TRABAJO PRÁCTICO COMPLEMENTARIO: DERIVADAS

1. Encontrar la derivada de las siguientes funciones aplicando la definición (a través del proceso de límite)

a. $h(s) = 3 + \frac{2}{3}s$

b. $f(x) = 2 - x^2$

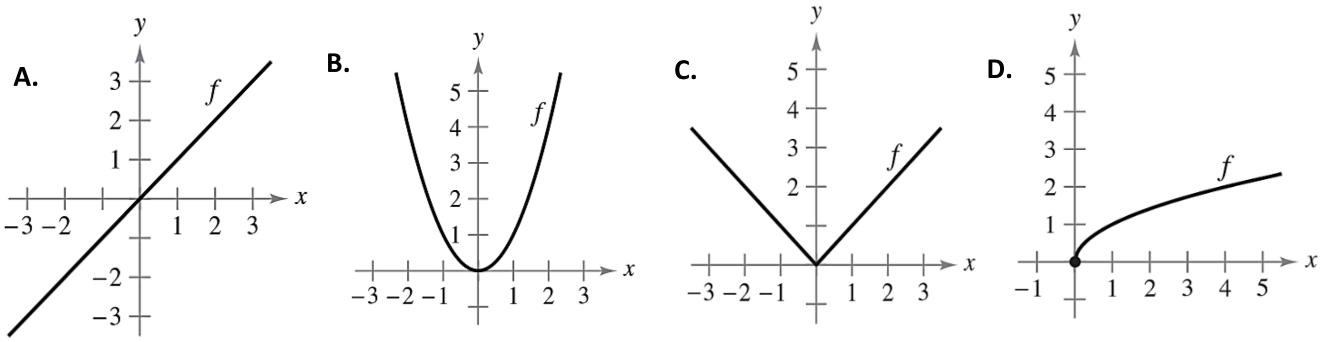
c. $f(x) = x^3 + x^2$

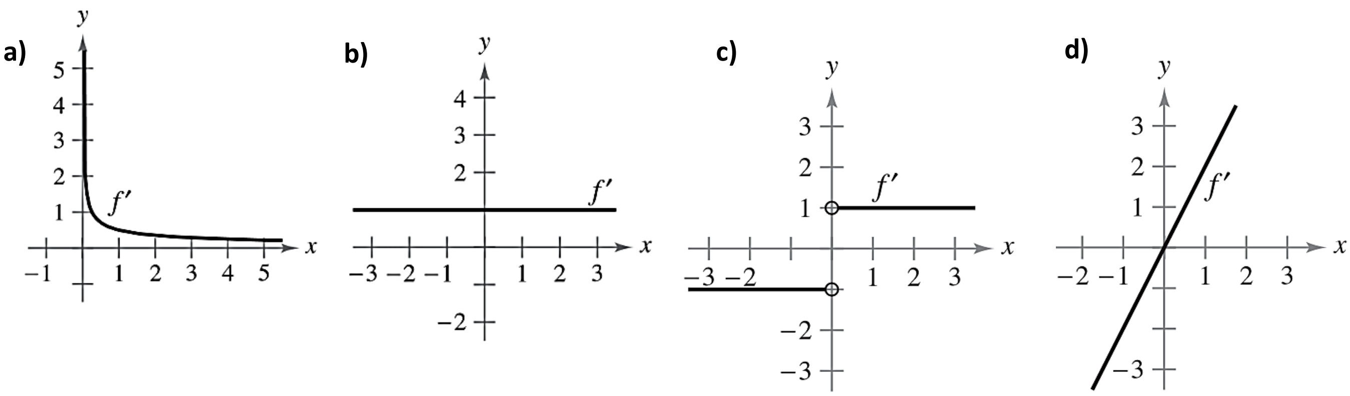
d. $f(x) = \frac{1}{x-1}$

e. $f(x) = \sqrt{x+4}$

f. $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$

2. En los siguientes incisos se muestra la gráfica de f. Seleccionar la gráfica de f'.



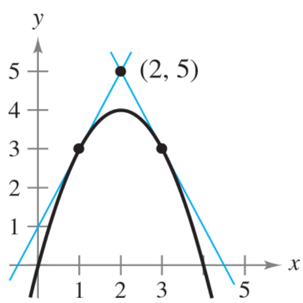


3. En los incisos a y b, encontrar las ecuaciones de dos rectas tangentes a la gráfica de f que pasen por el punto señalado

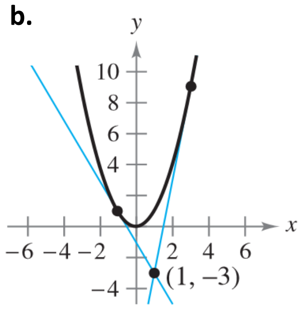
a. $f(x) = 4x - x^2$

b. $f(x) = x^2$

a.

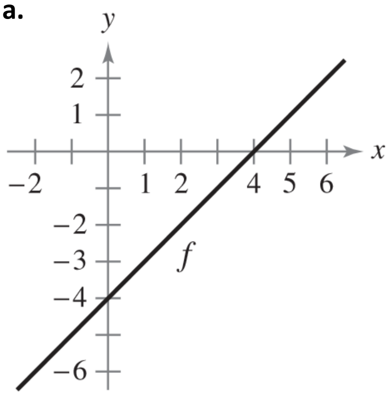


b.

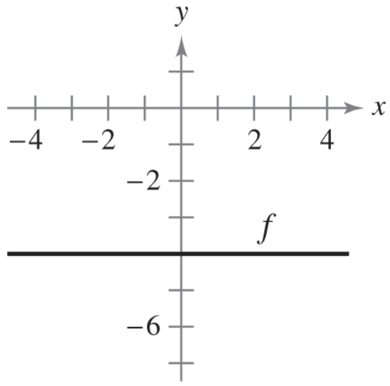


4. A partir de las gráficas de f construir las de f' en cada caso, y explicar cómo se obtuvo la respuesta.

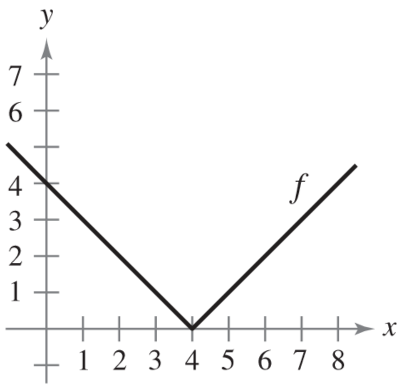
a.



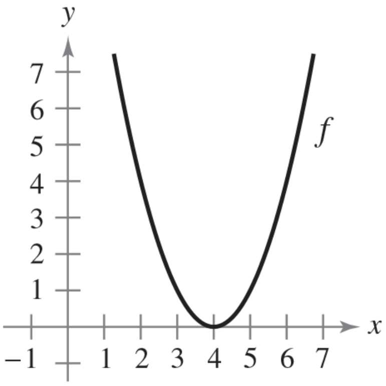
b.



c.

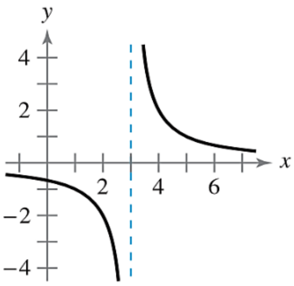


d.

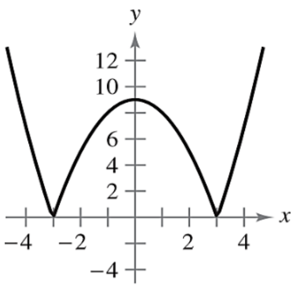


5. Para las siguientes funciones y sus gráficas, describir los valores x para los que f es derivable. Obtener la derivada de la función.

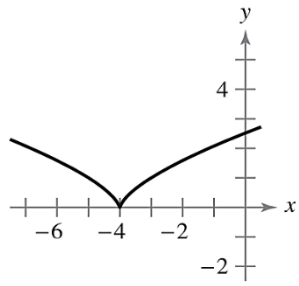
a. $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$



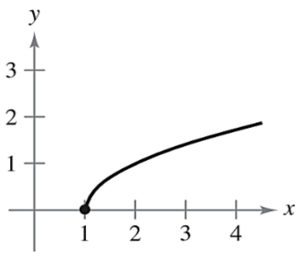
b. $f(x) = |x^2 - 9|$



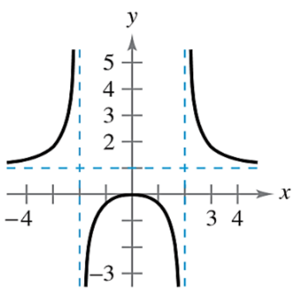
c. $f(x) = (x+4)^{2/3}$



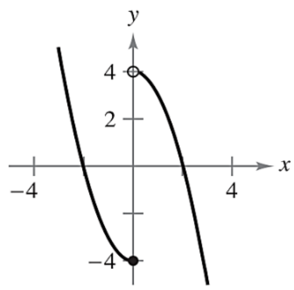
d. $f(x) = \sqrt{x-1}$



e. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$



f. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \le 0 \\ 4 - x^2, & x > 0 \end{cases}$



6. Calcular las derivadas laterales en $x = 1$ para cada una de las siguientes funciones. ¿Es derivable la función en $x = 1$?

a. $f(x) = |x-1|$

b. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

c. $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, x \le 1 \\ (x-1)^2, x > 1 \end{cases}$

d. $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

7. En cada caso, determinar si la función es derivable en $x = 2$

a. $f(x) = \begin{cases} x^2+1, x \le 2 \\ 4x-3, x > 2 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x+1, & x < 2 \\ \sqrt{2x}, & x \ge 2 \end{cases}$

8. Emplear las reglas de derivabilidad para calcular la derivada de la función en cada caso

a. $y = \frac{1}{x^5}$

b. $y = \sqrt[5]{x}$

c. $f(t) = -2t^2 + 3t - 6$

d. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x$

e. $f(\theta) = \frac{\pi}{2} sen\theta - cos\theta$

f. $f(x) = \frac{5}{(2x)^3} + 2cosx$

g. $f(x) = \frac{x^3-3x^2+4}{x^2}$

h. $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{x}$

i. $f(x) = x(x^2+1)$

j. $f(x) = 3x(6x-5x^2)$

k. $f(x) = \sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x}$

l. $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 3cosx$

m. $f(x) = 6\sqrt{x} + 5cosx$

n. $f(x) = (x^2+3)(x^2-4x)$

o. $f(t) = \sqrt{t}(1-t^2)$

p. $f(x) = x^3 \cos x$

q. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

r. $f(t) = \frac{t^2+4}{5t-3}$

s. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^3+1}$

t. $f(s) = \frac{s}{\sqrt{s}-1}$

u. $f(x) = \frac{sen\, x}{x^2}$

v. $f(t) = \frac{\cos t}{t^3}$

9. Determinar los puntos (si los hay) donde la gráfica de la función tiene una recta tangente horizontal

a. $y = x^4 - 2x^2 + 3$

b. $y = x^3 + x$

c. $y = \frac{1}{x^2}$

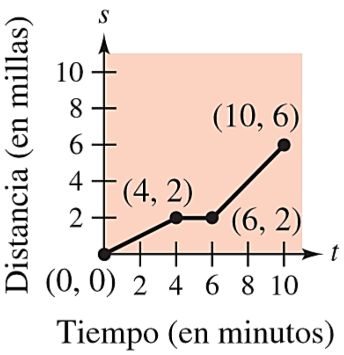
d. $y = x^2 + 9$

e. $y = x + senx \;, 0 \le x \le 2\pi$

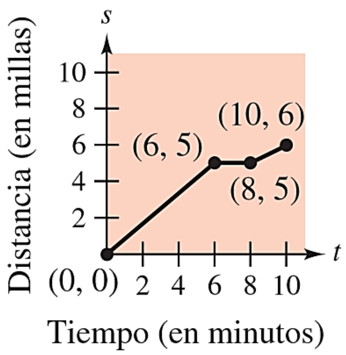
f. $y = \sqrt{3}x + 2cosx \;, 0 \le x \le 2\pi$

10. A continuación, se muestra la gráfica de una función posición, que representa la distancia recorrida en millas por una persona que conduce durante 10 minutos para llegar a su trabajo. Elaborar un bosquejo de la función velocidad correspondiente.

a.



b.



11. Encontrar la derivada de las siguientes funciones

a. $f(x) = \frac{x^3+5x+3}{x^2-1}$ b. $f(x) = x^4\left(1 - \frac{2}{x+1}\right)$ c. $f(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{x}}$ d. $f(x) = \frac{2-1/x}{x-3}$

e. $f(x) = \frac{x^2+c^2}{x^2-c^2}$, c es una constante. f. $f(x) = \frac{3(1-sen\,x)}{2\cos x}$ g. $f(\theta) = 5\theta sec\theta + \theta\tan\theta$

12. Encontrar $f'(x)$ y $f(c)$

a. $f(x) = (x^3+4x)(3x^2+2x-5),\ \ c = 0$ b. $f(x) = \frac{x^2-4}{x-3},\ \ c = 1$

c. $f(x) = x\cos x,\ \ c = \frac{\pi}{4}$ d. $f(x) = \frac{sen\,x}{x},\ \ c = \frac{\pi}{6}$

13. En los siguientes ejercicios verificar que $f'(x) = g'(x)$, explicar la relación que existe entre f y g

a. $f(x) = \frac{3x}{x+2}$ $g(x) = \frac{5x+4}{x+2}$

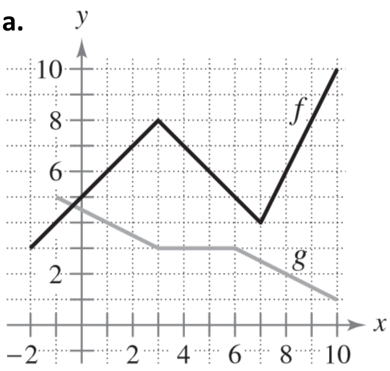
b. $f(x) = \frac{sen\,x-3x}{x}$ $g(x) = \frac{sen\,x+2x}{x}$

14. Utilizar las gráficas de f y g, siendo $p(x) = f(x)g(x)$ y $q(x) = f(x)/g(x)$ para encontrar lo solicitado en cada caso:

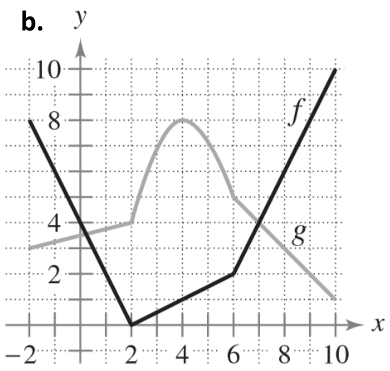
a. Encontrar $p'(1)$ y $q'(4)$

b. Encontrar $p'(4)$ y $q'(7)$

a.



b.



15. Problemas (*recomendados para Elementos de Cálculo)*

a. La Ley de Boyle establece que si la temperatura de un gas permanece constante, su presión es inversamente proporcional a su volumen. Utilizar la derivada para demostrar que el ritmo de cambio de la presión es inversamente proporcional al cuadrado del volumen.

b. Una población de 500 bacterias se introduce en un cultivo y aumenta de número de acuerdo con la ecuación: $P(t) = 500\left(1 + \frac{4t}{50+t^2}\right)$ donde t se mide en horas. Calcular el ritmo de cambio al que está creciendo la población cuando $t = 2$.

16. Encontrar la segunda derivada de las siguientes funciones

a. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - x$ b. $f(x) = x + 32x^{-2}$ c. $f(x) = \frac{x}{x-1}$

d. $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x}$ e. $f(x) = xsen\,x$ f. $f(x) = \sec x$

17. Encontrar la derivada de orden superior que se indica

a. $f''^{(x)} = 2 - \frac{2}{x}, f'''(x)$ b. $f'''^{(x)} = 2\sqrt{x}, f^{(4)}(x)$ c. $f^{(4)}(x) = 2x + 1, f^{(6)}(x)$

18. Encontrar la derivada de las siguientes funciones aplicando la regla de la cadena

a. $g(x) = 3(4 - 9x)^4$ b. $y = \sqrt[3]{6x^2 + 1}$ c. $f(t) = \left(\frac{1}{t-3}\right)^2$ d. $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

e. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ f. $f(v) = \left(\frac{1-2v}{1+v}\right)^3$ g. $f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}}$ h. $g(t) = \sqrt{\frac{1}{t^2-2}}$

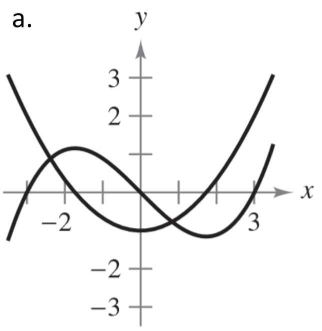
i. $f(x) = (2 + (x^2 + 1)^4)^3$ j. $f(t) = \sqrt{\sqrt{t+1} + 1}$ k. $y = sen\,(\pi x)^2$

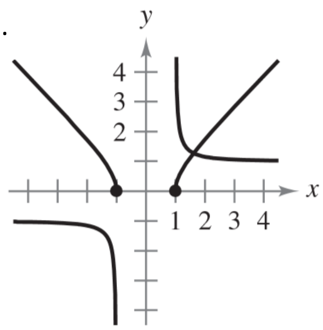
l. $y = \cos(1 - 2x)^2$ ll. $f(x) = sen\,2x \cos 2x$ m. $f(v) = \frac{\cos v}{cosec\,v}$

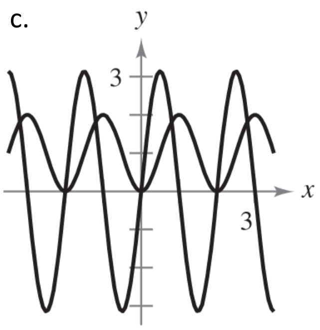
n. $g(\theta) = \cos^2 8\theta$ o. $h(t) = 2\cot^2(\pi t + 2)$ p. $y = sen\,\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{sen\,x}$

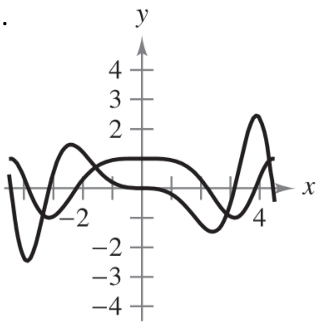
q. $y = sen(tan 2x)$ r. $y = cos\sqrt{sen(\tan \pi x)}$

19. A continuación, se muestran las gráficas de una función f y su derivada f'. Clasificar las gráficas según correspondan a f o f' y explicar los criterios usados para tal selección

a.


b.


c.


d.


20. Problema (*recomendado para Elementos de Cálculo*)

La velocidad S de la sangre que está a r cm del centro en una arteria está dada por $S = C(R^2 - r^2)$, donde C es una constante, R es el radio de la arteria y S se mide en cm/s. Suponer que se administra un fármaco y la arteria empieza a dilatarse a un ritmo dR/dt. A una distancia constante r, encontrar el ritmo de cambio de S con respecto a t para $C = 1{,}76\ x\ 10^5$, $R = 1{,}2\ x\ 10^{-2}$ y $dR/dt = 10^{-5}$.

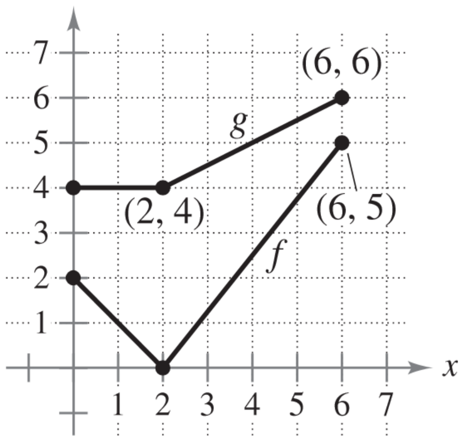
21. *Búsqueda de un patrón*: sea $f(x) = sen\ \beta x$, donde β es una constante.

a. Calcular las 4 primeras derivadas de la función.

b. Verificar que la función y su segunda derivada satisfacen la ecuación $f''(x) + \beta^2 f(x) = 0$.

c. Utilizar los resultados del apartado (a) para desarrollar fórmulas generales para las derivadas de orden par e impar: $f^{2k}(x)$ y $f^{2k-1}(x)$.

22. ***Para pensar*****: sean $r(x) = f(g(x))$ y $s(x) = g(f(x))$, con f y g tales como muestra la figura siguiente. Calcular a) $r'(1)$; b) $s'(4)$**



23. Encontrar dy/dx por medio de la derivación implícita

a. $x^2 + y^2 = 9$ b. $x^2 - y^2 = 25$ c. $x^{1/2} - y^{1/2} = 16$ d. $x^3 - y^3 = 64$

e. $x^3 - xy + y^2 = 7$ f. $x^2y - y^2x = -2$ g. $x^3y^3 - y = x$ h. $\sqrt{xy} = x^2y + 1$

i. $x^3 - 3x^2y + 2xy^2 = 12$ j. $4\cos x\ sen\ y = 1$ k. $(sen\ \pi x + \cos \pi y)^2 = 2$ l. $sen x = x(1 + \tan y)$

m. $\cot y = x - y$ n. $sen\ x + 2\cos 2y = 1$ o. $y = sen\ xy$ p. $x = \sec(1/y)$

24. Encontrar dy/dx por medio de la derivación implícita y calcular la derivada en el punto indicado

a. $xy = 6$, (-6,-1) b. $x^2 - y^3 = 0$, (1,1) c. $y^2 = \frac{x^2-49}{x^2+49}$, (7,0) d. $(x+y)^3 = x^3 + y^3$, (-1,1)

e. $x^{2/3} + y^{2/3} = 5$, (8,1) f. $\tan(x+y) = x$, (0,0) g. $x\cos y = 1$, (2,π/3) h. $x^3 + y^3 = 6xy + 1$, (2,3)

25. Utilizar la derivación implícita para encontrar la ecuación de la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$ en (1,2). Demostrar que la ecuación de la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en (x_0, y_0) es $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$.

26. Utilizar la derivación implícita para encontrar la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{8} = 1$ en (3,-2). Demostrar que la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en (x_0, y_0) es $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$.

27. Derivabilidad y continuidad

a. Grafique la función $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \le x < 0 \\ -x^2, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$

¿La función es continua es $x = 0$?¿ Es derivable en $x = 0$? Justificar

b. Grafique la función $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \le x < 0 \\ \tan x, & 0 \le x \le \pi/4 \end{cases}$

¿La función es continua es $x = 0$?¿ Es derivable en $x = 0$? Justificar

c. Grafique la función $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

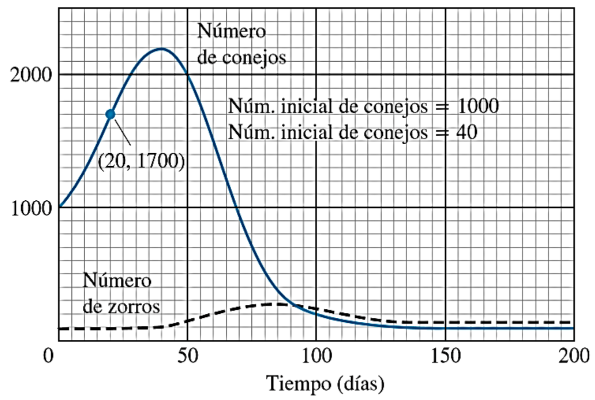
¿La función es continua es $x = 1$?¿ Es derivable en $x = 1$? Justificar

d. ¿Para qué valor o valores de la constante m, si existen, la función $f(x) = \begin{cases} sen\,(2x), & x \leq 0 \\ mx, & x \geq 0 \end{cases}$ es continua es $x = 0$?¿ Es derivable en $x = 0$? Justificar

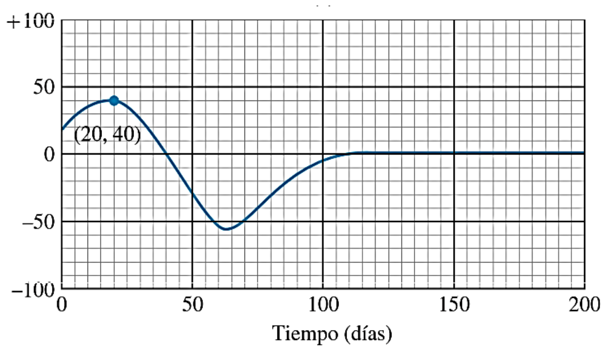
28. Problema (*recomendado para Elementos de Cálculo*)

Las gráficas que se muestran a continuación representan los números de conejos y zorros en una pequeña población del Ártico, los cuales se grafican como funciones del tiempo para 200 días. En el gráfico a) se muestra que, en un principio, el número de conejos aumenta conforme éstos se reproducen. Pero los zorros se alimentan de conejos, de manera que cuando el número de zorros aumenta, la población de conejos se estabiliza y luego declina. En el b) presenta la gráfica de la derivada de la población de conejos. Responder:

a. ¿Cuál es el valor de la derivada de la población de conejos cuando el número de éstos es máximo? ¿Y cuándo se registra el mínimo número de conejos?
b. ¿Cuál es el tamaño de la población de conejos cuando su derivada es la mayor posible? ¿Y cuándo es la menor posible (negativa)?
c. ¿En qué unidades deben medirse las pendientes de las curvas de población de conejos y de zorros?



(a)



Derivada de la población de conejos

(b)