función en el lenguaje del álgebra al escribirla como una función de única variable elegida en el paso 2.

d) *Use el modelo*. Emplee la función para contestar las preguntas planteadas en el problema.

22. Expresе la hipotenusa h de un triángulo rectángulo con un área de 25 m^2 , en función de su perímetro P.

Atendiendo a lo anteriormente expuesto, desarrollamos la serie de pasos.

a) Exprese el modelo en palabras.



Se sabe que el área es:

$$A = \frac{base \times altura}{2}$$

Se sabe que el perímetro se obtiene:

$$P = cateto + cateto + hipotenusa$$

Se pide calcular la hipotenusa (h) en función del perímetro.

b) Elija la variable.

Nuestras variables son los catetos y la hipotenusa, los cuales serán: catetos *(a y b),* hipotenusa *(h).* Por lo tanto, las serán:

$25\, m^2 = \frac{a \times b}{2}$ para el área.

$P = a + b + h$ para el perímetro.

c) Establezca el modelo.

Del área:

$$25\, m^2 = \frac{a \times b}{2}$$

$$2 \times 25 = a \times b$$

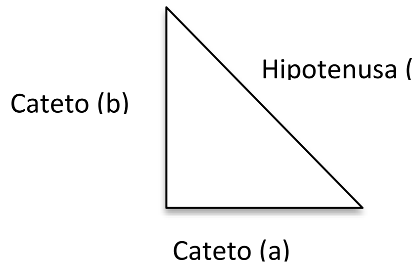
$50 = a \times b$ (1)

Del perímetro:

$P - h = a + b$ (2)

Ahora necesitamos el planteo del teorema de Pitágoras, ya que estamos trabajando con un triángulo rectángulo.

Teorema de Pitágoras: “La suma de los cuadrados de los catetos (a y b), es igual al cuadrado de la hipotenusa (h)”.



Teniendo en cuenta el Teorema, planteamos su fórmula:

$a^2 + b^2 = h^2$

$a^2 + 2.a.b + b^2 = h^2 + 2.a.b$

Desarrollamos un completamiento de cuadrados, para obtener al binomio:

$$\underbrace{a^2 + 2.a.b + b^2} = h^2 + 2.a.b$$

$$(a + b)^2 = h^2 + 2.a.b$$

$$(P - h)^2 = h^2 - 2.50$$ Desarrollamos el cuadrado del binomio

$$P^2 - 2.P.h + h^2 = h^2 - 100$$

$$P^2 + \cancel{h^2} - \cancel{h^2} + 100 = 2.P.h$$

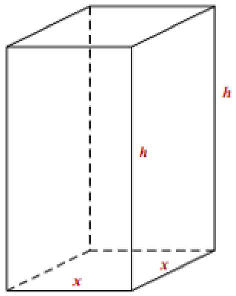
$$\frac{P^2}{\cancel{2}P} + \frac{100}{2\,P} = h \Rightarrow$$

$$\boxed{h = \frac{1}{2}\,P + \frac{50}{P}}$$

d) Use el modelo. En caso de tener que resolver preguntas concisas, ya se tiene el modelo para ser empleado en la resolución.

23. Una caja rectangular abierta, con volumen de 2 m^3, tiene una base cuadrada. Exprese el área superficial de la caja como función de la longitud de uno de los lados de la base.

Volumen (V)= 2 m^3



V= superficie de la base . altura

V= $b^2 . h$

$2 = b^2 . h$ (1)

El área supercial de la caja abierta, es la suma de las áreas de la base y las 4 caras laterales:

Área (A)= superficie de la base + 4. (superficies caras laterales)

$A = b^2 + 4 \times (b . h)$ (2)

De la ecuación (1) obtengo el lado de la caja:

$2 = b^2 . h$

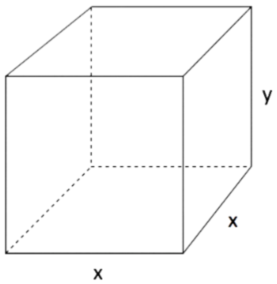
$h = \frac{2}{b^2}$

En la ecuación (2), se obtiene el valor del área superficial de la caja en función de uno de los lados (h).

$A_s = b^2 + 4 \times (\cancel{b} . \frac{2}{b^{\cancel{2}}})$ (2)

$$\boxed{A_s = b^2 + \frac{8}{b}}$$

24. Si se cuenta con 1.200 cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada y la parte superior abierta, exprese el volumen V de dicha caja en función de la longitud de uno de los lados de su base.



Área (A) = 1200 cm^2

El área superficial de la caja abierta, es la suma de las áreas de la base y las 4 caras laterales:

Área (A)= superficie de la base + 4 . (superficie caras laterales)

$1200 = x^2 + 4 \times (x . y)$ (1)

Se nos solicita expresar el volumen V de la caja en función de uno de los lados:

Volumen (V) = área de la base . altura

$V = x^2 . y$ (2)

De (1), obtengo el lado :

$$1200 = x^2 + 4 \times (x \, . \, y)$$

$$\frac{1200 - x^2}{4\,b} = y$$

$$\frac{\cancel{1200}}{\cancel{4}\,b} - \frac{b^2}{4\,\cancel{b}} = y \qquad => \qquad y = \frac{300}{b} - \frac{b}{4}$$

Finalmente, reemplazando *h en (2), se obtiene el volumen de la caja en función de uno de sus lados*

$$V = x^2 \, . y$$

$$V = x^2 \, . \left(\frac{300}{b} - \frac{b}{4}\right) \qquad => \qquad \boxed{V = 300b - \frac{b^3}{4}}$$

25. En condiciones ideales, se sabe que cierta población de bacterias se duplica cada tres horas. Suponga que primero hay $100\ UFC$ (unidades formadoras de colonias), Responda:

a. ¿Cuál es el tamaño de la población de después de t horas? y luego de 15 horas?

b. Bosqueje la función de la población y estime el tiempo para que la población llegue a $50.000\ UFC$.

Este problema requiere análisis de Función exponencial.

Una función exponencial es aquella que la variable independiente x aparece en el exponente y tiene de base una constante a. Su expresión es:

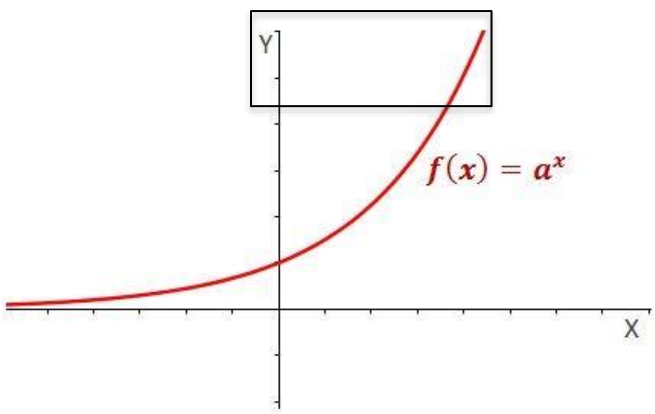
$$f(x) = a^x$$

siendo a un real positivo, a > 0, y diferente de 1, a ≠ 1.

Cuando 0 < a < 1, entonces la función exponencial es una función decreciente y cuando a > 1, es una función creciente.

a) Según los datos, la población inicial es de 100 UFC, responde al valor *K* que multiplica a *a* (base de la función). La base de la función será 2, ya que el crecimiento bacteriano se **duplica.** Nuestra variable será el tiempo (*t*), el cual debe dividirse en 3porque la población se **duplica cada 3 horas**.

$$F(x) = k \, . \, a^x$$



$$F(x) = 100 \,.\, 2^{t/3}$$

Si t =15 hs

$$F(t) = 100 \,.\, 2^{15/3}$$

$$F(t) = 100 \,.\, 2^{5} \qquad => \quad n = F(t) = 3200\ UFC$$

b) Para la estimación del tiempo que tardan en formarse las 50000 UFC, se emplea la ecuación obtenida en el ejercicio anterior. Mediante adecuado despeje, se encuentra el tiempo (t).

$$50000 = 100 \,.\, 2^{t/3}$$

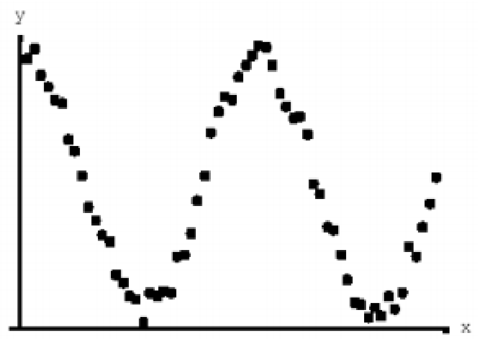
$$\frac{50000}{100} = 2^{t/3}$$

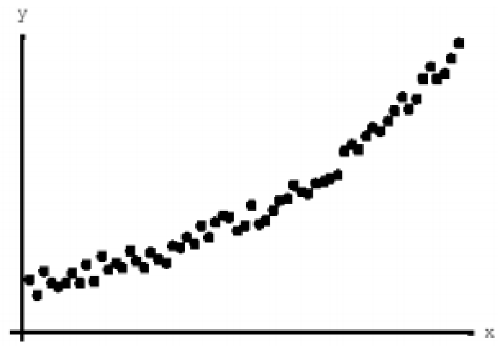
$$\ln \frac{50000}{100} = \ln 2^{t/3}$$

$$\ln 500 = \frac{t}{3} \ln 2$$

$$\frac{\ln 500}{\ln 2} \times 3 = t \qquad => \quad t = 26,89\ horas \sim \boxed{t = 27\ horas}$$

26. Para cada diagrama de dispersión decida qué tipo de función podría elegir para modelar los datos. Explique su elección.





Solución: Emplear conceptos de funciones y sus gráficas estándar. Reconocer.

27. Si una población de bacterias comenzó con 100 UFC y se duplica cada tres horas, la cantidad de ejemplares después de t horas es $n = f(t) = 100.\, 2^{t/3}$. Encuentre la inversa de esta función y explique su significado.

Solución: Conceptos vistos en ejercicio 25. Desarrollar según lo entendido.

28. Sabiendo que: $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \log_2 x$ son funciones inversas, realizar la composición $(f\ o\ g)$ y $(g\ o\ f)$ para verificar si se obtiene la identidad.

Revisión teórica: debemos tener en cuenta los conceptos de Composición de funciones y Función Inversa.

Composición de funciones

Considérese una forma muy importante de combinar dos funciones para obtener una nueva función.

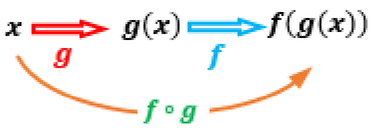
Sean las funciones ***g y f***, donde ***g(x)*** está definida tiene como dominio el conjunto **A** e imagen el **B** y sea ***f(x)*** la función de dominio en **B** e imagen en **C**, la composición;$f\big(g(x)\big)$ ó "***f o g***" es una nueva función, tal que: $h(x) = f\big(g(x)\big)$

El dominio de $f\big(g(x)\big)$ consiste en todos los números ***x*** del dominio de ***g(x)*** para los cuales ***g(x)*** está en el dominio de ***f(x)***, es decir***: Imag.(g)*** ⊆ ***Dom(f)***.

El resultado es una nueva función obtenida al sustituir ***g en f***. Se llama la *COMPOSICIÓN* (o *compuesta*) de ***f y g.***

Función inversa

Las funciones uno a uno son importantes porque son precisamente las funciones que poseen funciones inversas de acuerdo con la siguiente definición

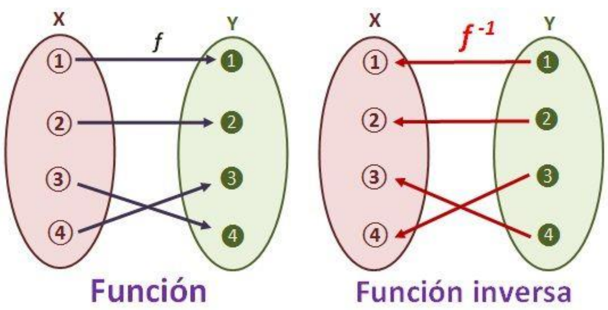


Composición de funciones

Sea f una función uno a uno con dominio en el conjunto ***A*** e imagen en ***B***. Entonces su FUNCIÓN INVERSA f^{-1} tiene dominio en ***B*** e imagen en ***A*** y está definida por:

$f(f^{-1})(x) = x$ o $f^{-1}(f)(x) = x$

$$\text{dominio de } f^{-1} = \text{rango de } f$$
$$\text{rango de } f^{-1} = \text{dominio de } f$$



En el sentido más amplio, son funciones que hacen lo "contrario" de cada una. Por ejemplo, si una función convierte *a* en *b*, entonces su inversa debe convertir *b* en *a*.

Pero, para que dos funciones sean inversas, debemos comprobar que esto ocurre *para* *todo valor de entrada* posible, independientemente del orden en que f y g se apliquen. Esto da lugar a la regla de composición de inversas.

<u>La regla de composición de inversas</u>

Estas son las condiciones para que dos funciones f y g sean inversas:

- $f(g(x)) = x$ para todo x en el dominio de g.
- $g(f(x)) = x$, para todo x en el dominio de f.

Esto es porque si f y g son inversas, componer f y g (en cualquier orden) crea una función que para cualquier valor de entrada regresa el mismo valor. A esta función la llamamos "la función identidad".

La función y = x se denomina función identidad que pasa por el origen de coordenadas. Es la recta bisectriz del primer y tercer cuadrante tiene de pendiente m=1. Por tanto forma un ángulo de 45º con el eje de abcisas.

m = tg α = 1 α = arctg 1 = 45º = π/2

Con esta información, podemos evaluar la composición de las funciones inversas dadas.

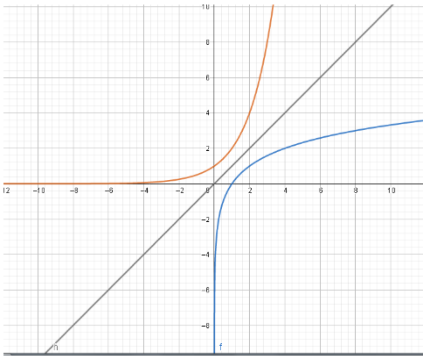
a) $f \ o \ g = 2^{\log_2 x}$ $\quad * \ Propiedad: a^{\log_a x} = x$

$f \ o \ g = x$ $\quad Función \ Identidad$

b) $g \ of = \log_2(2^x)$ $\quad * \ Propiedad \ Logaritmo \ de \ Potencia$

$g \ of = x \ . \underbrace{\log_2 2}_{1}$ $\quad * \ Propiedad: \log_a a = 1$

$gof \; = x \qquad Función\ Identidad$



Outro desarrollo

Solución

Sea a un número positivo con $a \neq 1$. La función logarítmica con base a, denotada por log_a, se define

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

Así, $\log_a x$ es el exponente al que se debe elevar la base a para dar x.

- $f(x) = 2^x$, $\mathbf{g(x) = \log_2 x}$

$$(f \ o \ g)(x) = f\big(\mathbf{g(x)}\big) = f(\mathbf{\log_2 x}) = 2^{\mathbf{\log_2 x}} = x$$

$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x \longrightarrow$ $\log_a x$ es el exponente al que se debe elevar la base a para dar x

- $\mathbf{f(x) = 2^x}$, $g(x) = \log_2 x$

$$(g \ o \ f)(x) = g\big(\mathbf{f(x)}\big) = g(2^x) = \log_2(2^x) = x$$

Por definición de logaritmos $\longrightarrow$ $\log_a x = b \iff a^b = x$

29. Sean f y g dos funciones con dominio R. Complete el cuadro indicando en cada caso si $f + g$ es par, impar o ninguna de las dos cosas. Justifique su respuesta.

	***g* es par**	***g* es impar**
***f* es par**	$f + g$ es	$f + g$ es ....
	$f.g$ es	$f.g$ es ....
	$f \ o \ g$ es	$f \ o \ g$ es ....
***f* es impar**	$f + g$ es......................	$f + g$ es......................
	$f.g$ es	$f.g$ es ....
	$f \ o \ g$ es	$f \ o \ g$ es ....

PARTE B:
Ejercicios Adicionales Cálculo

30. Sea $g(x) = x^2$ y sea $h(x) = \begin{cases} 0 & x\ racional \\ 1 & x\ irracional \end{cases}$

   a. ¿Para cuáles x se cumple qué $h(x) \le x$?

   b. ¿Para cuáles x se cumple qué $h(x) \le g(x)$?

   c. ¿Qué es $g(h(x)) - h(x)$?

   d. ¿Para cuáles x se cumple qué $g(g(x)) = g(x)$?

   Observación: Se deja para que el alumno desarrolle.

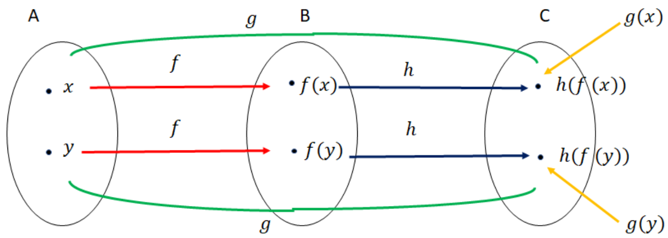
31. Supóngase que $g(x) = h(f(x))$ ó $g = h\ o\ f$. Demuestre que si $f(x) = f(y)$, entonces $g(x) \neq g(y)$.

Desarrollo:

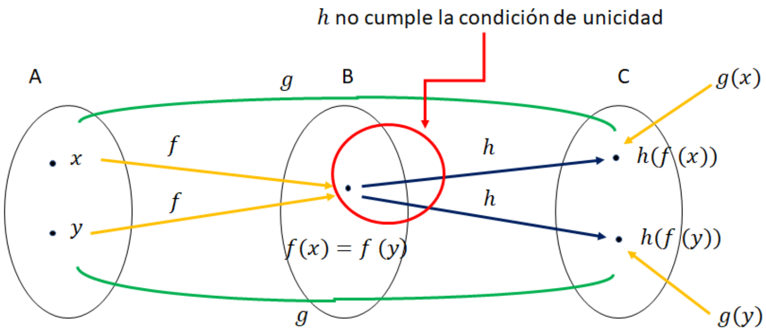
Comenzaremos diferenciando en el enunciado, los datos, de lo que hay que demostrar.
Datos: $g(x) = h(f(x))$ ó $g = h\ o\ f$, lo que hace suponer que tanto f, como g y como h son funciones.
A demostrar: Si $f(x) = f(y)$, entonces $g(x) \neq g(y)$. Esta sentencia tiene la forma de un Condicional Material. Demostrar este condicional es mostrar que es verdadero. La única posibilidad de ser falso es que la Hipótesis $f(x) = f(y)$ sea verdadera y la Tesis $g(x) \neq g(y)$ sea falsa.

Haremos un Diagrama de Euler-Venn, bajo las siguientes condiciones:

1. Tanto f, como g y como h son funciones.
2. Supondremos que f es Inyectiva, o Uno a Uno.
3. Suponemos, también, que la Tesis $g(x) \neq g(y)$, es Verdadera



Sobre este esquema, Supongamos Verdadera la Hipótesis $f(x) = f(y)$ y mantengamos Verdadera también la Tesis



Ahora, h no cumple la condición de unicidad. Luego h no es función, en contradicción con los datos.

Conclusión 1 El enunciado del ejercicio debería ser:

- Dadas f, g y h funciones, siendo f Uno a Uno y $g(x) = h(f(x))$.
  Demuestre que si $f(x) = f(y)$, entonces, $g(x) = g(y)$.

O puede expresarse también

- Si f, g y h son funciones, f uno a uno y $g(x) = h(f(x))$, entonces $g(x) = g(y)$.

Conclusión 2 Hubo un error de tipeo.

32. Sea $C(x) = x^2; P(x) = \frac{1}{x}$ y $S(x) = sen\,x$

    Determinar: $C\left(P\big(S(t)\big)\right) + S\left(P(t)\right)$

Solución

Calculemos separadamente cada término de la expresión.

$$C\left(P\big(S(t)\big)\right) \underbrace{=}_{S(x)=sin\,x} C\left(P(sen\,t)\right) \underbrace{=}_{P(x)=\frac{1}{x}} C\left(\frac{1}{sen\,t}\right) \underbrace{=}_{C(x)=x^2} \left(\frac{1}{sen\,t}\right)^2 = \frac{1}{sen^2 t} \qquad (1)$$

$$S\left(P(t)\right) \underbrace{=}_{P(x)=\frac{1}{x}} S\left(\frac{1}{t}\right) \underbrace{=}_{S(x)=sin\,x} sen\left(\frac{1}{t}\right) \qquad (2)$$

Sumando (1) y (2) tenemos:

$$C\left(P\big(S(t)\big)\right) + S\left(P(t)\right) = \frac{1}{sen^2 t} + sen\left(\frac{1}{t}\right)$$

33. Exprese cada una de las siguientes funciones en términos de *C, P, S.*

    a. $f(x) = \frac{1}{sin(x^2)}$ b. $f(u) = \left(sin\left(\frac{1}{u}\right)\right)^2$

Solución

a. $f(x) = \frac{1}{sin(x^2)} \underbrace{=}_{C(x)=x^2} \frac{1}{sin(C(x))} \underbrace{=}_{S(x)=sen\,x} \frac{1}{S(C(x))} = \frac{1}{(S \circ C)(x)}$

b. $f(u) = \left(sin\left(\frac{1}{u}\right)\right)^2 \underbrace{=}_{P(x)=\frac{1}{x}} \left(sin\big(P(u)\big)\right)^2 \underbrace{=}_{S(x)=sen\,x} \left(S\big(P(u)\big)\right)^2 \underbrace{=}_{C(x)=x^2} C\left(S\big(P(u)\big)\right)$

34. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Donde f, g y h son las funciones definidas en todo $\mathbb{R}$.

    A. Si f y g son pares, entonces $f + g$ es par.

    Recordando: Sea f una función. Decimos que

    $f\ es\ par \iff f(-x) = f(x)$, y que

    $f\ es\ impar \iff f(-x) = -f(x)$

    Como f y g son pares,

$f(-x) = f(x)$ (1) y

$g(-x) = g(x)$ (2)

Veamos cómo es $f + g$

$$(f+g)(-x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def. de suma} \\ \text{de funciones}}}{=} f(-x) + g(-x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(1) y (2)}}}{=} f(x) + g(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def. de suma} \\ \text{de funciones}}}{=} (f+g)(x)$$

por lo tanto $f + g$ es par. Luego A es Verdadera.

B. Si f es par y g es impar, entonces $f + g$ es impar.

Sabemos que

$f(-x) = f(x)$ f es par (1)

$g(-x) = -g(x)$ g es impar (2)

Veamos cómo es $f + g$

$$(f+g)(-x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def. de suma} \\ \text{de funciones}}}{=} f(-x) + g(-x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(1) y (2)}}}{=} f(x) + \big(-g(x)\big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Operaciones} \\ \text{entre funciones}}}{=} f(x) - g(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def. de suma} \\ \text{de funciones}}}{=} (f-g)(x)$$

Como $(f+g)(-x) = (f-g)(x) \neq (f+g)(x)$, $f + g$ no es par.

Por otro lado, como $(f+g)(-x) = (f-g)(x) \neq -(f+g)(x)$, $f + g$ no es impar

Por lo tanto, B es Falsa.

C. Si f y g son impares, entonces $f * g$ es par.

Siguiendo el procedimiento de los ítems A y B resuelva.

Ayuda: C es Verdadera

D. Si f y g son impares, entonces $f\,(g(x))$ es par.

Siguiendo el procedimiento de los ítems A y B resuelva.

Ayuda: D es Verdadera

E. La función $|f|$ es par.

- Complete los espacios con sus conclusiones

Vanos a suponer dos situaciones: f par y f impar

Si f es par: $|f(-x)| = |f(x)|$, entonces $|f|$ es ____________

Si f es impar: $|f(-x)| = |-f(x)| = |-1||f(x)| = |f(x)|$, entonces. __________

Podemos concluir que $|f|$ es ___________

F. La función $f(|fx|)$ es par.

- Complete los espacios con sus conclusiones

Si f es par: $f|f(-x)| = f|f(x)|$, entonces ____________

Si f es impar: $f|f(-x)| =$ ______________________________entonces. _________

Podemos concluir que $f(|f|)$ es ___________

G. $F(g+h) = f(g) + f(h).$

Sugerencia: Si no consigue "armar" una demostración que verifique la igualdad, busque un contraejemplo.

H. $\frac{1}{f(g)} = \frac{1}{f} * g$

Sugerencia: Si no consigue "armar" una demostración que verifique la igualdad, busque un contraejemplo.

35. Halle $\boldsymbol{f^{-1}}$ para cada una de las siguientes funciones, e indique su dominio.

a. $\begin{cases} x \ si \ \ x \in \mathbb{Q} \\ -x \ \ si \ x \ \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

b. $\begin{cases} -\frac{1}{2-x} \ si \ \ x \neq 2 \\ \ 0 \ \ si \ x = 2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} \frac{1}{2}x \ si \ \ x < 0 \\ 2x \ \ si \ x \ \geq 0 \end{cases}$