**Unidad 1: Sistemas de ecuaciones lineales**

**Introducción**

Una recta en el plano se puede representar algebraicamente mediante la ecuación lineal de la forma

a1x+a2y = b

en donde a1, a2 y b son escalares, x e y son variables.

En general, se define una **ecuación lineal** con n variables x1, x2, …, xn, como aquella que se puede expresar en la forma:

**a1x1+a2x2+…+anxn= b**

en donde a1, a2, …, an se llaman coeficientes y b el término independiente.

En las ecuaciones lineales las variables se presentan únicamente a la primera potencia, y no figuran como argumento de funciones trigonométricas o exponenciales.

Una solución de una ecuación lineal de la forma a1x1+a2x2+…+anxn = b, es una sucesión de n números s1, s2, …, sn, tales que la ecuación se satisface cuando se realiza la sustitución x1=s1, x2=s2, …, xn=sn.

Se denomina **conjunto solución** al conjunto formado por todas las soluciones de la ecuación dada.

* *Sugerencia: presentar como disparador el Ejercicio 9 o el 10.*

**Sistemas de ecuaciones lineales**

Un conjunto finito de ecuaciones lineales con las variables x1, x2, …, xn, se conoce como sistema de ecuaciones lineales o sistema lineal.

Un sistema arbitrario de **m** ecuaciones lineales con **n** incógnitas se puede representar de la siguiente manera:

****

En el cual x1, x2, …, xn corresponden a las variables o incógnitas del sistema, y las aij y las bi denotan escalares constantes. En este caso se dice que el sistema es de orden **mxn**.

Una sucesión de escalares s1, s2, …, sn es una solución del sistema si la sustitución x1=s1, x2=s2, …, xn=sn es una solución de toda ecuación en tal sistema. Un sistema de ecuaciones lineales puede admitir una **única solución** (conjunto solución unitario), o **infinitas soluciones** (conjunto solución infinito), o **carecer de solución** (conjunto solución vacío).

Se dice que dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si poseen el mismo conjunto solución.

* *Sugerencia: realizar algún ejemplo del Ejercicio 2*

**Representación matricial de sistemas de ecuaciones lineales**

Los sistemas de ecuaciones lineales de orden mxn, también se pueden representar en forma matricial, lo que favorece en ciertos casos a su notación y resolución.

Dado el sistema

****

Si llamamos matriz principal o de coeficientes a la matriz A = ****, matriz de incógnitas a la matriz X = **,**y matriz de los términos independientes a B= . Su representación matricial consiste en escribirlo de la siguiente manera:

**.=** 

Es decir, su forma matricial es: **A . X = B**

Se denomina matriz ampliada o aumentada del sistema, a la matriz A\* dada por:

****

****

**Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos**

Se denomina sistema de ecuaciones lineales homogéneo, al sistema que presenta la forma:

****

Es decir, cuando en la forma matricial A. X = B, B es la matriz nula. Los sistemas homogéneos admiten, por lo tanto, la notación matricial:

**A.X = 0**

Todo sistema de ecuaciones lineales admite solución. Si el conjunto solución está formado por x1=0, x2=0, …, xn=0 se dice que admite la **solución trivial**, y si existen otras soluciones no nulas, se dice que son **soluciones no triviales.**

Teorema

***Todo sistema de ecuaciones lineales no posee solución, posee solución única o infinitas soluciones.***

Demostración

Si A . X = B es un sistema de ecuaciones lineales dado en su forma matricial, exactamente una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

1. El sistema no posee solución
2. El sistema posee solución única
3. El sistema admite más de una solución. Se completa la demostración si se puede probar que el sistema tiene infinitas soluciones.

Suponiendo que el sistema A . X = B posee más de una solución y que X1 y X2 son dos soluciones diferentes. Por lo tanto, verifica:

AX1= B y también AX2 = B.

Al restar estas ecuaciones resulta: AX1-AX2 = B - B= 0

Luego aplicando propiedades matriciales, se puede escribir como: A.(X1- X2) =0

Si se considera X0 = X1-X2 y k un escalar cualquiera, entonces:

A(X1+kX0) = AX1+A(kX0) = AX1+k(AX0) = B +k.0 = B+0 =B

Luego: A(X1+kX0) = B

Se desprende que X1+kX0 , es una solución del sistema A . X = B, ya que existe una infinidad de valores que puede tomar k. Luego el sistema AX =B posee infinitas soluciones.

**Operaciones elementales entre filas**

Existen varios y diversos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Un método básico consiste en reemplazar el sistema dado por uno equivalente que posea el mismo conjunto solución, pero que sea más fácil de resolver. En general, este sistema nuevo se obtiene siguiendo una serie de pasos, es decir aplicando las operaciones elementales entre ecuaciones que consisten en:

* Multiplicar una de las ecuaciones por una constante no nula
* Intercambiar dos de las ecuaciones
* Sumar algebraicamente, un múltiplo de una de las ecuaciones a otra

Si utilizamos la notación matricial del sistema de ecuaciones, se podrán aplicar estas operaciones elementales a las filas de la matriz ampliada, que consisten en:

* Multiplicar a una de las filas por una constante no nula
* Intercambiar dos de las filas
* Sumar algebraicamente, un múltiplo de una de las filas a otra
* *Sugerencia: realizar algún ejemplo del Ejercicio 1*

**Matriz escalonada por filas y escalonada reducida por filas**

Dada una matriz A de orden mxn, llamamos **pivote** de una fila (columna) al primer elemento, no nulo, si existe, de dicha fila (columna). La matriz A se dice que es **escalonada reducida por filas** si verifica las siguientes condiciones:

1. Si una fila no consta completamente de ceros, entonces el primer elemento diferente de cero en la fila es un pivote.
2. Si existen flas que consten completamente de ceros, entonces se agrupan en la parte inferior de la matriz.
3. Si dos filas sucesivas no constan completamente de ceros, el pivote de la fila inferior se presenta más hacia la derecha que el pivote de la fila superior.
4. Cada columna que contenga un pivote tiene ceros en todas las demás posiciones.

Si una matriz verifica las condiciones 1, 2 y 3, se dice que está **escalonada por filas**.

**Método de Gauss- Jorda**n

El método de Gauss- Jordan es uno de los tantos métodos directos que se aplican para resolver un sistema de ecuaciones lineales. Consiste en reducir la matriz ampliada del sistema, a la forma **escalonada reducida**, la cual determina una forma lo suficientemente simple para que el sistema pueda resolverse por sustitución regresiva.

Dado el sistema de orden mxn

****

Y su matriz ampliada:



Para encontrar su forma **escalonada reducida**, se aplicarán sucesivamente las operaciones elementales entre filas hasta obtener la matriz del tipo:



Al elemento 1 que figura en la primera columna de la matriz, se lo denomina 1 **principal** o **elemento** **pivote**.

Aclaración:

La matriz escalonada por filas posee ceros debajo de cada pivote, en cambio la escalonada reducida por filas posee ceros tanto arriba y debajo de cada pivote.

Si, por una sucesión de operaciones elementales sobre las filas, la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales adquiere la forma escalonada reducida, entonces es posible obtener el conjunto solución para el sistema dado realizando sustituciones regresivas, en este proceso se basa el método de Gauss - Jordan. En cambio, el método de Gauss consiste en obtener la solución del sistema de ecuaciones lineales, cuando al aplicarle las operaciones elementales a su matriz ampliada, se la transforma en una escalonada por filas.

* *Sugerencia: realizar algún ejemplo del Ejercicio 3*

**Teorema de Rouché – Frobenius**

Este teorema permite analizar el tipo de solución que posee un sistema de ecuaciones lineales, considerando la noción de rango de la matriz principal, y del rango de la matriz ampliada.

(No daremos la demostración del Teorema porque se necesitan conceptos previos que todavía no hemos tratado).

Rango de una matriz

Dada una matriz de orden nxm, se puede definir el **rango** como la cantidad de filas no nulas que resultan al expresar dicha matriz en su forma escalonada reducida.

El teorema de Rouché – Frobeniusestablece que para que un sistema de ecuaciones lineales sea compatible (posea solución) es condición necesaria y suficiente que la matriz principal y la matriz ampliada posean el mismo rango. Por lo demás, el sistema constituido será compatible determinado si su rango coincide con el número de incógnitas, o será compatible indeterminado si posee un valor menor a tal número. Cuando el rango de ambas matrices es diferente, se dice que el sistema es incompatible (solución vacía).

Es decir, dado un sistema de ecuaciones lineales, si A es la matriz principal, A\* es la matriz ampliada y n es el número de incógnitas, se puede decir que:

* Si el rango (A) = rango (A\*) = n, el sistema es compatible determinado (solución única)
* Si el rango (A) = rango (A\*) < n, el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)
* Si el rango (A) ≠ rango (A\*), el sistema es incompatible (solución vacía)

Un caso particular es el de los sistemas homogéneos. En este caso, las matrices A  y  A\*  son  semejantes a efectos del cálculo del rango. Por lo tanto, siempre se cumple que rango (A) = rango (A\*). Esto quiere decir que todos los sistemas homogéneos son siempre compatibles. Es decir:

* Si el rango (A) = rango (A\*) = n, el sistema es compatible determinado (solución trivial)
* Si el rango (A) = rango (A\*) < n, el sistema es compatible indeterminado (solución no trivial)
* *Sugerencia: realizar algún ejemplo del Ejercicio 4*

**Regla de Cramer**

Consiste en uno de los métodos directos que se utiliza para obtener la solución de un sistema de ecuaciones lineales de orden nxn. Si A.X = B es un sistema de ecuaciones lineales tal que el determinante de A es no nulo, entonces el sistema posee una única solución dada por:

 , , ….., 

En donde Aj es la matriz que se obtiene al reemplazar los elementos de la j-ésima columna de A por los elementos de la matriz B.

* *Sugerencia: realizar algún ejemplo del Ejercicio 12*