**TP3 Ejercicio 1 a**

Resolver Ax=b donde $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\ 10\\ 3\end{pmatrix}$

**Utilizando eliminación de Gauss:**

**Fase de eliminación**

Primera pasada

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=\frac{A_{21}}{A_{11}}=\frac{-2}{-1}=2, \lambda_2=\frac{A_{31}}{A_{11}}=\frac{-3}{1}=-3$$

$$A'=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ -2-(2)(-1)=0 & 1-(2)(1)=-1 & 3-(2)(-1)=5\\ 3-(-3)(-1)=0 & 1-(-3)(1)=4 & 2-(-3)(-1)=-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 4 & -1\end{bmatrix}$$

$$b'=\begin{pmatrix}1\\ 10-(2)(1)=8\\ 3-(-3)(1)=6\end{pmatrix}$$

Segunda pasada

$$A'=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 4 & -1\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=\frac{A'_{32}}{A'_{22}}=\frac{4}{-1}=-4$$

$$A''=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 4-(-4)(-1)=0 & -1-(-4)(5)=19\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 19\end{bmatrix}$$

$$b''=\begin{pmatrix}1\\ 8\\ 6-(-4)(8)=38\end{pmatrix}$$

**Fase de solución:**

$$A''=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 19\end{bmatrix}, b''=\begin{pmatrix}1\\ 8\\ 38\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 19\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 8\\ 38\end{pmatrix}$$

Esquema hacia atrás

$19x_3=38 \rightarrow x_3=2$

$-1x_2+5x_3=8 \rightarrow x_2=\frac{(8-5(2))}{(-1)}=2$

$-1x_1+1x_2-1x_3=1 \rightarrow x_1=\frac{(1+1(2)-1(2))}{(-1)}=-1$

**Utilizando descomposición LU de Doolittle**

Primera pasada

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=\frac{A_{21}}{A_{11}}=\frac{-2}{-1}=2=L_{21},\lambda_2=\frac{A_{31}}{A_{11}}=\frac{-3}{1}=-3=L_{31}$$

$$A'=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ -2-(2)(-1)=0 & 1-(2)(1)=-1 & 3-(2)(-1)=5\\ 3-(-3)(-1)=0 & 1-(-3)(1)=4 & 2-(-3)(-1)=-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 4 & -1\end{bmatrix}$$

Segunda pasada

$$A'=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 4 & -1\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=\frac{A'_{32}}{A'_{22}}=\frac{4}{-1}=-4=L_{23}$$

$$A''=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 4-(-4)(-1)=0 & -1-(-4)(5)=19\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 19\end{bmatrix}=U$$

$$L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \lambda_1=2 & 1 & 0\\ \lambda_2=-3 & \lambda_3=-4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -3 & -4 & 1\end{bmatrix}$$

**Fase de Solución:**

$A\,x=(L\,U)x=L\,y=b$ ,donde $y=U\,x$

$$U=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 19\end{bmatrix},L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -3 & -4 & 1\end{bmatrix}$$

Substitución progresiva

$$L\,y=b\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -3 & -4 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 10\\ 3\end{pmatrix}$$

$y_1=1$

$2(1)+1\,y_2=10\rightarrow y_2=10-2=8$

$-3(1)-4(8)+1\,y_3=3\rightarrow y_3=38$

Substitución regresiva

$$U\,x=y\rightarrow\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 19\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 8\\ 38\end{pmatrix}$$

$x_3=\frac{38}{19}=2$

$-1\,x_2+5(2)=8\rightarrow x_2=2$

$-1\,x_1+1(2)-1(2)=1\rightarrow x_1=-1$

**Utilizando Octave y comando "lu"**

**Cuidado**: Octave **realiza una permutación de las filas** previo a la descomposición para optimizar el proceso, para ver el orden de las filas que utiliza, se debe llamar la función utilizando [L,U,p]=lu(A), donde las variables L y U guardan las matrices triangulares y p guarda el orden de permutaciones.

```
>> A=[-1,1,-1;-2,1,3;3,1,2]
A =

  -1   1  -1
  -2   1   3
   3   1   2

>> [L,U,p]=lu(A)
L =

   1.00000   0.00000   0.00000
  -0.66667   1.00000   0.00000
  -0.33333   0.80000   1.00000

U =

   3.00000   1.00000   2.00000
   0.00000   1.66667   4.33333
   0.00000   0.00000  -3.80000

p =

Permutation Matrix

   0   0   1
   0   1   0
   1   0   0
```

En este caso, la primera fila se permuta con la tercera. Por lo tanto Octave descompuso la matriz Ap en vez de la matriz A.
Para verificar, a continuación descomponemos la matriz Ap.

$$Ap=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 3\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=\frac{Ap_{21}}{Ap_{11}}=-\frac{2}{3},\lambda_2=\frac{Ap_{31}}{Ap_{11}}=-\frac{1}{3}$$

$$Ap'=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 1-(-2/3)(1)=5/3 & 3-(-2/3)(2)=13/3\\ 0 & 1-(-1/3)(1)=4/3 & -1-(-1/3)(2)=-1/3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 1{,}6667 & 4{,}3333\\ 0 & 1{,}3333 & -0{,}3333\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=\frac{Ap'_{32}}{Ap'_{22}}=\frac{4}{5}=0{,}8$$

$$Ap''=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 1{,}6667 & 4{,}3333\\ 0 & 4/3-(4/5)(5/3)=0 & -1/3-(4/5)(13/3)=-3{,}8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 1{,}6667 & 4{,}3333\\ 0 & 0 & -3{,}8\end{bmatrix}=U$$