Introducción al Álgebra Lineal

Año 2012

Lista de teoremas para el examen final

Álgebra vectorial

Proposición 1. *Sean $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ y $D = (x_4, y_4)$ puntos de $\mathbb{R}^2$ con $A \neq B$ y $C \neq D$. Entonces los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equivalentes si y sólo si*

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (x_4 - x_3, y_4 - y_3).$$

Proposición 2. *Sea $A \in \mathbb{R}^2$ tal que $A \neq (0, 0)$ y sea $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. Sea $B = \lambda. A$. Entonces*

(a) Los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ tienen la misma dirección.

(b) Si $\lambda > 0$ los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ tienen el mismo sentido y si $\lambda < 0$ los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ tienen sentidos opuestos.

(c) $d(O, B) = |\lambda| d(O, A)$

Proposición 3. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces*

(a) $\|x\| \geq 0$

(b) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

(c) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\|\alpha. x\| = |\alpha|. \|x\|$.

Teorema 4 (Desigualdad de Cauchy-Schwartz)**.**
Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $v, w \in \mathbb{R}^n$. Entonces $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$.

Proposición 5 (Desigualdad triangular)**.**
Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $v, w \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Proposición 6. *Sea $N \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ y sea $A \in \mathbb{R}^3$. Sea Π el plano perpendicular a la dirección de N que contiene al punto A. Sea $P \in \mathbb{R}^3$. Entonces la distancia del punto P al plano Π es*

$$d(P, \Pi) = \frac{|\langle P - A, N\rangle|}{\|N\|}.$$

En particular, si $P = (x_0, y_0, z_0)$ y Π es el plano de ecuación $ax + by + cz = d$ entonces se obtiene que

$$d(P, \Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

Proposición 7. *Sea S un sistema de ecuaciones lineales. Entonces las siguientes operaciones entre ecuaciones dan lugar a un sistema de ecuaciones lineales equivalente a S:*

(1) *Intercambiar dos ecuaciones.*

(2) *Multiplicar una ecuación por un número no nulo.*

(3) *Sumar a una ecuación un múltiplo de otra ecuación.*

Proposición 8. *Sea S un sistema de ecuaciones lineales. Entonces S cumple alguna de las tres proposiciones siguientes:*

- *S tiene solución única.*
- *S tiene infinitas soluciones.*
- *S no tiene solución.*

Proposición 9. *Sean $m, n, r, l \in \mathbb{N}$.*

(a) *Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, sea I_n la matriz identidad de tamaño $n \times n$ y sea I_m la matriz identidad de tamaño $m \times m$. Entonces $A.\, I_n = A$ y $I_m.\, A = A$.*

(b) *Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y sean $B, C \in \mathbb{R}^{n\times l}$. Entonces $A.\,(B + C) = A.\,B + A.\,C$.*

(c) *Sean $B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y sea $A \in \mathbb{R}^{n\times l}$. Entonces $(B + C).\,A = B.\,A + C.\,A$.*

(d) *Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times l}$ y $C \in \mathbb{R}^{l\times r}$. Entonces $(AB)C = A(BC)$.*

(e) *Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times l}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$.*

Proposición 10. *Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$. Sean $S_b = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, Ax^t = b\}$ y $S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, Ax^t = 0\}$. Entonces*

(a)
- $0 \in S_0$
- *Si $x, y \in S_0$ entonces $x + y \in S_0$.*
- *Si $x \in S_0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha x \in S_0$.*

(b) *Si $x, y \in S_b$ entonces $x - y \in S_0$.*

(c) *Si $s \in S_b$ entonces $S_b = \{y \in \mathbb{R}^n \,/\, y = x + s$ para algún $x \in S_0\}$.*

Teorema 11. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Son equivalentes:*

(a) *A es inversible.*

(b) *Para todo $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ el sistema $Ax^t = b$ tiene solución única.*

(c) *El sistema $Ax^t = 0$ tiene solución única $x = 0$.*

(d) *A es producto de matrices elementales.*

Proposición 12. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces $A.\, \mathrm{adj}(A) = det(A).\, I = \mathrm{adj}(A).\, A$.*

Teorema 13. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces A es inversible si y sólo si $det(A) \neq 0$.*

Espacios vectoriales

Proposición 14. *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sean $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{V}$. Entonces $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente dependiente si y sólo si uno de los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$ es combinación lineal de los otros.*

Proposición 15. *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sean $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{V}$ tales que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente. Sea $w \in \mathbb{V}$. Si $\{v_1, v_2, \dots, v_n, w\}$ es linealmente dependiente entonces w es combinación lineal de $v_1, v_2, \dots, v_n$.*

Proposición 16. *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sean $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{V}$ tales que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente. Sea $w \in \mathbb{V}$ tal que w es combinación lineal de $v_1, v_2, \dots, v_n$. Entonces w se puede escribir de una única manera como combinación lineal de $v_1, v_2, \dots, v_n$.*

Proposición 17. *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Sean $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{V}$ tales que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente. Sean $w_1, w_2, \dots, w_m \in \mathbb{V}$ tales que $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ genera $\mathbb{V}$. Entonces $n \leq m$.*

Teorema 18. *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial finitamente generado. Entonces $\mathbb{V}$ admite una base. Más aún, si $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores de $\mathbb{V}$ y $G = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ es un conjunto generador de $\mathbb{V}$ entonces existe un subconjunto $H \subseteq G$ tal que $A \cup H$ es una base de $\mathbb{V}$.*

Proposición 19. *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial finitamente generado. Sean B y B' bases de $\mathbb{V}$. Entonces $\#B = \#B'$.*

Proposición 20. *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita y sea $n = \dim(\mathbb{V})$.*

(a) Si A es un conjunto linealmente independiente de vectores de $\mathbb{V}$ con n elementos entonces A es base de $\mathbb{V}$.

(b) Si G es un conjunto generador de $\mathbb{V}$ con n elementos entonces G es base de $\mathbb{V}$.

Proposición 21. *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sean S y T subespacios de $\mathbb{V}$. Entonces $S+T$ es un subespacio de $\mathbb{V}$. Además, $S+T \supseteq S$, $S+T \supseteq T$ y $S+T$ es el menor subespacio de $\mathbb{V}$ que contiene a S y a T.*

Proposición 22. *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sean S y T subespacios de $\mathbb{V}$. Entonces $S \cap T$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.*

Proposición 23. *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita y sean S y T subespacios de $\mathbb{V}$. Entonces*

$$\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T).$$

Transformaciones lineales

Proposición 24. *Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{V}'$ y $\mathbb{V}''$ espacios vectoriales. Sean $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ y $g : \mathbb{V}' \to \mathbb{V}''$ transformaciones lineales. Entonces $g \circ f$ es una transformación lineal.*

Proposición 25. *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales y sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Entonces $\mathrm{Nu}f$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ y $\mathrm{Im}f$ es un subespacio de $\mathbb{W}$.*

Proposición 26. *Sean* $\mathbb{V}$ *y* $\mathbb{W}$ *espacios vectoriales y sea* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *una transformación lineal. Sea* $G = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *un conjunto generador de* $\mathbb{V}$*. Entonces* $f(G) = \{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$ *genera* $\mathrm{Im}f$*.*

Proposición 27. *Sean* $\mathbb{V}$ *y* $\mathbb{W}$ *espacios vectoriales y sea* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *una transformación lineal. Entonces*

(a) f *es un monomorfismo si y sólo si* f *es inyectiva.*

(b) f *es un epimorfismo si y sólo si* f *es sobreyectiva.*

(c) f *es un isomorfismo si y sólo si* f *es biyectiva.*

Proposición 28. *Sean* $\mathbb{V}$ *y* $\mathbb{W}$ *espacios vectoriales y sea* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *una transformación lineal. Si* f *es un isomorfismo entonces* $f^{-1} : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ *es una transformación lineal.*

Proposición 29. *Sean* $\mathbb{V}$ *y* $\mathbb{W}$ *espacios vectoriales y sea* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *una transformación lineal. Sea* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *un conjunto linealmente independiente de vectores* $\mathbb{V}$*. Si* f *es un monomorfismo entonces* $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$ *es linealmente independiente.*

Proposición 30. *Sean* $\mathbb{V}$ *y* $\mathbb{W}$ *espacios vectoriales y sea* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *una transformación lineal. Sea* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *una base de* $\mathbb{V}$*. Si* f *es un isomorfismo entonces* $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$ *es una base de* $\mathbb{W}$*.*

Teorema 31. *Sea* $\mathbb{V}$ *un espacio vectorial de dimensión finita y sea* $\mathbb{W}$ *otro espacio vectorial. Sea* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *una transformación lineal. Entonces*

$$\dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathrm{Nu}f) + \dim(\mathrm{Im}f).$$

Proposición 32. *Sean* $\mathbb{V}$ *y* $\mathbb{W}$ *espacios vectoriales y sea* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *una transformación lineal. Sea* B *una base de* $\mathbb{V}$ *y sea* B' *una base de* $\mathbb{W}$*. Entonces, para todo* $v \in \mathbb{V}$ *vale que*

$$M_{BB'}(f).\,([v]_B)^t = ([f(v)]_{B'})^t.$$

Recordar que en la parte teórica del examen también se podrá pedir dar ciertas definiciones de las que hemos visto en clase.