UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Naturaleza - Ciencia - Humanismo

TEOREMAS Y DEFINICIONES

Elementos de Cálculo I

CÁLCULO ANALÍTICO DE LÍMITES

Algunos límites básicos:

a) $\lim\limits_{x \to c} k = k$ b) $\lim\limits_{x \to c} x = c$ c) $\lim\limits_{x \to c} x^n = c^n$

Propiedades de los límites

Si b y c son números reales y n un entero positivo, f y g son funciones con los límites siguientes:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c} g(x) = K$$

1. **Múltiplo escalar:** $\lim\limits_{x \to c}[b.f(x)] = b.L$

2. **Suma o diferencia:** $\lim\limits_{x \to c}[f(x) \pm g(x)] = L \pm K$

3. **Producto:** $\lim\limits_{x \to c}[f(x).g(x)] = LK$

4. **Cociente:** $\lim\limits_{x \to c}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{K}{L}$, siempre que $K \neq 0$

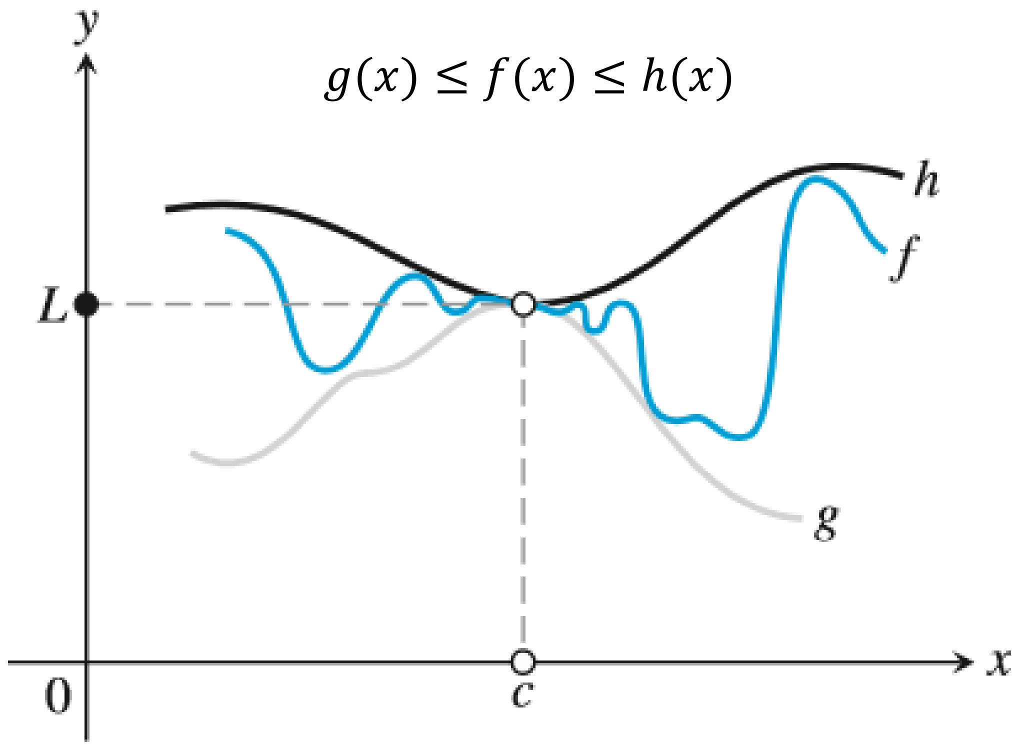
5. **Potencias:** $\lim\limits_{x \to c}[f(x)]^n = L^n$

Teorema del Encaje o del Emparedado o de la compresión

Si $\boldsymbol{g(x) \leq f(x) \leq h(x)}$ para todos los x en un intervalo abierto que contiene a c, por la posible excepción de la propia c, y si:

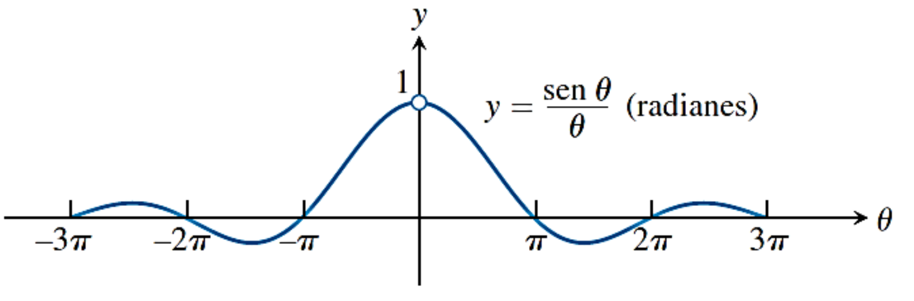
$$\boldsymbol{\lim_{x \to c} h(x) = L = \lim_{x \to c} g(x)}$$

entonces el $\lim_{x \to c} f(x)$ existe y es igual a L.



Límites Notables

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{sen\ \theta}{\theta} = 1 \quad (\theta \text{ en radianes})$$



$$\lim_{h \to 0} \frac{cos\ (h) - 1}{h} = 0 \quad (h \text{ en radianes})$$

LÍMITES LATERALES

TEOREMA: Una función $f(x)$ tiene un límite cuando $x \longrightarrow c$ si y sólo si ahí tiene límites por la derecha y por la izquierda, y además si estos límites laterales son iguales:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \iff \lim_{x \to c^-} f(x) = L \quad y \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

ASÍNTOTA VERTICAL

DEFINICIÓN: Una recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de una función $y = f(x)$ si:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad o \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

ASÍNTOTA HORIZONAL

DEFINICIÓN

Una recta y=b es una asíntota horizontal de la gráfica de una función $y = f(x)$ si:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

ASÍNTOTA OBLICUA

Si el grado del numerador de una función racional difiere del grado del denominador en 1, la gráfica tiene una **asíntota oblicua o inclinada**. Al dividir el numerador entre el denominador determinamos una ecuación para expresar f como una función lineal, más un residuo que tiende a cero cuando $x \to \pm\infty$.

Para expresar f se utiliza:

$$f(x) = C(x) \cdot d(x) + R(x)$$

$$\frac{f(x)}{d(x)} = \underbrace{C(x)}_{\text{Función lineal}} + \underbrace{\frac{R(x)}{d(x)}}_{\text{Residuo}}$$

CONTINUIDAD

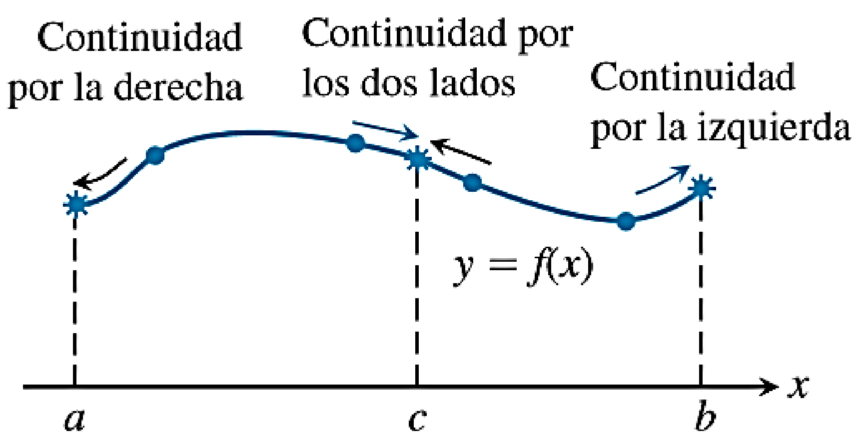
DEFINICIÓN

Punto interior: Una función $y = f(x)$ es continua en un punto interior c de su dominio si:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Punto extremo: Una función $y = f(x)$ es continua en un extremo izquierdo a o es continua en un extremo derecho b de su dominio si:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b), \text{ respectivamente.}$$



DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD

Continuidad en un punto: Una función f es continua en c si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

1. $f(c)$ está definida.

2. $\lim_{x \to c} f(x)$ existe.

3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Continuidad en un intervalo abierto: Una función es **continua en un intervalo abierto** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ si es continua en cada punto del intervalo. Una función continua en la recta real, $(-\infty, +\infty)$ es **continua en todas partes**.

Continuidad en un intervalo cerrado: Una función f es **continua en un intervalo cerrado** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ si es continua en el intervalo abierto $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ y

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

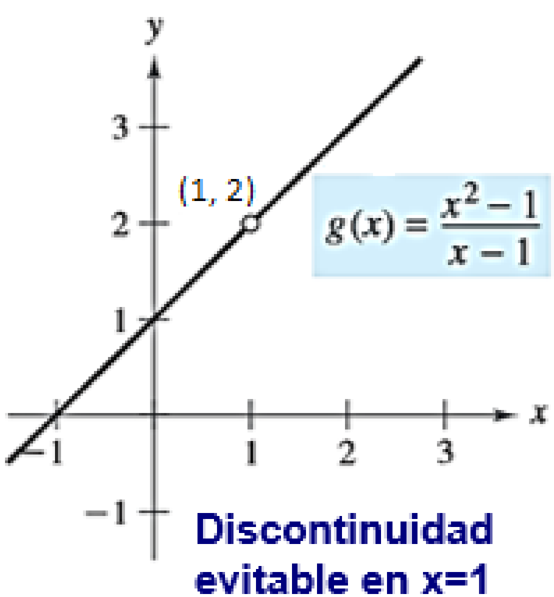
La función f es continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b.

Si una función f no es continua en un punto c, se dice que f es **discontinua** en c, y que c es un punto de discontinuidad de f (c no necesita estar en el dominio de f).

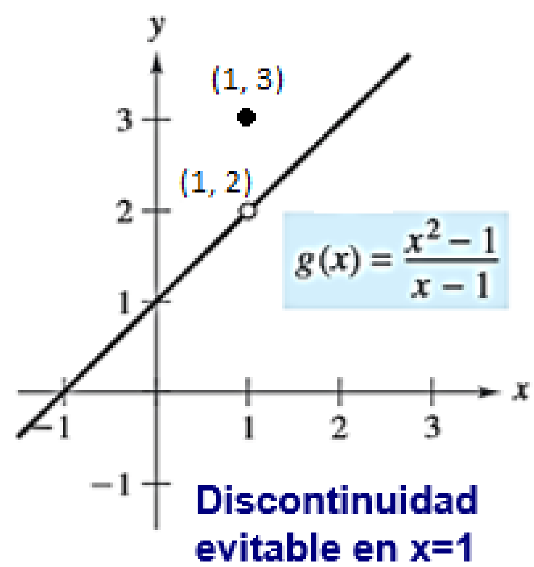
TIPOS DE DISCONTINUIDAD

Evitable o removible

Se cumple la 2^{da} condición de continuidad (existencia del límite) pero puede ocurrir que la 1^{era} o 3^{ra} condición no se cumplan ($f(c)$ no está definida o bien $f(c) \neq \lim_{x \to c} f(x)$) .



$f(c)$ no está definida

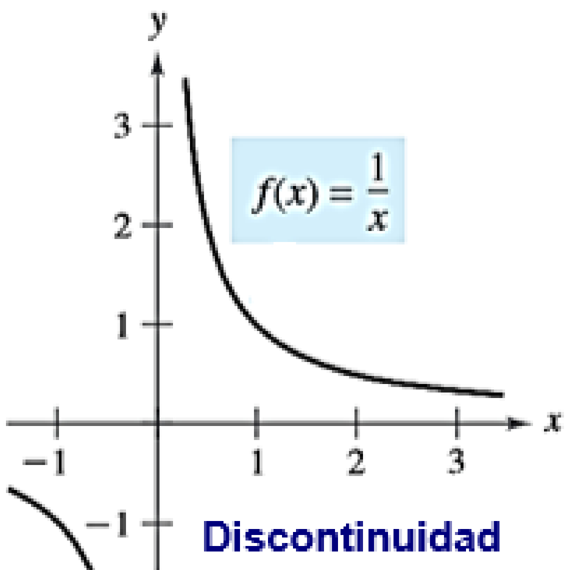


$f(c) \neq \lim_{x \to c} f(x)$

TIPOS DE DISCONTINUIDAD

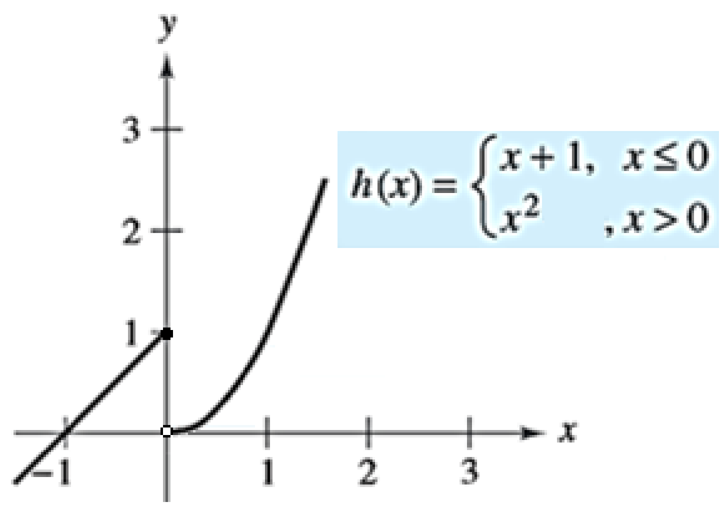
Inevitable o no removible

No se cumple la 2da condición de continuidad (existencia del límite) pudiendo tratarse de límites laterales distintos o bien límites infinitos.



Discontinuidad inevitable en x=0

$$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$$



$\lim_{x \to c} f(x)$ no existe dado que: $\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$

PROPIEDADES DE LA CONTINUIDAD

Si b es un número real y f y g son continuas en $x = c$, entonces las siguientes combinaciones son continuas en c:

1. **Múltiplo escalar**: bf, para cualquier número b
2. **Suma y diferencia**: $f \pm g$
3. **Producto**: fg
4. **Cociente**: $\frac{f}{g}$, si $g(c) \neq 0$
5. **Potencias:** f^n, donde n es un entero positivo
6. **Raíces:** $\sqrt[n]{f}$, siempre que esté definida en un intervalo que contenga a c, donde n es un entero positivo.

¿Qué funciones son continuas en todos sus dominios?

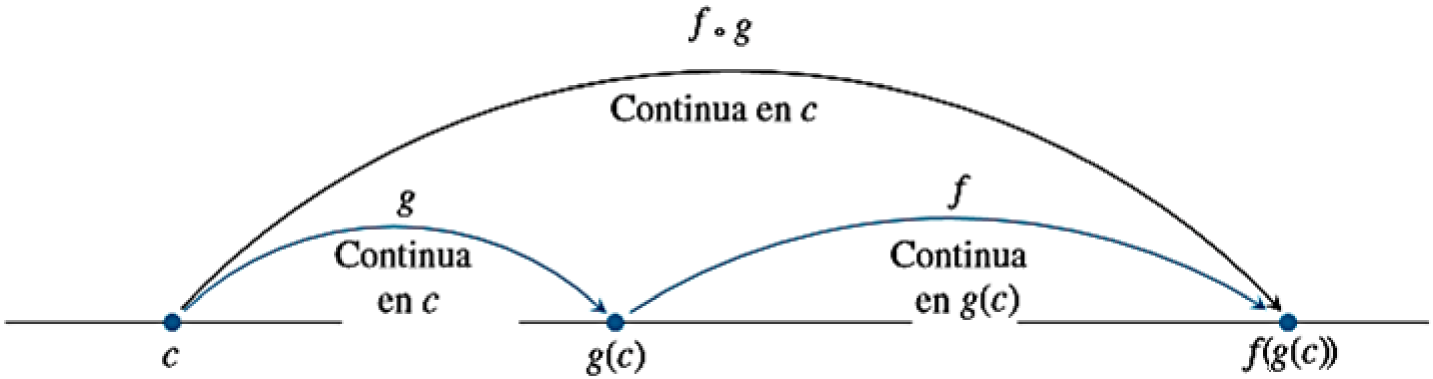
Polinomiales: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Racionales: $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, q(x) \neq 0$

Trigonométricas: $sen\ x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, cosec\ x$

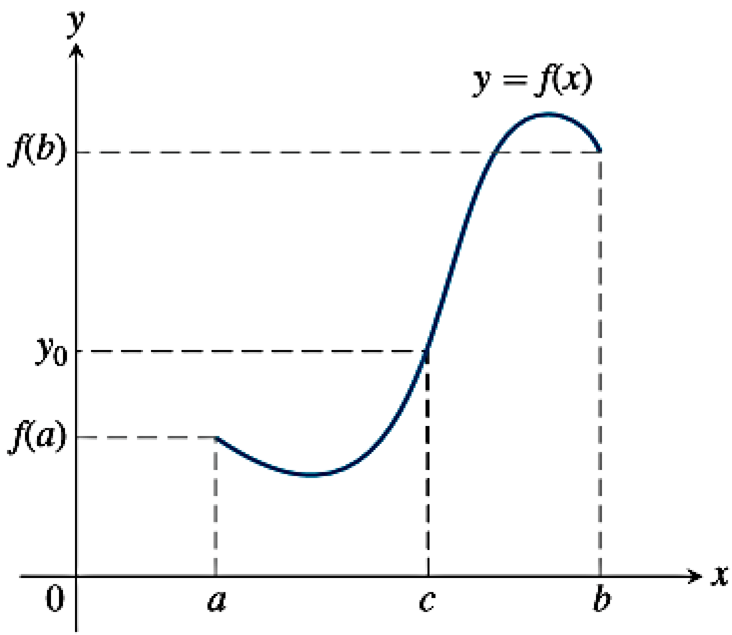
CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

Si g es continua en c y f es continua en $g(c)$, entonces la función compuesta dada por $(f o g)(x) = f(g(x))$ es continua en c.



TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO PARA FUNCIONES CONTINUAS

Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y si y_0 es cualquier valor entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces $y_0 = f(c)$ para algún c en $[a, b]$.



Geométricamente, el teorema del valor intermedio indica que cualquier recta horizontal $y = y_0$ que cruza el eje y entre los números $f(a)$ y $f(b)$ cruzará la curva $y = f(x)$ al menos una vez en el intervalo $[a, b]$.

TEOREMA DE BOLZANO (corolario del Teorema del valor medio)

COROLARIO

Localización de ceros de una función continua en un intervalo cerrado: si f es continua en [a, b] y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signo distinto, entonces el teorema nos garantiza la existencia de por lo menos un cero de f en el intervalo cerrado [a, b].

Reglas de Derivación

Derivada de una función constante:

Si $f(x) = c \Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = f'(x) = 0$

Derivada de una función potencia:

Si $f(x) = x^n \Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = f'(x) = nx^{n-1}$

Para toda x donde las potencias x^n y x^{n-1} estén definidas.

Derivada de un múltiplo constante:

Si $f(x)$ es una función derivable de x y c una constante, entonces:

$$\frac{d(c.f(x))}{dx} = \mathrm{c} \cdot \frac{df(x)}{dx} = \mathrm{c} \cdot f'(x)$$

En particular, si $n \in \mathbb{R}$: $\frac{d(c.x^n)}{dx} = cnx^{n-1}$

Derivada de una suma/resta de funciones:

Si f y g son funciones derivables de x, entonces su suma $f \pm g$ es derivable en cada punto donde tanto f como g son derivables. En tales puntos:

$$\frac{\boldsymbol{d(f \pm g)}}{\boldsymbol{dx}} = \frac{\boldsymbol{df}}{\boldsymbol{dx}} \pm \frac{\boldsymbol{dg}}{\boldsymbol{dx}} = \boldsymbol{f'(x) \pm g'(x)}$$

Derivada de un producto de funciones:

Si f y g son funciones derivables de x, entonces también lo es su producto $f \cdot g$ y:

$$\frac{\boldsymbol{d(f.g)}}{\boldsymbol{dx}} = \boldsymbol{f}\frac{\boldsymbol{dg}}{\boldsymbol{dx}} + \boldsymbol{g}\frac{\boldsymbol{df}}{\boldsymbol{dx}} = \boldsymbol{f(x)g'(x) + g(x)f'(x)}$$

Derivada del cociente de funciones:

Si f y g son funciones derivables de x, y si $g(x) \neq 0$ entonces el cociente f/g es derivable en x:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Derivada de la función seno: $\frac{d}{dx}(sen\ x) = cos\ x$

Derivada de la función coseno: $\frac{d}{dx}(cos\ x) = -sen\ x$

Regla de la Cadena

Si $f(u)$ es derivable en el punto $u = g(x)$, y $g(x)$ es derivable en x, entonces la función compuesta $(fog)(x) = f(g(x))$ es derivable en x y:

$$(fog)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

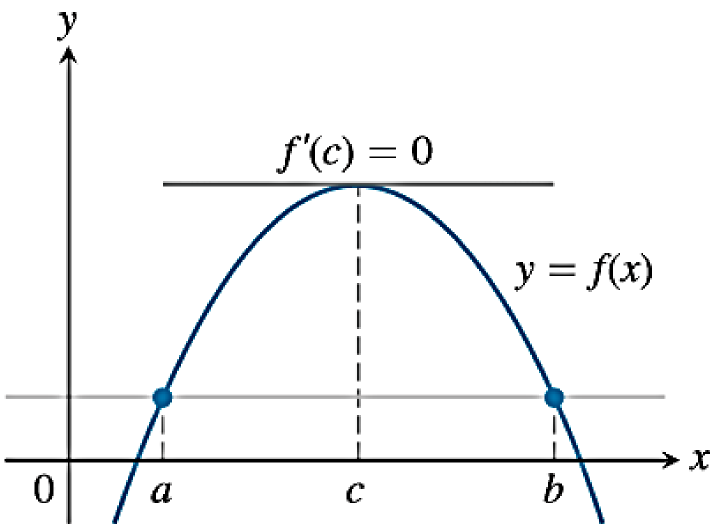
En notación de Leibniz, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, entonces:

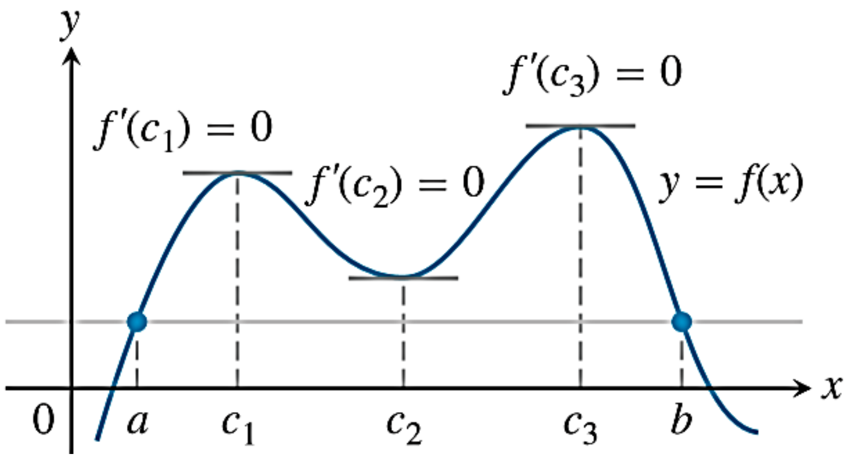
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

donde $\frac{dy}{du}$ se evalúa en $u = g(x)$.

Teorema de Rolle

Suponga que $y = f(x)$ es continua en todo punto del intervalo cerrado $[a, b]$ y es derivable en todo punto de su interior (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un número c en (a, b) en el que $f'(c) = 0$.





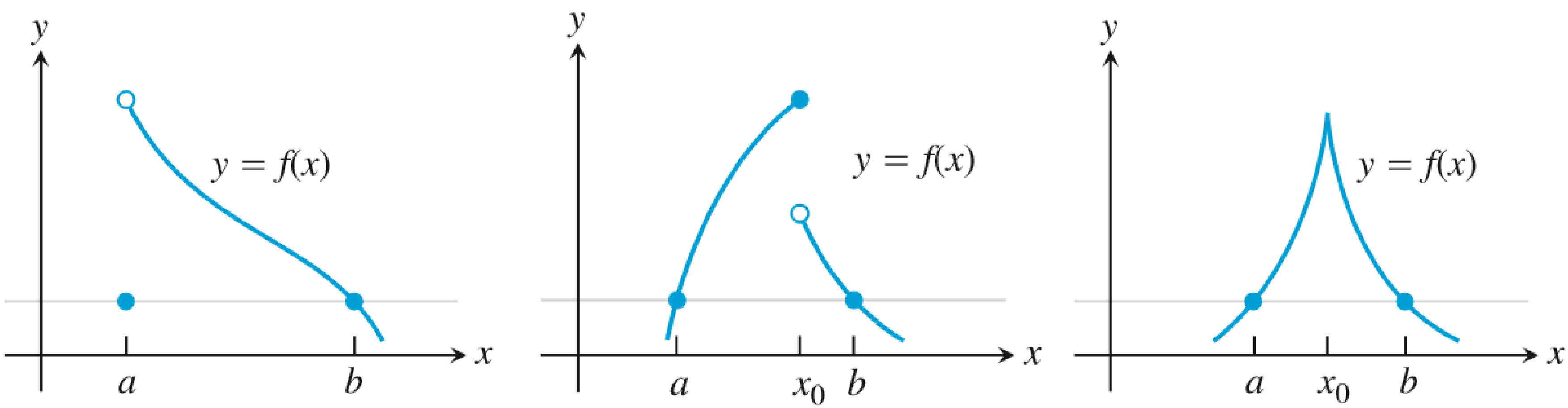
Hipótesis: f es continua en $[a, b]$

f es derivable en (a, b)

$f(a) = f(b)$

Tesis: Existe $c \in (a, b) / f'(c) = 0$

Las hipótesis del Teorema de Rolle (continuidad y derivabilidad) deben cumplirse para que sea válida su aplicación.



(a) Discontinuidad en un extremo del intervalo $[a, b]$

(b) Discontinuidad en un punto interior de $[a, b]$

(c) Continua en $[a, b]$, pero no diferenciable en un punto

Teorema del valor medio (Teorema de Lagrange)

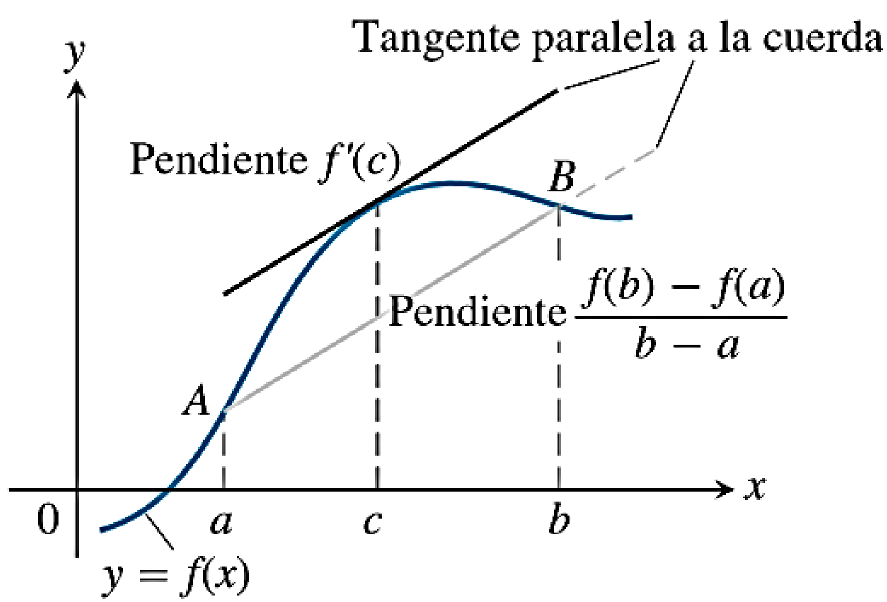
Suponga que $y = f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y es derivable en todo punto de su interior (a, b). Entonces existe al menos un punto c en (a, b) en el que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Hipótesis: f continua en $[a, b]$

f derivable en (a, b)

Tesis: Existe $c \in (a, b) \; / \; f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



CONSECUENCIAS MATEMÁTICAS

COROLARIO 1

Si $f'(x) = 0$ en cada punto x de un intervalo abierto (a, b), entonces $f(x) = C$ para toda $x \in (a, b)$, donde C es una constante.

COROLARIO 2

Si $f'(x) = g'(x)$ en cada punto x de un intervalo abierto (a, b), entonces existe una constante C tal que $f(x) = g(x) + C$ para toda $x \in (a, b)$. Esto es $f - g$ es una función constante en (a, b).

Teorema del valor medio de Cauchy

Suponga que las funciones f y g son continuas en $[a, b]$ y derivables en todo el intervalo (a, b), también suponga que $g'(x) \neq 0$ en (a, b). Entonces existe un número c en (a, b) en el que:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Hipótesis: f y g continuas en $[a, b]$

f y g derivables en (a, b)

Para todo $x \in (a, b)$: $g'(x) \neq 0$

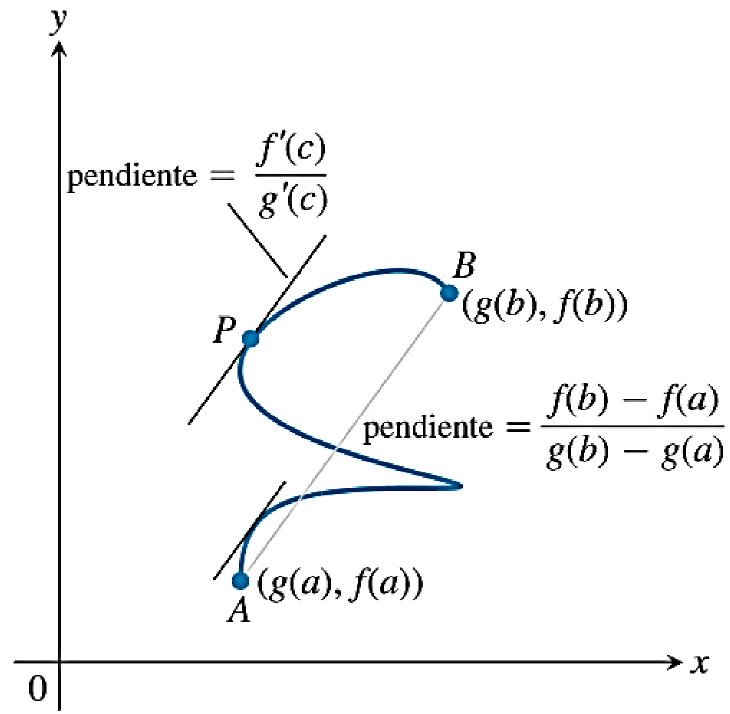
Tesis: Existe $c \in (a, b)$ / $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Interpretación geométrica del teorema de Cauchy

Para una curva general C en el plano que une a los dos puntos $A = (g(a), f(a))$ y $B = (g(b), f(b))$, la pendiente de la recta secante que une a los puntos A y B es paralela a la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto P de la misma. La pendiente de esa recta tangente resulta ser el cociente f'/g', evaluado en el número c en el intervalo (a, b). Puesto que la pendiente de la recta secante que une a A y B es:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

La ecuación en el teorema del valor medio de Cauchy dice que la pendiente de la recta tangente es igual a la pendiente de la secante.



TEOREMA: Regla de L'Hôspital

Suponga que $f(a) = g(a) = 0$, que f y g son derivables en un intervalo abierto I que contiene a a, y que $g'(x) \neq 0$ en I si $x \neq a$. Así,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

suponiendo que existe el límite de la derecha de esta ecuación.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL (PARTE I)

Si f es continua en $[a,b]$, entonces la función $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), y su derivada es $f(x)$:

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right]=f(x)$$

Hipótesis:

f es continua en $[a,b]$

Tesis:

F es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y

$$F'(x)=\frac{d}{dx}[F(x)]=\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right]=f(x)$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL (PARTE II)

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y F es una antiderivada de f en el intervalo $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Hipótesis:

f es continua en $[a, b]$

F es una antiderivada de f en $[a, b]$

Tesis:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Área de una región entre dos curvas

DEFINICIÓN DEL ÁREA DE UNA REGIÓN ENTRE DOS CURVAS

Si f y g son continuas en $[a, b]$ y $g(x) \leq f(x)$ para todo x en $[a, b]$, entonces el área de la región acotada por las gráficas de f y g y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es:

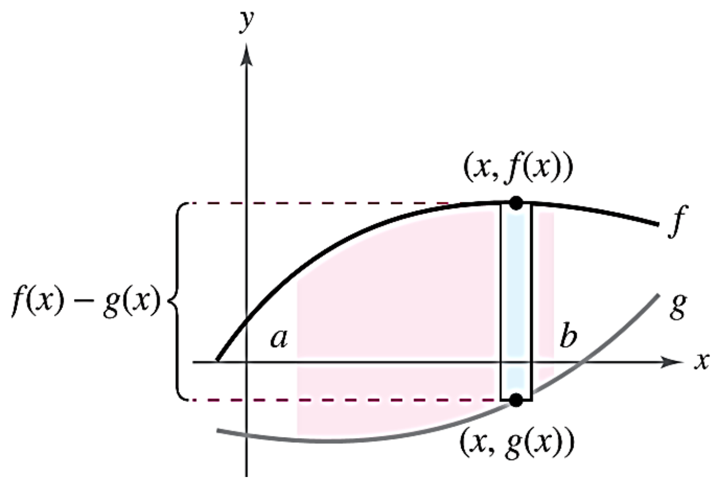
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

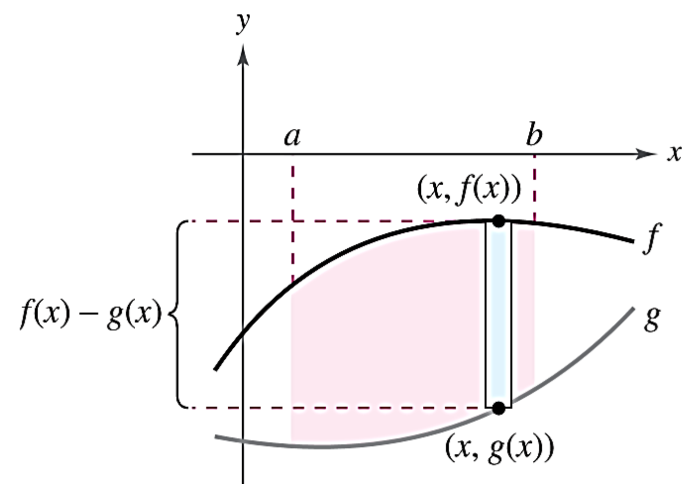
Hipótesis:

$f(x)$ y $g(x)$ continuas en $[a, b]$

$g(x) \leq f(x)$ para todo x en $[a, b]$

Tesis: $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$





Si la **gráfica de una función de y** es una frontera de una región, es a menudo conveniente usar **rectángulos** representativos **horizontales** y encontrar el área integrando en la variable y. En general, para determinar el área entre dos curvas, se usan:

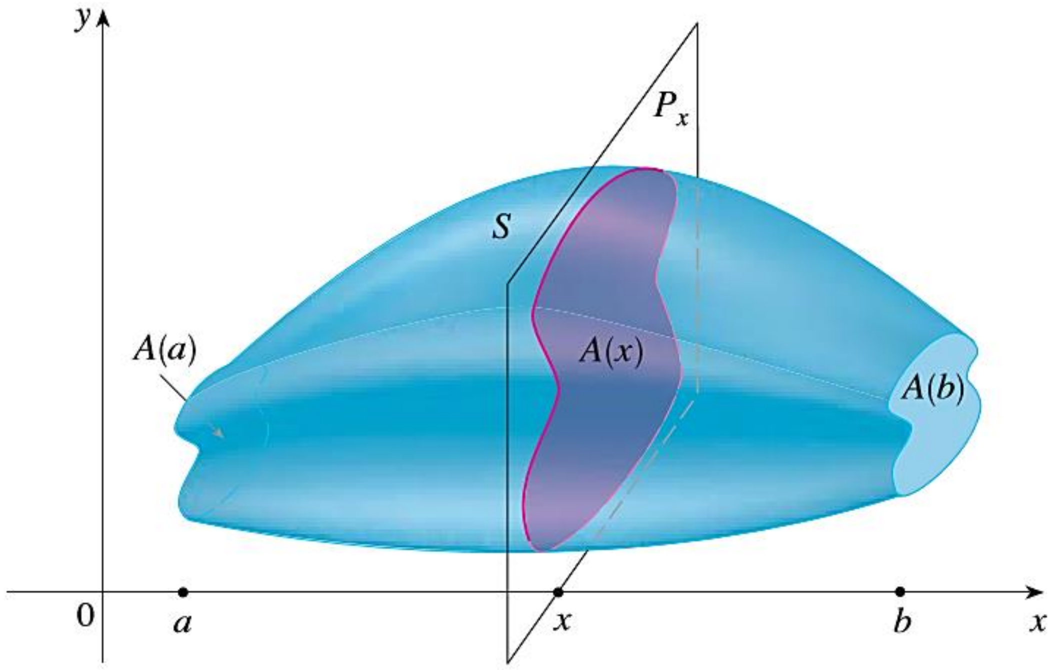
$$A = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{[(\text{curva de arriba}) - (\text{curva de abajo})]}_{\text{en la variable } x}\, dx \qquad \text{Rectángulos verticales.}$$

$$A = \int_{y_1}^{y_2} \underbrace{[(\text{curva derecha}) - (\text{curva izquierda})]}_{\text{en la variable } y}\, dy \qquad \text{Rectángulos horizontales.}$$

donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son los puntos adyacentes de intersección de las dos curvas implicadas o puntos sobre las rectas de la frontera especificadas.

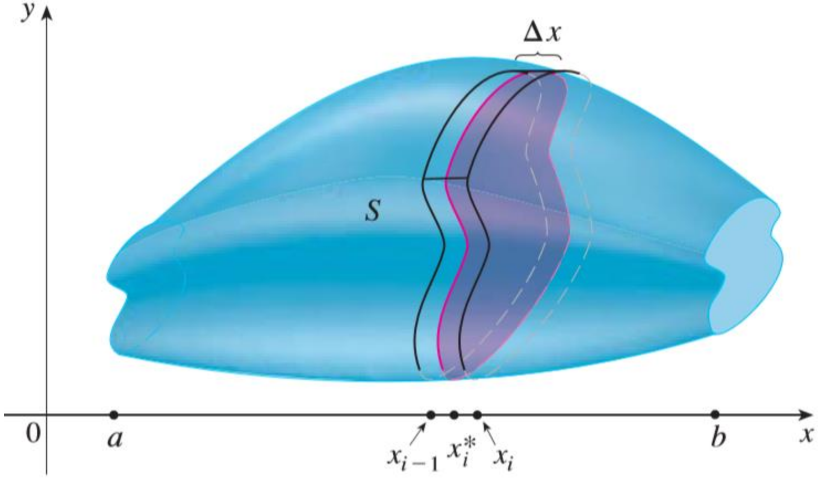
Método de Rebanadas por planos paralelos

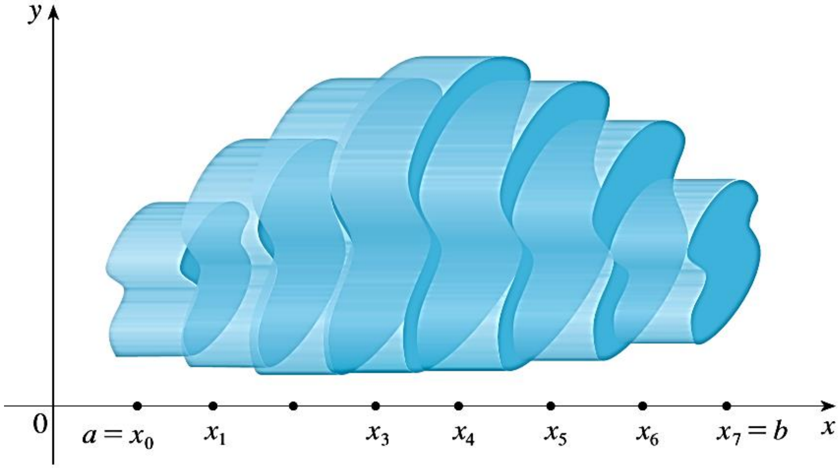
Cálculo de volúmenes por el método de las rebanadas mediante planos paralelos



Se inicia cortando a S con un plano y obteniendo una región plana que se denomina sección transversal de S. Sea $A(x)$ el área de la sección transversal de S en un plano P_x perpendicular al eje x, y que pasa por el punto x, donde $a \leq x \leq b$. El área de la sección transversal $A(x)$ variará cuando x se incrementa desde a hasta b.

Dividimos S en n "rebanadas" del mismo ancho Δx mediante los planos $P_{x_1}, P_{x_2}, \ldots$. Se eligen puntos muestra x_i^* en $[x_{i-1}, x_i]$ para tener un valor aproximado de la i-ésima rebanada S_i, por un cilindro cuya base tiene un área $A(x_i^*)$ y "altura" Δx.





El volumen de este cilindro es $A(x_i^*)\Delta x$ de modo que una aproximación a la concepción intuitiva del volumen de la i-ésima rebanada S_i es:

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\Delta x$$

Al sumar los volúmenes de estas rebanadas, se obtiene un valor aproximado del volumen total:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x$$

Si las rebanadas son cada vez más delgadas ($n \to \infty$), se tiene una mejor aproximación. Se define el volumen como el límite de estas sumas cuando $n \to \infty$:

Definición de volumen: Sea S un sólido que está entre $x = a$ y $x = b$. Si el área del a sección transversal de S en el Plano P_x, a través de x y perpendicular al eje x, es $A(x)$, donde A es una función continua, entonces el volumen de S está dado por:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x = \int_a^b A(x)dx$$

Método de Discos

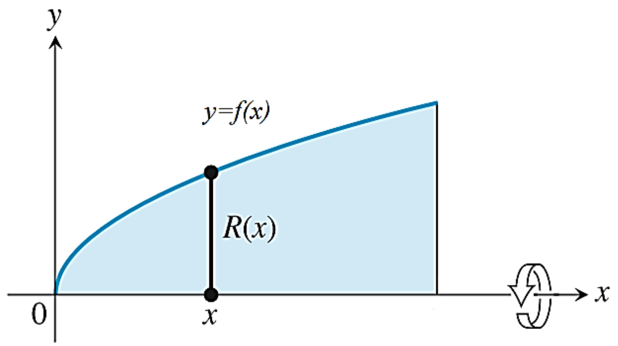
El sólido generado al hacer girar una región plana alrededor de un eje se denomina sólido de revolución. Para determinar el volumen de este tipo de sólidos es necesario observar que el área de la sección transversal $A(x)$ es el área de un disco de radio $R(x)$, la distancia de la frontera de la región plana al eje de revolución.

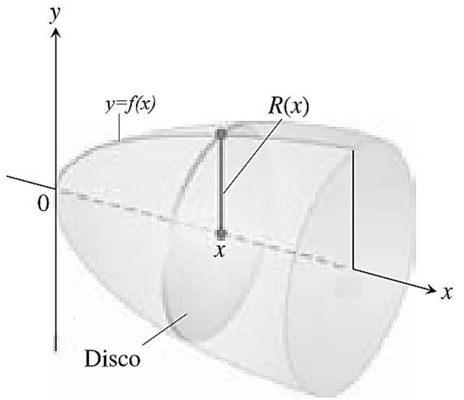
$$\boldsymbol{A(x) = \pi(radio)^2 = \pi[R(x)]^2}$$

En este caso la definición de volumen da:

Volumen por medio de discos al girar alrededor del eje x:

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \pi[R(x)]^2 dx$$





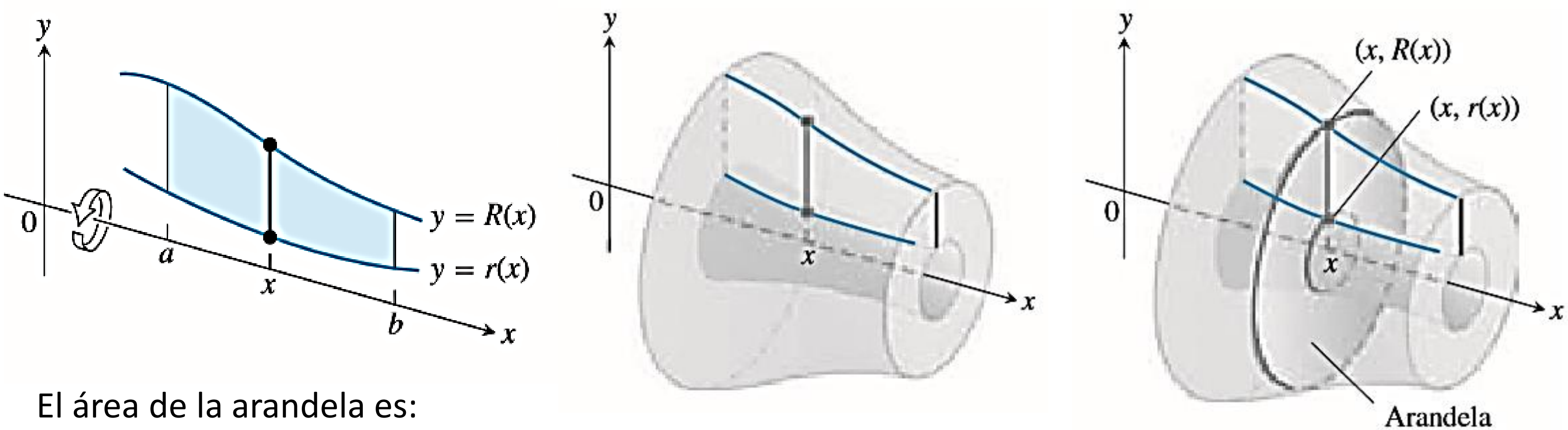
Volumen por medio de discos al girar alrededor del eje y:

$$V = \int_c^d A(y)dy = \int_c^d \pi[R(y)]^2 dy$$

Método de las arandelas

Si la región que gira para generar un sólido no cruza o no hace frontera con el eje de revolución, el sólido tendrá un agujero. Las secciones transversales perpendiculares al eje de revolución son arandelas. Las dimensiones de una arandela representativa son:

Radio exterior $R(x)$
Radio interior $r(x)$



El área de la arandela es:

$$A(x) = \pi\,[R(x)]^2 - \pi\,[r(x)]^2 = \pi\big([R(x)]^2 - [r(x)]^2\big)$$

En consecuencia, la definición de volumen da:

Volumen mediante arandelas para rotación alrededor del eje x:

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \pi\big([R(x)]^2 - [r(x)]^2\big)dx$$

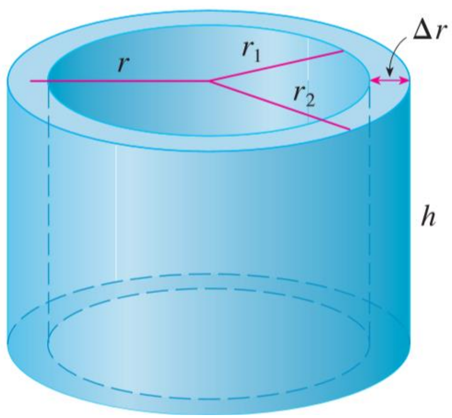
Volumen mediante arandelas para rotación alrededor del eje y:

$$V = \int_c^d A(y)dy = \int_c^d \pi\big([R(y)]^2 - [r(y)]^2\big)dy$$

Método de cascarones cilíndricos

Luego de hacer girar una curva f alrededor de un eje, en este caso y, para generar un sólido de revolución, se puede hallar su volumen aproximando la región con rectángulos con base en una partición P del intervalo cerrado $[a, b]$ donde se encuentra la región .

En la figura siguiente se ilustra un cascarón cilíndrico de radio interior r_1, radio exterior r_2 y altura h. Su volumen V se calcula como:



$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1 = \left(\pi \boldsymbol{r}_2^2 - \boldsymbol{\pi r}_1^2\right)\boldsymbol{h}$$

$$= \boldsymbol{\pi}\left(\boldsymbol{r}_2^2 - \boldsymbol{r}_1^2\right)\boldsymbol{h} = \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$$

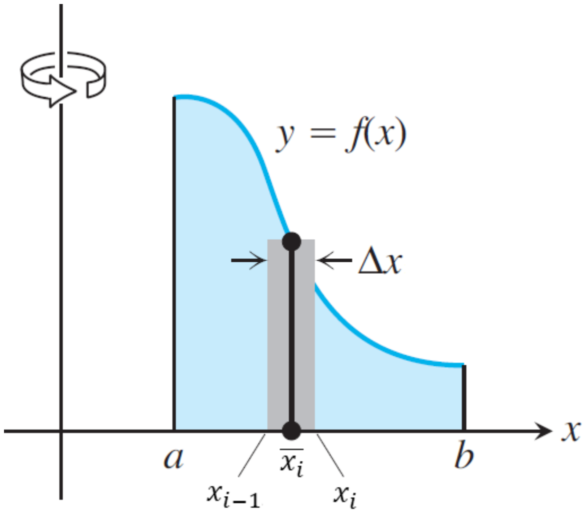
$$= 2\boldsymbol{\pi}\left(\frac{\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1}{2}\right)(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$$

Considerando que $r = \frac{\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1}{2}$ y $\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, se tiene:

$$\mathbf{V} = \mathbf{2}\boldsymbol{\pi r h}\Delta \boldsymbol{r}$$

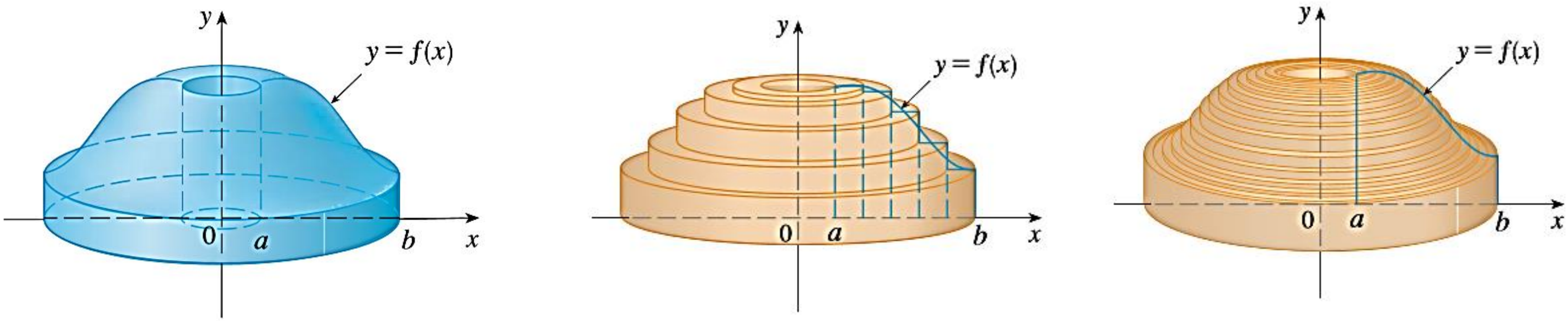
V=$[circunferencia][altura][espesor]$

Luego de hacer girar una curva f alrededor de un eje, en este caso y, para generar un sólido de revolución, se puede hallar su volumen aproximando la región con rectángulos con base en una partición P del intervalo cerrado $[a, b]$ donde se encuentra la región .
Sea S el sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje y a la región limitada por $y = f(x)$, donde $f(x) \geq 0, y = 0, x = a$ y $x = b$, donde $b > a \geq 0$.



Se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual anchura Δx y sea $\overline{x_i}$ el punto medio del i-ésimo subintervalo. Si el rectángulo de base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura $f(\overline{x_i})$ se hace girar alrededor del eje y, entonces el resultado es un cascarón cilíndrico cuyo radio promedio es $\overline{x_i}$, altura $f(\overline{x_i})$ y espesor Δx, de modo que el volumen es:

$$V_i = 2\pi rh\Delta r = 2\pi(\overline{x_i})[f(\overline{x_i})]\Delta x$$



Por lo tanto, un volumen aproximado V del sólido S se obtiene mediante la suma de los volúmenes de estos cascarones:

$$V \approx \sum_{I=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi(\overline{x_i})[f(\overline{x_i})]\Delta x$$

Esta aproximación mejora cuando la norma de la partición tiende a cero ($n \to \infty$). Pero, de acuerdo con la definición de integral, se sabe que:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi(\overline{x_i})[f(\overline{x_i})]\Delta x = \int_a^b 2\pi x f(x)dx$$

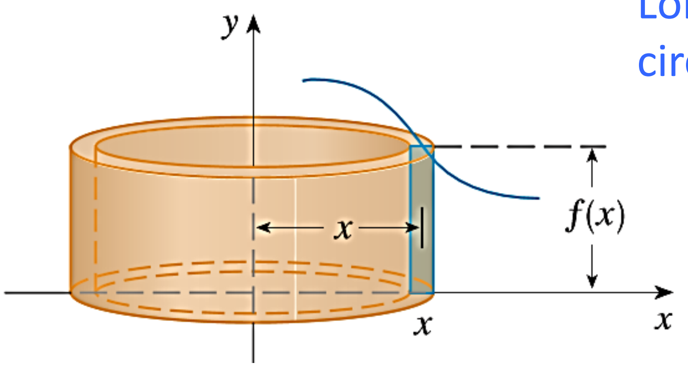
El volumen del sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje y la región bajo la curva $y = f(x)$ desde a hasta b, es

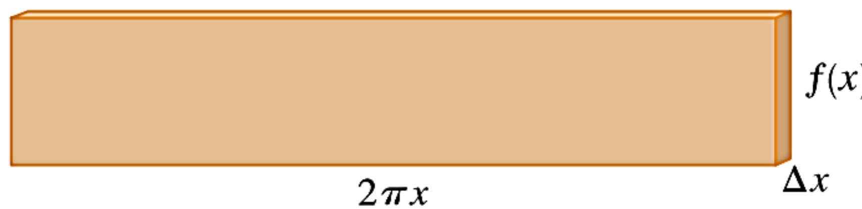
$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)dx \quad \text{donde } 0 \leq a < b$$

Pensar en el cascarón representativo, cortado y aplanado, con radio x, circunferencia $2\pi x$, altura $f(x)$ y espesor Δx o dx:

$$\int_a^b (2\pi x)\ [f(x)]\ dx$$

Longitud de circunferencia | altura | espesor





Longitud de arco de curva

DEFINICIÓN: Si f' es continua en $[a,b]$, entonces la longitud (longitud de arco) de la curva $y = f(x)$ desde el punto $A = (a, f(a))$ al punto $B = (b, f(b))$ es el valor de la integral:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

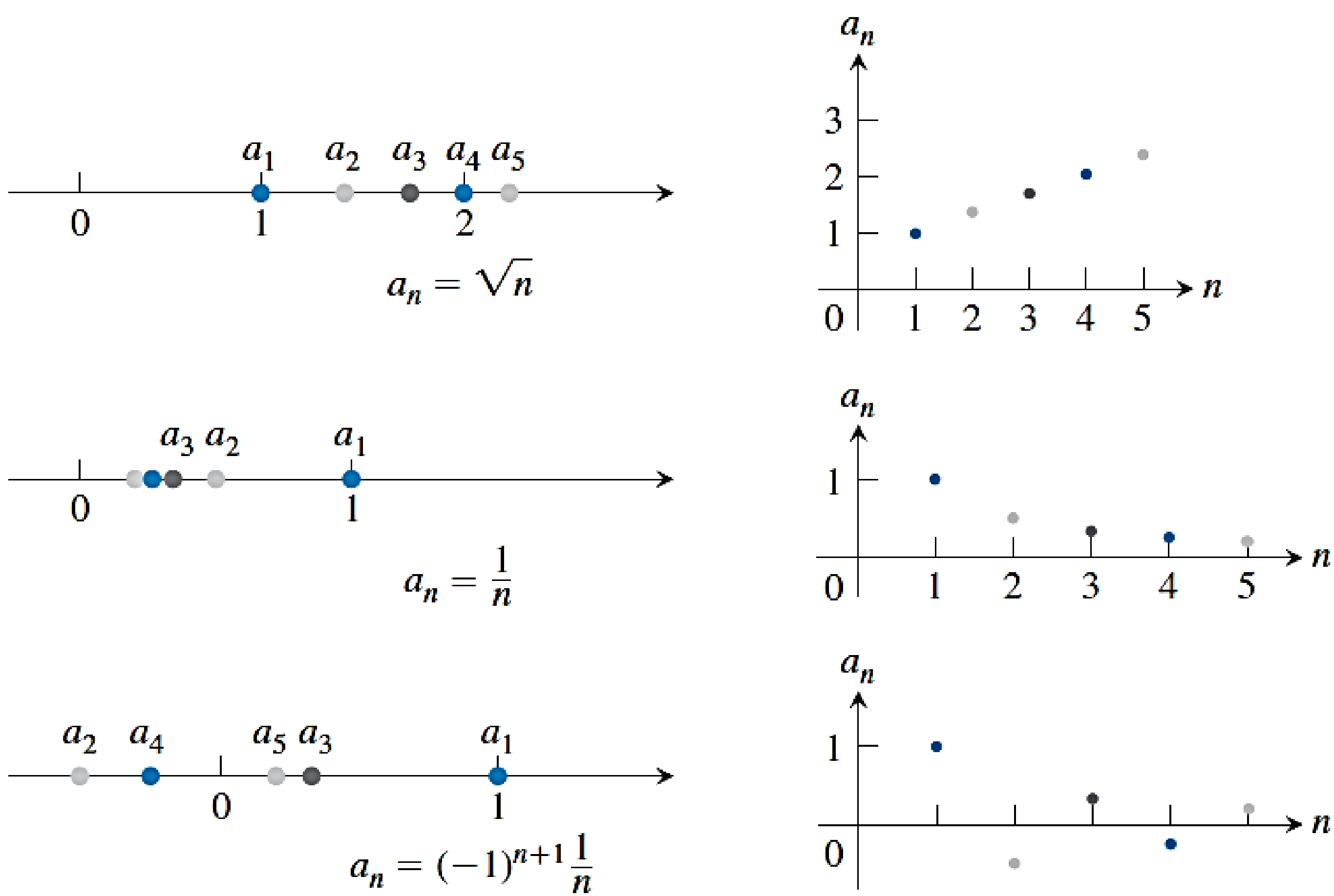
SUCESIONES

- Una sucesión es una lista de números: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots$ en un orden dado.
    - Cada a_n es un **término de la sucesión** y representa un número.
    - El entero n se denomina índice de a_n e indica en dónde aparece en la lista.
    - a_n se denomina **término n-ésimo** de la sucesión.
- Matemáticamente, se define como una función cuyo **dominio** es el conjunto de los **enteros positivos**.

$$
\begin{array}{cccccccl}
1, & 2, & 3, & 4, & \dots, & n, & \dots & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \text{Sucesión.} \\
a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \dots, & a_n, & \dots &
\end{array}
$$

Representación gráfica

Existen dos maneras: representando cada término en la recta real o bien a través de la gráfica de la función que representa la sucesión:



Convergencia y divergencia

Una sucesión es **convergente** cuando sus términos se aproximan a un solo valor conforme el índice n crece. Por ejemplo:

$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ cuyos términos se aproximan a 0.

Una sucesión es **divergente** cuando sus términos no se aproximan a un valor determinado, o bien alternan entre dos valores conforme el índice n crece. Ejemplos:

$\{b_n\} = \{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$ cuyos términos se hacen cada vez más grande cuando $n \to \infty$.

$\{c_n\} = \{(-1)^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ cuyos términos oscilan entre 1 y -1 cuando $n \to \infty$.

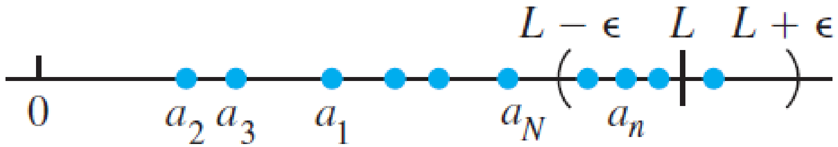
LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

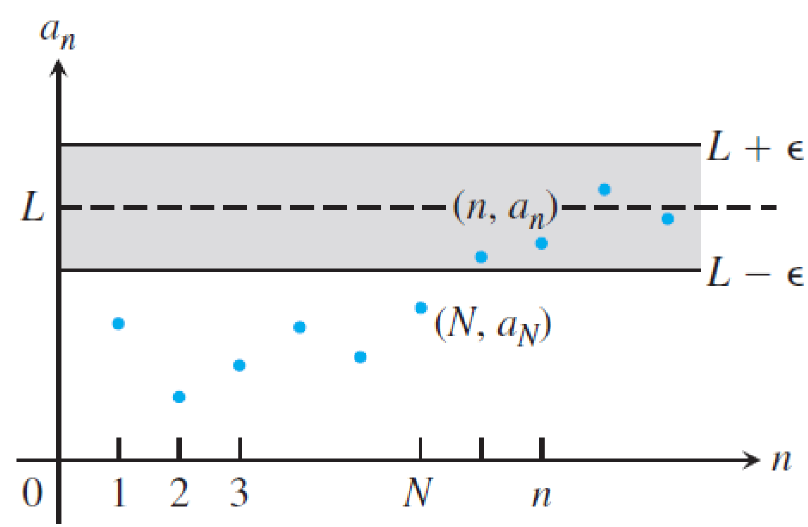
La sucesión $\{a_n\}$ **converge** al número L, si para todo número positivo ε existe un entero $N > 0$ tal que para toda n

$$n > N \quad \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

Si no existe tal número L se dice que $\{a_n\}$ **diverge**.

Si $\{a_n\}$ converge a L, se escribe $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, o simplemente $a_n \to L$, siendo L el límite de la sucesión.





Si se compara la definición anterior con la de límite de una función cuando x tiende a infinito, se observa que la única diferencia entre $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ es que se requiere que n sea un entero.

TEOREMA

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ y $f(n) = a_n$ cuando n es un entero, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Si a_n es muy grande cuando n es muy grande, se emplea la notación $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Definición: La sucesión $\{a_n\}$ **diverge a infinito** si para todo número positivo M existe un entero N tal que para todo n, $a_n > M$. Si se cumple esta condición se escribe:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \text{o} \qquad a_n \to \infty$$

De manera análoga, si para todo número m existe un entero N, tal que para todo $n > N$, se tiene $a_n < m$, entonces se dice que $\{a_n\}$ **diverge a menos infinito** y se escribe:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad \text{o} \qquad a_n \to -\infty$$

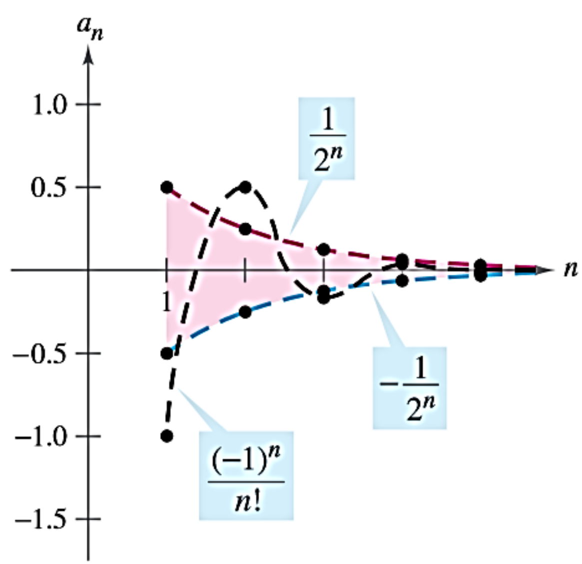
Ejemplo: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$.

TEOREMA DE LA COMPRESIÓN O DEL ENCAJE PARA SUCESIONES

Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ sucesiones de números reales. Si $a_n \leq c_n \leq b_n$ se cumple para toda n mayor que algún índice N y si $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$, entonces también $\lim_{n\to\infty} c_n = L$.

Consecuencia:

Si $|c_n| \leq b_n$ y $b_n \to 0$, entonces $c_n \to 0$, ya que $-b_n \leq c_n \leq b_n$.



Para $n \geq 4$, $(-1)^n/n!$ queda confirmado entre $-1/2^n$ y $1/2^n$

TEOREMA DE LA FUNCIÓN CONTINUA PARA SUCESIONES

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Si $a_n \to L$ y si f es una función continua en L, así como definida para toda a_n, entonces $f(a_n) \to f(L)$.

Uso de la Regla de L'Hôpital

TEOREMA Suponga que $f(x)$ es una función definida para toda $x \geq n_0$ y que $\{a_n\}$ es una sucesión de números reales tal que $a_n = f(n)$ para $n \geq n_0$. Entonces:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Límites que aparecen con frecuencia

Las seis sucesiones siguientes convergen a los límites que se detallan:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} x^{1/n} = 1 \qquad (x > 0)$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0 \qquad (|x| < 1)$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad (\text{cualquier } x)$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0 \qquad (\text{cualquier } x)$

En las fórmulas (3) a la (6), x permanece fija cuando $n \to \infty$.

Sucesiones monótonas y acotadas

DEFINICIONES

Una sucesión $\{a_n\}$ está acotada por arriba si existe un número M tal que $a_n \leq M$ para toda n. El número M es una **cota superior** para $\{a_n\}$. Si M es una cota superior para $\{a_n\}$ pero ningún número menor que M es una cota superior para $\{a_n\}$, entonces M es la **mínima cota superior** para $\{a_n\}$.

Una sucesión $\{a_n\}$ está **acotada por abajo** si existe un número m tal que $a_n \geq M$ para toda n. El número m es una **cota inferior** para $\{a_n\}$. Si m es una cota inferior para $\{a_n\}$ pero ningún número mayor que m es una cota inferior para $\{a_n\}$ entonces m es la **máxima cota inferior** para $\{a_n\}$.

Si $\{a_n\}$ está acotada por arriba y por abajo, entonces $\{a_n\}$ está **acotada**. Si $\{a_n\}$ no está acotada, decimos que $\{a_n\}$ es una sucesión **no acotada**.

DEFINICIONES

Una sucesión $\{a_n\}$ es **no decreciente** si $a_n \leq a_{n+1}$ para toda n. Esto es $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots$.

La sucesión es **no creciente** si $a_n \geq a_{n+1}$ para toda n. Esto es $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$.

La sucesión $\{a_n\}$ es **monótona** si es no decreciente o no creciente.

TEOREMA DE LA SUCESIÓN MONÓTONA

Si una sucesión $\{a_n\}$ está **acotada** y es **monótona**, entonces la sucesión **converge**.

IMPORTANTE! El recíproco **no es cierto**.

Una sucesión puede ser convergente sin ser monótona. Ejemplo: $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Esta converge a cero y está acotada, pero no es monótona, ya que alterna entre valores positivos y negativos.

El teorema indica que si una sucesión no decreciente (no creciente) converge cuando está acotada por arriba (por abajo), aunque de otra manera diverge a infinito.

SERIES INFINITAS

Una *serie infinita* es la suma de una sucesión infinita de números:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Como en una serie infinita existen una cantidad infinita de sumandos, no se puede sólo sumarlos para ver qué resulta. En vez de ello, se observa qué se obtiene si se suman los *n primeros términos* de la sucesión:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Es una suma finita y puede calcularse mediante la ***n-ésima suma parcial***.

A medida que n aumenta, las sumas parciales se aproximan a un valor límite.

SERIE GEOMÉTRICA

Dada la **serie geométrica:**

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

Donde a y r son números reales fijos y $a \neq 0$ pudiendo ser la razón r **positiva** o **negativa**, se cumple que:

-Si $|\boldsymbol{r}| < \mathbf{1}$, la serie geométrica converge y tiene por suma a $\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{r}}$, es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

-Si $|\boldsymbol{r}| \geq \mathbf{1}$, la serie diverge.

SERIE TELESCÓPICA

Dada la **serie telescópica:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Se busca un patrón en la sucesión de sumas parciales que pueda conducirnos a una fórmula para obtener la suma n-ésima. La clave es descomponer en fracciones parciales:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)} = \frac{An+A+Bn}{n(n+1)} = \frac{(A+B)n+A}{n(n+1)}$$

Se plantea un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A+B=0 \ \rightarrow B=-1 \\ A=1 \end{cases}$$

Reemplazamos en la expresión original:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Una vez descompuesta en fracciones simples:

$$s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Al suprimir los paréntesis y cancelar los términos adyacentes de signos opuestos, la suma se reduce a:

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Ahora se observa que cuando $n \to \infty$, $s_n \to 1$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \mathbf{1}$$

La serie **converge** y su **suma** es **1.**

Condición necesaria para la convergencia de las series numéricas

Enunciado: una condición necesaria para la convergencia de la serie es que el término general o *n-ésimo* término tienda a cero cuando n tiende a infinito, es decir: $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Hipótesis:

s_n sucesión de sumas parciales de la serie dada y s_{n-1} convergentes.

$\lim_{n \to \infty} s_n = S$ (único y finito)   Cuando n es grande, tanto s_n como s_{n-1} están cerca de S.

$\lim_{n \to \infty} s_{n-1} = S$ (único y finito)

Tesis: $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

El criterio del término *n*-ésimo para una serie divergente

TEOREMA:

Si $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $a_n \to 0$.

Criterio del término *n*-ésimo para la divergencia

$\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ diverge si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ no existe o si es diferente de cero.