Trabajo práctico 2

1. Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones.
   a. Si el antecedente de una proposición condicional es falso, la proposición condicional es verdadera.
   b. Si el consecuente de una proposición condicional es verdadero, la proposición condicional es verdadera.
   c. Si q es verdadera, entonces $(p \wedge q) \Rightarrow q$ es verdadera.
   d. La negación de "Si los cerdos vuelan, yo lo creería" es "si los cerdos no vuelan, yo no lo creería"
   e. La proposición "si esto vuela, entonces es un pájaro" y "esto no vuela o es un pájaro" son proposiciones lógicas equivalentes.
   f. Dado que $\neg p$ es verdadera y q falsa, la condicional $p \Rightarrow q$ es verdadera.
   g. Si p es verdadera, entonces $\neg p \Rightarrow (q \vee r)$ es verdadera.

2. Escriba en lenguaje coloquial, la negación de cada proposición. Recuerde que la negación de $p \Rightarrow q$ es $p \wedge \neg q$
   a. Si das a tus plantas ternura, y las cuidas con cariño, florecerán.
   b. Si el cheque está en la correspondencia, estaré sorprendido.
   c. Si ella no lo hace, él lo hará.
   d. Todos los hombres alguna vez fueron niños.

3. Pruebe, empleando tablas de verdad, las siguientes equivalencias:
   a. $(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \Rightarrow (\neg q))$
   b. $[p \Rightarrow (q \vee r)] \Leftrightarrow [p \wedge (\neg q) \Rightarrow r]$

4. Usando tablas de verdad, responda. Siendo p y q proposiciones cualesquiera, la proposición $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \vee q) \Leftrightarrow q]$
   a. ¿Es siempre verdadera?
   b. ¿Es verdadera si y sólo si p lo es?
   c. ¿Es verdadera si y sólo si q es falsa?
   d. ¿Es verdadera si y sólo si p y q lo son?

5. Dadas las siguientes proposiciones:
   a. Puedes pagarme ahora o puedes pagarme después
   b. Es verano y no hay nieve
   c. Un número positivo es 1/3 y -12 es menor que cero.
   d. Yo dije si pero ella dijo no
   e. 5-1=4 y 9+12≠7
   f. 3<10 o 7≠2
   g. El abogado y el cliente se presentaron en la corte.

   I. Traduzca cada una de ellas al lenguaje simbólico.
   II. Utilice alguna de las Leyes de De Morgan para escribir la negación de cada una de ellas.

Trabajo práctico 2

6. Analice el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones y escriba, en forma simbólica, su negación (asuma en todos los casos que las variables toman valores en el conjunto de los números reales)

   a. $\exists\, x \mid x^2 + x + 1 = 0$

   b. $\forall\, x, (x-1)\cdot(x+1) = x^2 - 1$

   c. $\exists\, x \mid x^2 + 1 \geq 0$

   d. $\forall\, x, x^2 + 3x + 1 = 0$

7. Escriba en forma simbólica las siguientes proposiciones.

   a. “Todos los números reales son pares”.
   b. “Todo número real menor que 1, tiene un cuadrado menor que él mismo”
   c. “Existen números enteros impares que son múltiplos de 3”
   d. “Existen números enteros cuyo cubo aumentado en 1 es igual al cubo del siguiente”

8. Escriba en forma simbólica la negación de las proposiciones del punto 7 y retradúzcalas al lenguaje ordinario.

9. Determine cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles falsas. Aplique la definición *1.2* del capítulo 1 del libro *Matemáticas Discretas* (Edward Scheinerman) para fundamentar sus respuestas.

   a. $3 \mid 100$

   b. $3 \mid 99$

   c. $-3 \mid 3$

   d. $-2 \mid -7$

   e. $0 \mid 4$

   f. $4 \mid 0$

   g. $0 \mid 0$

10. Un número racional es el que se forma dividiendo dos enteros a/b siendo b distinto de cero. El conjunto de los números racionales se representa con la letra Q. Explique por qué todo número entero es un número racional, pero no todos los números racionales son enteros.

11. Defina lo que quiere decir que un número entero sea cuadrado. Por ejemplo, los enteros 0, 1, 4, 9, 16 son cuadrados. Su definición debe comenzar: “Un entero *x* se llama cuadrado, siempre y cuando…..”

Trabajo práctico 2

12. Demuestre que la suma de dos enteros impares es par.

13. Demuestre que el producto de un entero impar por uno par es un entero par.

14. Suponga que *a*, *b* y *c* son números enteros. Demuestre que si $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces $a \mid (b+c)$

15. Sea *x* un número entero. Demuestre que *x* es impar sí y sólo si *x+1* es par.

16. Sean *a* y *b* números enteros. Demuestre que *a* < *b* si, y sólo si $a \leq b-1$.

17. Demuestre que un número entero es impar si, y sólo si es la suma de dos enteros consecutivos.

18. Pruebe, dando un contraejemplo, que las siguientes proposiciones son falsas.
    a. Los números primos son impares.
    b. $\forall x \in \mathbb{N}; x^2 - 10x + 24 \geq 0$.
    c. Todo subconjunto de $\mathbb{N}$ es finito.

19. Refute: si *x* e *y* son números enteros, entonces $x \geq y \Rightarrow x^2 \geq y^2$

20. Refute: si *a* y *b* son enteros, siendo $a \mid b$, entonces $a \leq b$.

21. Refute: si *a*, *b* y *c* son números enteros positivos, con $a \mid (bc)$, entonces $a \mid b$ o $a \mid c$.

Trabajo práctico 2

Ejercicios adicionales propuestos

1. Construya una proposición equivalente a $p \vee q$ utilizando los operadores $\wedge$ y $\neg$.

2. Verifique, utilizando tablas de verdad, cuáles de las siguientes proposiciones son equivalentes.
   a. $p \underline{\vee} \sim q$
   b. $\sim p \vee q$
   c. $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
   d. $(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$

3. Si p es una proposición que depende de los elementos x de un conjunto no vacío E, escriba las negaciones de las siguientes proposiciones.
   a. $\forall\, x \in E,\ p(x)\ es\ verdadera$
   b. $\exists\, x \in E, p(x)\ \ es\ verdadera$

4. Para cada una de las siguientes proposiciones analice su valor de verdad y escriba, en forma simbólica, su negación (Asuma que las variables toman valores en el conjunto de los números reales)
   a. $\exists\ x \mid x = -x$
   b. $\forall\ x, x + x = 0$
   c. $\forall\ x, \left(\exists\ y \mid x^2 + y^2 = (x+y)^2\right)$
   d. $\forall\ x, \left(\forall y,\ x + y = y + x\right)$
   e. $\exists\ x \mid \left(\forall y,\ x + y = 0\right)$

5. Dado el teorema: “Si un triángulo tiene dos lados iguales, entonces los ángulos opuestos a dichos lados son iguales”, enuncie los teoremas recíproco y contra recíproco.

6. Sea A={1,2,3,4} el conjunto universal. Determine el valor de verdad de cada enunciado:
   a. $\forall\ x: x + 3 < 6$
   b. $\forall\ x: x^2 - 10 \leq 8$
   c. $\exists\ x: 2x^2 + x = 15$
   d. $\exists\ x: x^2 > 1 \Rightarrow x + 2 = 0$

7. Averiguar el valor de verdad de los siguientes enunciados.

   $\boldsymbol{p}$: $\forall\ x \in \mathbb{Q}, \exists\ y \in \mathbb{Q}\ : 2x + y = 0$
   $\boldsymbol{q}$: $\exists\ y \in \mathbb{Q}, \forall\ x \in \mathbb{Q}\ :\ 2x + y = 0$

Trabajo práctico 2

8. Encuentre el valor de verdad de: $[(\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}) \vee (\backsim \mathrm{p} \wedge \mathrm{q})] \wedge (\mathrm{r} \Longrightarrow \mathrm{q})$ si
   a. p es V, q es V, r es F
   b. p, r, son F, q es V
   c. p es F, q es F y r es F
   d. Si todas son verdaderas

9. Ninguno de los números siguientes es primo. Explique por qué no satisfacen la definición *1.5* del capítulo 1 del libro *Matemáticas Discretas* (Edward Scheinerman)
   a. 21
   b. 0
   c. π
   d. $0{,}5$
   e. -2
   f. -1

10. Suponga que ya se definió el concepto de distancia entre dos puntos. Escriba la definición de que un punto está entre dos puntos. Su definición debe comenzar: “Supongamos que *A*, *B* y *C* son puntos en el plano. Se dice que *C* está entre *A* y *B* siempre y cuando……”

11. Demuestre que la suma de un entero impar y uno par es un entero impar.

12. Demuestre que el producto de dos enteros pares es par.

13. Suponga que *a*, *b*, *c* y *d* son números enteros. Demuestre que si $a \mid b$ y $c \mid d$, entonces $(ac) \mid (bd)$

14. Sea x un número entero. Demuestre que $0 \mid x$ sí y sólo si $x = 0$.

15. Refute: si x e y son números enteros, entonces $(x+y)^2 \neq x^2 + y^2$

16. Refute: si *a*, *b* y *c* son números enteros positivos, entonces $a^{\left(b^c\right)} = \left(a^b\right)^c$